



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

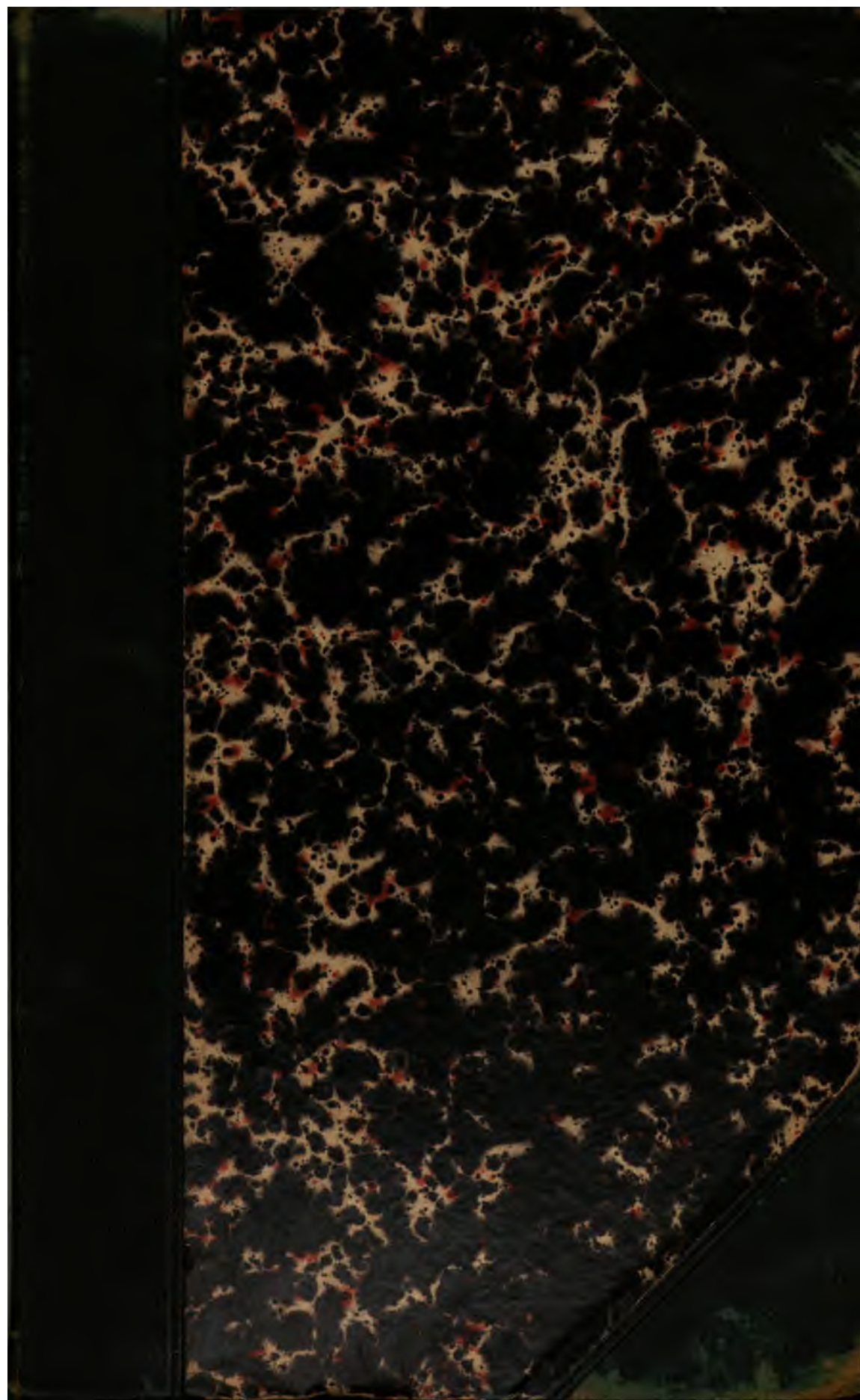
Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

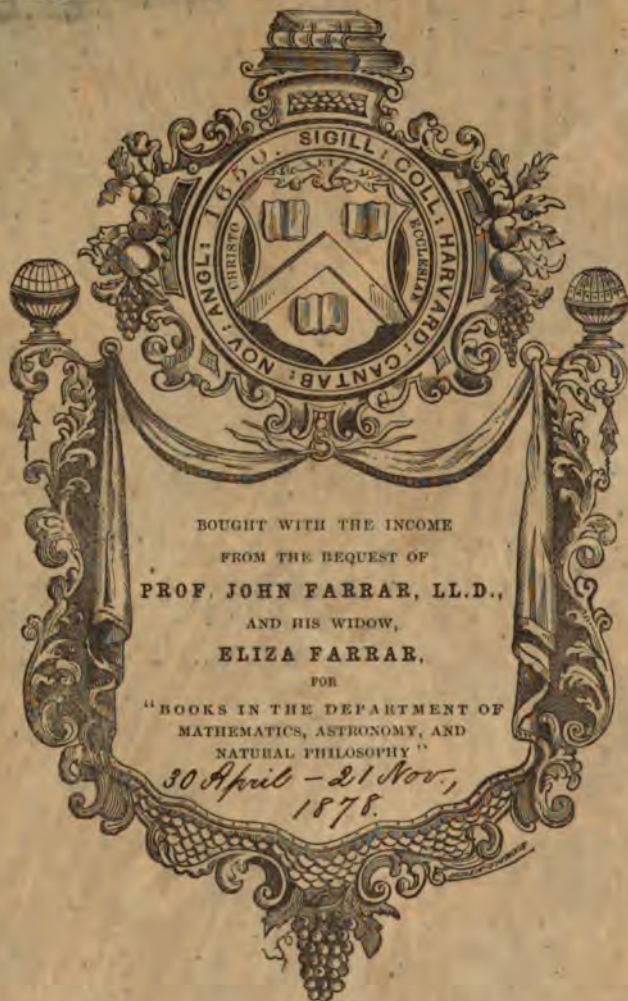
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



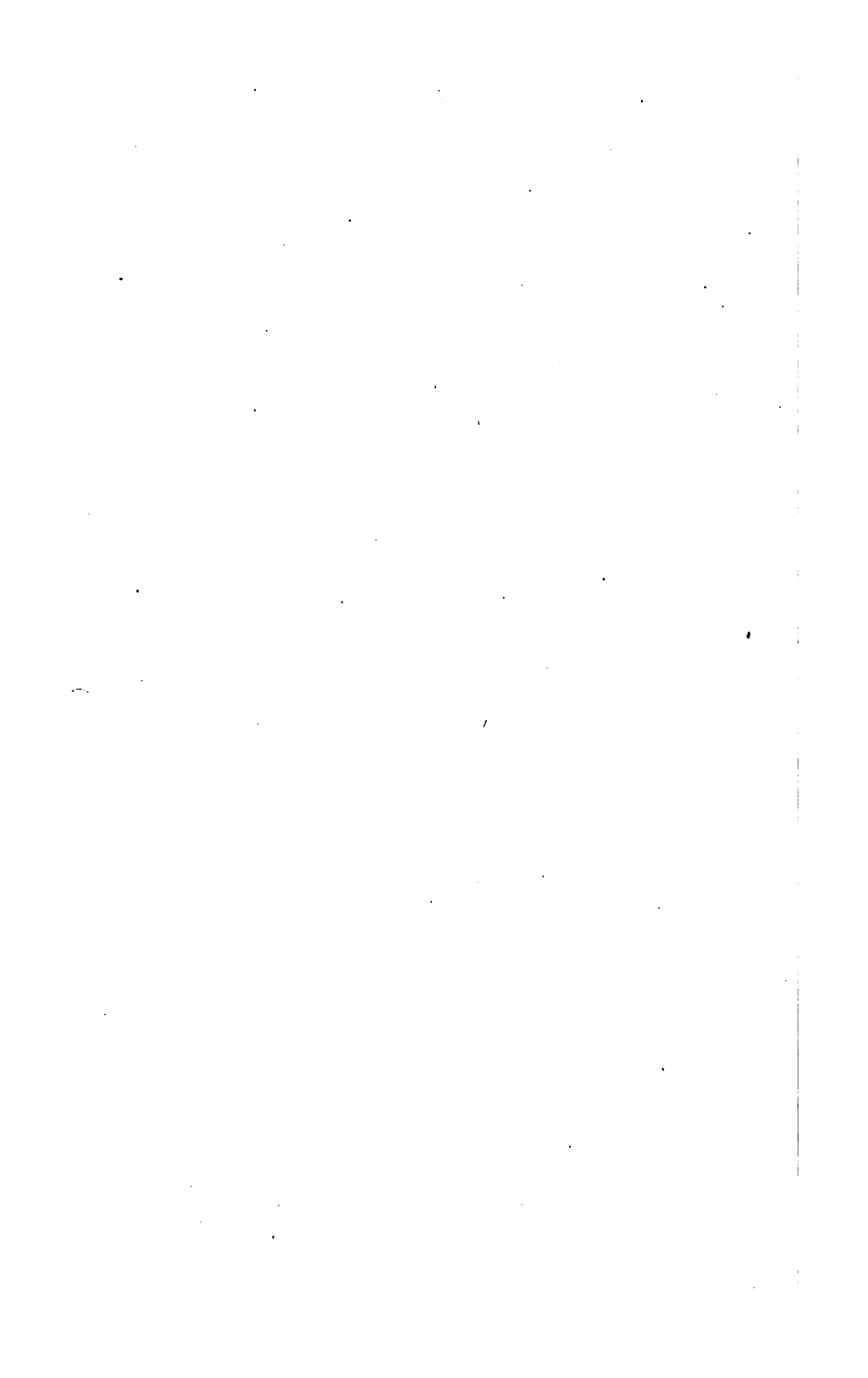
Sci 885.25

Bd. Nov., 1879.



SCIENCE CENTER LIBRARY







ARCHIV
der
MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht
auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren
Unterrichtsanstalten.

Gegründet von
J. A. Grunert,
fortgesetzt von
R. Hoppe.

Zweiundsechzigster Teil.

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.
1878.

~~1355~~

Sci 885.25

1878, 1900 - 1901
St. Louis, Mo.

Inhalts-Verzeichniss

des zweiundsechzigsten Theils.

Nr der Abhandlung.

Heft. Seite.

Geschichte der Mathematik und Physik.

- | | | | |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|
| V. | Inedita Copernicana. Aus den Handschriften in Berlin, Frauenburg, Upsala und Wien herausgegeben von Maximilian Curtze | II. | 113 |
| XXIV. | Fortsetzung | IV. | 337 |

Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.

- | | | | |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| I. | Die Sturm'schen Functionen zweiter Gattung. Von Heinrich Wendlandt | I. | 1 |
| VIII. | Summation einiger Reihen. Von R. Hoppe . . | II. | 165 |
| X. | Sur les fractions continues périodiques. Par P. Appell | II. | 183 |
| XII. | Beitrag zum Interpolationsproblem. Von Carl Bartl | II. | 202 |
| XIII. | Entwicklung von $\log(1+x)$. Von W. Fuhrmann | II. | 220 |
| XIV. | Einleitung in die Theorie der Substitutionen und ihre Anwendungen. Von E. Netto | III. | 225 |
| XVI. | Vergleichung zweier Annahmen über die moralische Bedeutung von Geldsummen. Von Emanuel Czuber | III. | 267 |
| XX. | Die geschlossene Form der periodischen Kettenbrüche. Von K. E. Hoffmann | III. | 310 |
| XXIII. | Zur Summirung einer Reihe. Von Ligowski . | III. | 334 |

IV

N der Abhandlung.

Heft. Seite.

Integralrechnung.

XIII.	Ermittelung des Wertes eines bestimmten Integrals. Von Simon Spitzer	II.	221
XXIII.	Eine partielle Differentialgleichung. Von R. Hoppe	III.	336

Geometrie der Ebene.

III.	Inscription dans le cercle des polygones réguliers de 15, 30, 60, 120, etc. côtés. Par Georges Dostor	I.	103
IV.	Neue Eigenschaft der Kegelschnitte. Von K. Zah- radnik	I.	111
VI.	Nombres relatifs des polygones réguliers de n et de $2n$ côtés, suivant que n est un nombre impair ou un nombre pair. Par Georges Dostor . .	II.	148
VII.	Rein geometrische Proportionslehre. Von R. Hoppe	II.	153
XIII.	Minimum-Aufgabe. Von R. Hoppe	II.	215
XIII.	Ueber den Neunpunktkreis des Dreiecks. Von W. Fuhrmann	II.	218
XVIII.	Nouvelle méthode pour déterminer les foyers des courbes du second degré. Par Georges Dostor	III.	289
XXI.	Sechs Punkte eines Kegelschnittes. Von August Scholtz	III.	317
XXII.	Aufgabe über die Construction eines Kegelschnittes. Von Gustav Mancke	III.	325
XXVII.	Ueber den in der Definition der Potenzlinie ent- haltenen Kreis. Von L. Mack	IV.	405
XXVIII.	Untersuchungen über das Dreieck. Von Emil Hain	IV.	422
XXIX.	Weitere Beiträge zur Theorie der Cissoide. Von Karl Zahradnik	IV.	443

Geometrie des Raumes.

II.	Les trois sphères des polyèdres réguliers étoilés. Par Georges Dostor	I.	78
IX.	Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales du quatrième ordre. Par P. Appell	II.	175
XIII.	Bemerkung über den Torsionshalbmesser von Raum- curven. Von R. Mehmkke	II.	212

V

der Abhandlung.	Heft.	Seite.
XIII. Zwei Sätze von den Flächen zweiten Grades. Von R. Mehmke	II.	214
XV. Ableitung der Centralprojection aus einer cotirten Orthogonalprojection. Von Emanuel Czuber .	III.	259
XVII. Propriétés relatives des polyèdres réguliers, qui sont conjugués entre eux. Par Georges Dostor .	III.	285

Trigonometrie.

XIII. Berechnung der dritten Seite eines Dreiecks aus zwei gegebenen Seiten und dem von diesen ein- geschlossenen Winkel. Von E. Czuber	II.	222
XXIII. Beitrag zur Trigonometrie. Von K. Zahradnik	III.	330

Mechanik.

XIX. Bewegung eines am Faden hangenden Stabes. Von R. Hoppe	III.	296
XXIII. Correctionsgewichte. Von A. Verbeek	III.	333
XXVI. Bewegung zweier durch einen elastischen Faden verbundener materieller Punkte ohne Einwirkung äusserer Kräfte. Von R. Hoppe	IV.	390
XXIX. Note über den Ausdruck für das innere Potential eines homogenen Ellipsoids. Von A. Wassmuth	IV.	448

Optik.

XI. Ueber den Weg, den ein Punkt aus einem Medium in das angrenzende in der kürzesten Zeit durch- läuft. Von Carl Bartl	II.	189
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----	-----

Physik.

XXV. Ueber ebene Stromcurven von demselben elektro- magnetischen Potential. Von A. Wassmuth . .	IV.	374
----------------------------------------------------------------------------------------------------	-----	-----

Litterarische Berichte.

CCXLV. Boncompagni (Bull. X. 7 bis 12.) Gretschel u. Wunder (Jahrb. d. Erfd.) Mansfield Merriman (Litt. kl. Quadr.) G. F. Müller (Psychophys.) Genocchi (Foncenex.) C. Meyer (Ster.) Ohlert (Ster.) Gerlach (Plan.) Mink		
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--

VI

(Kegschn.) Kambly (Plan.) Hoüel (calc. inf. I. 1.) Marsano (Wahrschk.) Günthor (Determ.) Bierens de Haan (N. Arch. III.) Catalan (N. Corr. III. 7 bis 12.) Hertzer (Zeitschr. d. V. f. Zeichenl. IV.) Brioschi (Ann. VIII.)

CCXLVI. Bruns (Fig. d. Erde.) Szczepaniak (Niv. Instr.) Vogler (graph. Taf.) Goebel (neu. Stat.) Eichhorn (Interfer.) Forster u. Fritsch (Brachytelesk.) Herz (Sonnensyst. — Marsmonde.)

CCXLVII. Grassmann (Ausd. L.) Studnička (Alg.) Sickenberger (Ar.) Eisenhuth (Dec. Br.) Schram (eb. Geom.) J. K. Becker (Geom.) Lieber u. Lühmann (Constr. Aufg.) Prediger (anal. Geom.)

CCXLVIII. Schlegel (Ar.) Oltramare (Ar.) Martus (Aufg.) Mink (beschr. Geom.) Tilser (Ikonognosie.) Mantel (Trig.) Sylvester (Amer. Journ. I.)

VII

Berichtigungen

in Teil LIX.

Seite 289 Zeile 7 v. o. erste Gleich. (56) muss lauten:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = i \sin(v + i\epsilon) \varphi' \dots$$

in Teil LXI.

Seite	Zeile	2 v. o.	statt	de facteur	setze	du facteur
373	2	„	s'annulent	„	s'annulant	
374	18	„	déclare	„	déclara	
376	3	„	et par suite	„	par suite	
	7	„	+ x	„	— x	
	18	„	2.4.5...	„	2.4.6...	
377	5	„	+ 2k log 2	„	— 2k log 2	
	17	„	dx	„	da	
378	30	„	principe je	„	principe que je	
382	18	„	demande	„	demanda	
388	13		nach Stück	„	MN	
	15		statt PM	„	PN	
391	13	„	als	„	aus	
397	3	„	$\frac{b^2}{a}$	„	$\frac{2b^2}{a}$	
402	5 v. u.	„	Ø	„	L	

Auf Taf. X. muss der Parabelzweig von *P* nach rechts oben zwischen der Tangente und dem Kreisbogen *PK* liegen.

in Teil LXII.

Seite 325 bis 328 und auf Taf. VII.

Der Name des Verfassers von XXII. ist Mancke.

Litt. Ber. CCXLVI.

Seite 16 Zeile 13 v. u. statt unentbehrlich setze entbehrlich



ms. 21

APR 30 1878

ARCHIV



der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren
Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweiundsechzigster Teil. Erstes Heft.

(Mit 1 lithographirten Tafel.)

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1878.

Verlag von Louis Nebert in Halle a/S.
Soeben erschien:

Prof. Siegm. Günther,
Studien
zur Geschichte
der
mathemat. u. physikal. Geographie.

Heft III;
Aeltere und neuere Hypothesen über die chronische Versetzung
des Erdschwerpunktes durch Wassermassen.
gr. 8. geh. 2 Mk. 40 Pf.

Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig.
(Zu beziehen durch jede Buchhandlung.)

Theorie der Wärme.

Von
J. Clerk Maxwell. M. A.
LL. D. Edin. F. R. SS. L. & F.
Ehrenmitglied des Trinity College und Professor der Experimentalphysik an der
Universität Cambridge.

Autorisirte deutsche Ausgabe.
Uebersetzt nach der vierten Auflage des Originals

von **Dr. F. Neesen,**
Privatdocent an der Universität Berlin und Docent der Physik an der
vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule.
Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. geh.
Erste Lieferung. Preis 3 Mark 20 Pf.

Principien
der
Flächentheorie.

Von
Dr. R. Hoppe,
Professor an der Universität Berlin.
gr. 8. Geh. Preis 1 Mk. 80 Pf.

Tafeln
zur
**dreissigstelligen logarithmischen
Rechnung.**

Berechnet
von
Dr. R. Hoppe,
Professor an der Universität Berlin.
gr. 8. Geh. Preis 80 Pf.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.

I.

Die Sturm'schen Functionen zweiter Gattung.

Von

Herrn Dr. Heinrich Wendlandt.

Sturm ¹⁾ bemerkt am Schlusse seiner in der Theorie der numerischen Gleichungen Epoche machenden Arbeit: „Mémoire sur la résolution des équations numériques“ im Artikel 21:

„Il existe encore un autre moyen particulier de former les fonctions auxiliaires, aussi simple que celui qui a été exposé n° 1. Quand on a deux fonctions consécutives, V_{n-1} et V_n , on peut former la suivante V_{n+1} , en divisant V_{n-1} par V_n , après avoir ordonné ces polynomes suivant les puissances croissantes de x , au lieu de les ordonner suivant les puissances décroissantes, comme on a coutume de le faire. La division donnera un quotient de la forme $p + qx$, et un reste divisible par x^2 ; en changeant les signes de tous les termes de ce reste, et le divisant par x^2 , on aura la fonction V_{n+1} , qui est ainsi liée avec V_{n-1} et V_n par la relation

$$V_{n-1} = V_n(p + qx) - V_{n+1}x^2.$$

Ainsi, pour obtenir V_{n+1} , on peut effectuer la division de V_{n-1} par V_n de deux manières différentes en ordonnant ces polynomes suivant les puissances décroissantes de x , ou suivant les puissances croissantes. La combinaison de ces deux procédés donne plusieurs systèmes de fonctions auxiliaires également propres à la résolution de l'équation $V=0$; et de là résultent aussi plusieurs systèmes de quantités dépendantes des coefficients de cette équation, dont les signes font connaître le nombre de ses racines réelles.“

Die Zahl der hier von Sturm angedeuteten Reihen seiner Hilfsfunctionen ist 2^{r-1} , wenn die Gleichung $V=0$ r von einander verschiedene Wurzeln besitzt. Zwei dieser Reste-Reihen nehmen eine ausgezeichnete Stellung ein; man findet die eine derselben, wenn man stets Divisor und Dividend nach fallenden Potenzen schreibt, die andere, wenn man stets von den nach aufsteigenden Potenzen geordneten Functionen ausgeht.

Es liegen über jene ersten Hilfsfunctionen, die man vorzüglich die „Sturm'schen Functionen“ nennt, zahlreiche durch Eleganz und Reichtum der Darstellungsweisen so interessante, wie lehrreiche Untersuchungen vor, welche Herr Hattendorf²⁾ zum weitaus grössten Theile in seiner Monographie der Sturm'schen Functionen zu einem abgerundeten Ganzen vereinigt und zugleich von der beschränkenden Voraussetzung befreit hat, dass sämtliche Wurzeln der Gleichung $V=0$ ungleich seien.

Die Uebertragung dieser Untersuchungen auf die andere bemerkenswerte Reihe der Sturm'schen Hilfsfunctionen soll den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bilden. Ich nenne diese Functionen zum Unterschiede von den gebräuchlichen Sturm'schen Functionen die „Sturm'schen Functionen zweiter Gattung.“ Herr Professor Stern hat gezeigt, dass mit ihrer Hülfe — da sie allein sich auch für transcendente Gleichungen aufstellen lassen — der Sturm'sche Satz auf transcendente Gleichungen erweitert werden kann. Diese Eigenschaft verleiht den Sturm'schen Functionen zweiter Gattung gleiches Bürgerrecht mit den gewöhnlichen Sturm'schen Functionen, trotzdem sie „bei Berücksichtigung nur der algebraischen Gleichungen schwerlich denselben vorzuziehen sein möchten.“

Litteratur:

1) Sturm: „Mémoire sur la résolution des équations numériques“ (Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences. T. 6. pag. 317.)

2) Hattendorf: „Ueber die Sturm'schen Functionen. Göttingen 1862.

1874 zweite Auflage. Hannover 1874.

3) Stern: „Ueber die Anwendung der Sturm'schen Methode auf transcendente Gleichungen“ (Crelle, Journal Bd. 33. pag. 363.)

Potenzen von x und die constanten Glieder von Null verschieden sind. Bei dieser Annahme — an der im folgenden festgehalten werden soll — ist jeder Quotient q nur eine lineare Function von x , und in der Reihe (2) der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung ist jede Function im Grade um 1 niedriger, als die unmittelbar vorhergehende und um 1 höher, als die unmittelbar folgende.

Die Reihe der Functionen ist vollzählig, das heisst, ihre Anzahl ist $r+1$, und daher ist die letzte $F_r(x)$, der grösste gemeinsame Teiler von $F(x)$ und $F'(x)$, vom Grade $m-r$, also, wenn $r=m$ ist, eine von x unabhängige Constante.

Hat die Gleichung $F(x) = 0$ nur ungleiche Wurzeln, so ist $F_r(x)$ eine von Null verschiedene Constante, also $r=m$. Die Functionen (2) besitzen dann folgende, allgemein die Sturm'schen Functionen charakterisirenden Eigenschaften.

1) Es können nicht für denselben Wert von x zwei unmittelbar folgende Functionen verschwinden; denn sonst müssten alle anderen Functionen, auch $F(x)$ und $F'(x)$, für dasselbe x zu Null werden, was der Voraussetzung, dass $F(x) = 0$ nur ungleiche Wurzeln habe, widerspricht.

2) Wird eine der mittleren Functionen, etwa $F_n(x) = 0$, so ist nach (3) für diesen Wert von x : $F_{n-1}(x) = -x^2 F_{n+1}(x)$, die einschliessenden Functionen haben also entgegengesetztes Vorzeichen. Da nun stets ein und nur ein Zeichenwechsel entsteht, einerlei ob $+$ oder $-$ zwischen zwei entgegengesetzten Zeichen eingeschaltet wird, so ändert sich die Zahl der Zeichenwechsel und der Zeichenfolgen in der Zeichenreihe der Functionen (2) nicht, wenn x stetig wachsend einen Wert passirt, für den eine oder auch mehrere der mittleren Functionen verschwinden.

3) Ist endlich x_k eine Wurzel der Gleichung $F(x) = 0$, so ist für hinreichend kleine Werte von α der Quotient $\frac{F(x_k - \alpha)}{F'(x_k - \alpha)}$ negativ, der Quotient $\frac{F(x_k + \alpha)}{F'(x_k + \alpha)}$ positiv.

Der allgemeinere Fall, dass die Gleichung $F(x) = 0$ auch gleiche Wurzeln habe, lässt sich hiernach leicht erledigen. Sind nämlich die Wurzeln $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_m$ irgend welche Wiederholungen der unter einander verschiedenen Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_r , so besitzen $F(x)$ und $F'(x)$ und also auch alle übrigen Functionen $F_2(x), F_3(x), \dots, F_r(x)$ den gemeinsamen Factor $\left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$, so dass wir setzen können

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) \cdot T(x) \\ F'(x) &= \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) \cdot T_1(x) \\ F_2(x) &= \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) \cdot T_2(x) \\ &\vdots \\ F_r(x) &= \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) \cdot T_r(x), \end{aligned}$$

wo jetzt unter $T_i(x)$ eine Constante zu verstehen ist. Die Functionen T sind durch dasselbe System von Gleichungen (3) verbunden, wie die F , und daher haben sie auch die in den Sätzen 1) und 2) ausgesprochenen Eigenschaften. Ist ferner α_k eine ε_k -fache Wurzel von $F(x) = 0$, also etwa $F(x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha_k}\right)^{\varepsilon_k} f(x)$, so findet man

$$\frac{T(x)}{T_1(x)} = \frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{1 - \frac{x}{x_k}}{-\frac{\varepsilon_k}{x_k} + \left(1 - \frac{x}{x_k}\right) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

oder für $x = x_k + \alpha$

$$\frac{T(x_k \pm \alpha)}{T_1(x_k \pm \alpha)} = \frac{F(x_k \pm \alpha)}{F'(x_k \pm \alpha)} = \frac{\mp \alpha}{-\varepsilon_k \mp \alpha \frac{f'(x_k \pm \alpha)}{f'(x_k + \alpha)}}$$

Diese Gleichung zeigt endlich, dass auch $\frac{T}{T_1}$ negativ für $x=x_k-\alpha$ und positiv für $x=x_k+\alpha$ ist, wenn man α hinreichend kleine Werte beilegt.

Die Zeichenreihe der Functionen $F, F', F_2 \dots F_r$ stimmt aber in der Zahl der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen mit der der Functionen $T, T_1, T_2 \dots T_r$ überein, da der gemeinschaftliche Factor $\left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$ die Zeichen nicht ändert, wenn er positiv ist, sie alle in die entgegengesetzten verwandelt, wenn er negativ ist. Wir können uns daher stets an die Zeichenreihe der Functionen $F, F', F_2 \dots F_r$ halten, einerlei ob die Gleichung $F(x) = 0$ nur ungleiche oder auch mehrfache Wurzeln besitzt.

Es ergibt sich also allgemein dies Resultat:

„Die Zeichenreihe der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung $FF'F_2 \dots F_r$ verliert stets dann und nur dann einen Zeichenwechsel,

wenn die Variable von kleineren zu grösseren Werten übergehend einen Wurzelwert der Gleichung $F(x) = 0$ passirt.“

und als eine einfache Folge desselben der Sturm'sche Satz:

„Es liegen so viele verschiedene Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ zwischen den reellen Grenzen a und b ($a < b$), als die Zeichenreihe der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung für $x = b$ Zeichenwechsel weniger enthält, denn für $x = a$.“

Für den Fall, dass die Gleichung $F(x) = 0$ gleiche Wurzeln besitzt, bleibt noch zu ermitteln, wie vielfach eine aufgefundenе Wurzel derselben x_k ist. Setzen wir $T(x) = \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)t(x)$ und $\frac{dT(x)}{dx} = T'(x)$ so ist

$$\frac{T(x)}{T'(x)} = \frac{\left(1 - \frac{x}{x_k}\right)}{-\frac{1}{x_k} + \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)\frac{t'(x)}{t(x)}}$$

Man dividire diesen Wert von $\frac{T(x)}{T'(x)}$ durch den oben ermittelten Wert von $\frac{T(x)}{T'(x)}$; es wird

$$\frac{T_1(x)}{T'(x)} = \frac{-\frac{\varepsilon_k}{x_k} + \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x_k} + \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)\frac{t'(x)}{t(x)}}$$

also

$$(4) \quad \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} = \varepsilon_k.$$

Um die Zahl der verschiedenen Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ überhaupt zu bestimmen, muss man die Zeichenreihen für $x = +\infty$ und $x = -\infty$ bilden; in diesen beiden Zeichenreihen haben aber die Functionen dasselbe Zeichen, welche mit einer geraden, die das entgegengesetzte Zeichen, welche mit einer ungeraden Potenz von x beginnen.

Im vorliegenden Falle ist die Zahl der Functionen F, F', F_2, \dots, F_r vollzählig, ihr Grad also abwechselnd gerade und ungerade; daher werden die Functionen abwechselnd ihr Zeichen behalten und verändern, das heisst, einer Zeichenfolge in $(-\infty)$ entspricht ein Zeichenwechsel in $(+\infty)$ und umgekehrt. Enthält nun die Zeichenreihe $(+\infty)$ i Zeichenwechsel, mithin $m - i$ Zeichenfolgen, so bietet die Zeichenreihe $(-\infty)$ $m - i$ Zeichenwechsel und i Zeichenfolgen dar;

die Gleichung $F(x) = 0$ hat $m - 2i$ reelle und $2i$ complexe verschiedene Wurzeln. So ergibt sich der Satz:

„Die Gleichung $F(x) = 0$ hat soviel verschiedene Paare complexer Wurzeln, als die Reihe der letzten Coefficienten der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung Zeichenwechsel enthält.“

und als einfache Folgen desselben die weiteren Sätze:

1) „Die Reihe der letzten Coefficienten der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung kann höchstens $\frac{r}{2}$ Zeichenwechsel haben.“

und

2) „Die Gleichung $F(x) = 0$ hat nur reelle Wurzeln, wenn die letzten Coefficienten der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung sämtlich positiv sind.“

Die erste und zweite der oben von den Functionen $F_n(x)$ nachgewiesenen Eigenschaften bestehen noch fort, wenn statt $F'(x)$ als erster Divisor irgend eine ganze Function $(m-1)$ ten Grades $F_1(x)$ verwendet wird; es ist nur vorauszusetzen, dass $F_1(x)$ mit $F(x)$ keinen gemeinsamen Factor habe, wenn alle Wurzeln von $F(x) = 0$ ungleich sind, — dass der grösste gemeinsame Factor von $F_1(x)$ und $F(x)$ aber $= \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$ ist, wenn die Wurzeln $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_m$ Wiederholungen der von einander verschiedenen Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_r sind. Stimmt ausserdem für alle reellen Wurzelwerte von $F(x) = 0$ $F_1(x)$ mit $F'(x)$ im Vorzeichen überein, so besitzen F und F_1 auch die in 3. angegebene Eigenschaft, und es bleibt daher für die aus F und F_1 abgeleiteten Sturm'schen Functionen zweiter Gattung der Sturm'sche Satz gültig ¹⁾.

Die wirkliche Herstellung der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung durch wiederholte Division nach dem Schema (3) würde sehr mühselig sein. Man bedient sich zweckmässiger folgenden einfachen Verfahrens ²⁾, welches Herr Prof. Stern in seiner Vorlesung „Die Theorie der numerischen Gleichungen“ zu entwickeln pflegt.

Es sei

$$F(x) = a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + \dots + a_{0m}x^m \text{ und}$$

$$F_1(x) = a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + \dots + a_{1m-1}x^{m-1},$$

so wird der Quotient

$$q_1 = \frac{a_{00}}{a_{10}} + \frac{a_{01}a_{10} - a_{00}a_{11}}{a_{10}^2}x,$$

und es kann, wie eine leichte Rechnung zeigt, $F_2(x)$ in die Form ³⁾ gesetzt werden

$$F_2(x) = \frac{1}{a_{10}^2} \begin{vmatrix} a_{00} & 0 & a_{10} \\ a_{01} & a_{10} & a_{11} \\ a_{02} & a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} + \frac{1}{a_{10}^2} \begin{vmatrix} a_{00} & 0 & a_{10} \\ a_{01} & a_{10} & a_{11} \\ a_{03} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \cdot x + \dots$$

$$+ \frac{1}{a_{10}^2} \begin{vmatrix} a_{00} & 0 & a_{10} \\ a_{01} & a_{10} & a_{11} \\ a_{0n+2} & a_{1n+1} & a_{1n+2} \end{vmatrix} \cdot x^n + \dots + \frac{1}{a_{10}^2} \begin{vmatrix} a_{00} & 0 & a_{10} \\ a_{01} & a_{10} & a_{11} \\ a_{0m} & a_{1m-1} & 0 \end{vmatrix} \cdot x^{m-2}.$$

Das Vorzeichen von $F_2(x)$, welches uns allein interessirt, wird durch den allen Coefficienten gemeinsamen, wesentlich positiven Factor $\frac{1}{a_{10}^2}$ nicht beeinflusst; wir dürfen ihn daher unterdrücken und für $F_2(x)$ schreiben

$$F_2(x) = \sum_{0, m-2}^n \begin{vmatrix} a_{00} & 0 & a_{10} \\ a_{01} & a_{10} & a_{11} \\ a_{0n+2} & a_{1n+1} & a_{1n+2} \end{vmatrix} \cdot x^n$$

oder

$$F_2(x) = \sum_{0, m-2}^n \{(a_{00}a_{10}) \cdot a_{1n+2} + (a_{01}a_{10} - a_{00}a_{11}) \cdot a_{1n+1} + (-a_{10}^2) \cdot a_{0n+2}\} x^n,$$

also, wenn mit A, B, C die Grössen bezeichnet werden

$$A = a_{00} a_{10},$$

$$B = a_{01} a_{10} - a_{00} a_{11},$$

$$C = -a_{10}^2,$$

$$(5) \quad F_2(x) = \sum_{0, m-2}^n \{A \cdot a_{1n+2} + B \cdot a_{1n+1} + C \cdot a_{0n+2}\} x^n.$$

Diese Gleichung giebt die Regel für die Bildung der Coefficienten von $F_2(x)$ an:

„Man erhält den Coefficienten von x^n der Sturm'schen Function zweiter Gattung $F_2(x)$, wenn man die Grössen A, B und C beziehentlich mit a_{1n+2}, a_{1n+1} und a_{0n+2} multiplicirt und die Summe dieser Producte bildet.“

Es werde danach

$$F_2(x) = a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2 + \dots + a_{2m-2}x^{m-2}$$

gesetzt, so ergibt sich ganz ebenso, wie in Gleichung (5) $F_2(x)$ dargestellt wird, dass

$$F_2(x) = \sum_{0, m-3}^n \{A' \cdot a_{2n+2} + B' \cdot a_{2n+1} + C' \cdot a_{1n+2}\} x^n$$

zu setzen ist, wenn

$$\begin{aligned} A' &= a_{10} a_{20} \\ B' &= a_{11} a_{20} - a_{10} a_{21} \\ C' &= -a_{20}^2 \end{aligned}$$

ist. Es mag dies genügen, um das allgemeine Schema zu veranschaulichen, nach welchem die Coefficienten aller Sturm'schen Functionen zweiter Gattung aus den bekannten Coefficienten von $F(x)$ und $F_1(x)$ allein durch die Operationen des Multiplicirens und Addirens gefunden werden.

Litteratur:

1) Die in der Einleitung pag. 41. angeführte Abhandlung von Sturm enthält alle vorstehenden Sätze, bezogen auf die „Sturm'schen Functionen.“

2) vergl. Leeseckamp „Ueber die Theorie der algebraischen Gleichungen mit complexen Wurzeln.“ Göttingen 1867. Der Verfasser erwähnt weder bei diesem Verfahren, noch in den §§ 4—7, 8 erste Hälfte und 9—11, dass der Inhalt derselben der erwähnten Vorlesung des Herrn Prof. Stern entnommen ist.

Ein anderes Verfahren für die praktische Berechnung schlägt Heilermann vor: „Ueber die Reste, welche bei der Anwendung des Sturm'schen Satzes vorkommen.“ (Crelle. Bd. 43. pag. 43. 1852.). Die Ableitung dieser Methode ist sehr umständlich, und sie selbst dürfte in der leichten Handhabung wohl kaum die oben mitgeteilte Methode übertreffen.

3) Diese Form des Restes giebt auch Sylvester: „On a Theory of the Syzygetic relations of two rational integral functions“ (Philosophical Transactions of the Royal Society of London. June 1853.) im art. 3. pag. 418.

Ich bemerke hier ein für allemal, dass die litterarischen Nachweise sich stets auf die entsprechenden Untersuchungen über die „Sturm'schen Functionen“ beziehen.

§ 2.

Es soll an der Annahme festgehalten werden, dass die Wurzeln $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_m$ irgend welche Wiederholungen der unter einander verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_r$ bilden; der besondere Fall, dass $F(x)$ nur ungleiche Wurzeln besitzt, leitet sich hieraus ab, wenn man $r = m$ setzt. Wir wählen zum ersten Divisor

$$F_1(x) = \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) \cdot T_1(x)$$

und verstehen unter $T_1(x)$ einstweilen eine beliebige ganze Function $(r-1)$ ten Grades, die jedoch mit $F(x)$ keinen gemeinsamen Factor haben darf.

Das System (3) giebt diese Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{F_1(x)} &= q_1 - \frac{x^2}{\left(\frac{F_1(x)}{F_2(x)}\right)} \\ \frac{F_1(x)}{F_2(x)} &= q_2 - \frac{x^2}{\left(\frac{F_2(x)}{F_3(x)}\right)} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{F_{r-2}(x)}{F_{r-1}(x)} &= q_{r-1} - \frac{x^2}{\left(\frac{F_{r-1}(x)}{F_r(x)}\right)} \\ \frac{F_{r-1}(x)}{F_r(x)} &= q_r,\end{aligned}$$

aus denen sich der Sturm'sche Kettenbruch zweiter Gattung zusammensetzt

$$(6) \quad \frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{T(x)}{T_1(x)} = q_1 - \frac{x^2}{q_2} - \frac{x^2}{q_3} - \dots - \frac{x^2}{q_r}, \quad (r \leq m),$$

oder mit Zuhilfenahme der Stern'schen Bezeichnungsweise ¹⁾

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{T(x)}{T_1(x)} = f(q_1 q_r).$$

Zugleich sieht man, dass

$$\frac{T}{T_1} = \frac{q_1 q_r}{q_2 q_r}; \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{q_2 q_r}{q_3 q_r}; \quad \dots \quad \frac{T_n}{T_{n+1}} = \frac{q_{n+1} q_r}{q_{n+2} q_r}; \quad \dots \quad \frac{T_{r-1}}{T_r} = q_r$$

und folglich

$$(7) \quad \frac{T}{T_r} = q_1 q_r; \quad \frac{T_1}{T_r} = q_2 q_r; \quad \dots \quad \frac{T_n}{T_r} = q_{n+1} q_r; \quad \dots \quad \frac{T_{r-1}}{T_r} = q_r$$

ist. Es besteht aber allgemein die Relation $q_n q_r = q_r q_n$ und daher folgt aus (7)

$$(8) \quad \frac{T}{T_r} = q_r q_1; \quad \frac{T_1}{T_r} = q_r q_2; \quad \dots \quad \frac{T_n}{T_r} = q_r q_{n+1}; \quad \dots \quad \frac{T_{r-1}}{T_r} = q_r.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Verhältnisse der bei der Entwicklung des Kettenbruchs $f(q_1 q_r)$ auftretenden Reste zu dem letzten unter ihnen d. i. der Functionen $-T, -T_1, -T_2, \dots -T_r$ zu der Constanten $-T_r$ gleich sind den Zählern der Näherungswerte von $f(q_r q_1)$, diese in umgekehrter Folge genommen.

Die Division durch die Constante T_r beeinflusst die Zahl der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen in der Zeichenreihe von $T, T_1, T_2, \dots T_r$ nicht, daher der Satz

1) „Die Zähler der Näherungswerte von $f(q_r q_1)$: $q_r q_1; q_r q_2; \dots q_r q_{r-1}; q_r; 1$ sind der Reihe $T, T_1, T_2, \dots T_r$, also nach § 1. auch der Reihe $F, F_1, F_2, \dots F_r$ äquivalent, d. h. beide weisen für denselben reellen Wert von x die gleiche Zahl von Zeichenwechseln auf.“

Die Coefficienten α_n, β_n des Quotienten q_n nehmen um so complicirtere Werte an, je grösser n wird; es ist deshalb für die praktische Berechnung von Bedeutung, dass der so eben für die Zähler der Näherungswerte von $f(q_r q_1)$ bewiesene Satz auch für die Zähler der Näherungswerte von $f(q_1 q_r)$ gültig ist. Man sieht zunächst aus den Gleichungen, welche den Zusammenhang zwischen den Zählern der Näherungswerte von $f(q_1 q_r)$ ausdrücken,

$$\begin{aligned} q_1 q_1 &= q_1 \\ q_1 q_2 &= q_2 \cdot q_1 q_1 - x^2 \\ q_1 q_3 &= q_3 \cdot q_1 q_2 - x^2 \cdot q_1 q_1 \\ &\dots \dots \dots \\ q_1 q_{n+1} &= q_{n+1} \cdot q_1 q_n - x^2 \cdot q_1 q_{n-1} \\ &\dots \dots \dots \\ q_1 q_r &= q_r \cdot q_1 q_{r-1} - x^2 \cdot q_1 q_{r-2}, \end{aligned}$$

dass die erste und zweite der für Sturm'sche Functionen charakteristischen Eigenschaften auch von der Functionenreihe

$$q_1 q_r; q_2 q_r; \dots q_1 q_2; q_1; 1$$

gelten. Ferner hat die Gleichung $q_1 q_r = 0$ dieselben Wurzeln wie $F(x) = 0$, da beide Functionen $q_1 q_r$ und $T(x)$ sich nach Gleichung (7) nur durch den constanten Factor T_r unterscheiden, und endlich ist in Folge der Relation

$$q_1 q_n \cdot q_2 q_{n-1} - q_2 q_n \cdot q_1 q_{n-1} = -x^{2(n-1)}$$

auch

$$\frac{F}{F_1} = \frac{T}{T_1} = \frac{q_1 q_r}{q_2 q_r} = \frac{q_1 q_{r-1} \cdot q_1 q_r}{q_1 q_{r-1} \cdot q_2 q_r} = \frac{q_1 q_{r-1} \cdot q_1 q_r}{x^{2(r-1)} + q_1 q_r \cdot q_2 q_{r-1}}.$$

Diese Gleichung zeigt aber, dass das Product $q_1 q_{r-1} \cdot q_1 q_r$ und somit

auch der Quotient $\frac{q_1 q_r}{q_1 q_{r-1}}$ in der Nähe eines Wurzelwertes von $q_1 q_r = 0$ (oder $T = 0$) im Vorzeichen mit $\frac{F}{F_1}$ übereinstimmt. (Der Wurzelwert $x = 0$ ist durch die Voraussetzungen im § 1. ausgeschlossen).

Wir erhalten hiernach den Satz:

2) „Die Zeichenreihe der Functionen $q_1 q_r; q_1 q_{r-1}; \dots q_1 q_2; q_1; 1$ ist der Zeichenreihe der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung $F, F_1, \dots F_r$ äquivalent.“

Hat also $F_1(x)$ für alle reellen Wurzelwerte von $F(x) = 0$ mit $F'(x)$ gleiches Vorzeichen, so gilt von den Zählern der Näherungswerte des Kettenbruchs $f(q_1 q_r)$:

$$(9) \quad 1; \quad q_1; \quad q_1 q_2; \quad \dots q_1 q_r$$

der Sturm'sche Satz ²⁾.

Aus Satz 1) und 2) zieht man mit Sylvester ³⁾ den interessanten Schluss, dass die Zähler der Näherungswerte von $f(q_1 q_r)$ und $f(q_r q_1)$ äquivalente Zeichenreihen liefern.

Für die Zeichenreihe $x = +\infty$ kommt nur das Glied, welches die höchste Potenz von x enthält, in Betracht. Der Coefficient desselben in $q_1 q_n$ ist gleich dem Zähler des Kettenbruchs

$$\beta_1 - \frac{1}{\beta_2 - \frac{1}{\beta_3 - \dots - \frac{1}{\beta_n}}}$$

und wird daher nach dieser Regel gefunden: „Man lasse aus dem Producte $\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 \dots \beta_n$ irgend ein Paar oder eine Anzahl Paare auf einander folgender Grössen $\beta_i \cdot \beta_{i+1}$ fort und bilde die Summe der so erhaltenen Glieder, nachdem man diejenigen mit negativem Zeichen versehen hat, welche durch Weglassung einer ungeraden Zahl von Paaren $\beta_i \cdot \beta_{i+1}$ entstanden sind.“

Dieselbe Summe von Gliedern wird aber auch durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \beta_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \beta_3 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_n \end{vmatrix}$$

dargestellt, so dass wir den Satz aussprechen können:

„Die Gleichung $F(x) = 0$ besitzt so viele verschiedene Paare complexer Wurzeln, als in der Reihe der Derminanten

$$1; \beta_1; \begin{vmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 & \beta_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \beta_1 & 1 & 0 \\ 1 & \beta_2 & 1 \\ 0 & 1 & \beta_3 \end{vmatrix}; \dots \begin{vmatrix} \beta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \beta_2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \beta_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_r \end{vmatrix}$$

Zeichenwechsel vorkommen.“

Da diese Ausdrücke für die höchsten Coefficienten weit complicirter sind, als bei dem gewöhnlichen Sturm'schen Kettenbruch $q_1 - \frac{1}{q_2} - \dots$, so kann die merkwürdige Tatsache ³⁾, dass höchstens die Hälfte der Coefficienten $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ negativ sein kann, für den Sturm'schen Kettenbruch zweiter Gattung nicht gefolgert werden.

Hier ist die Zeichenreihe $x = 0$ die einfachere; für $x = 0$ reducirt sich $q_1 q_n$ auf die Constante $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \dots \alpha_n$. Die Zeichenreihe ($x = 0$) ist daher die der Producte

$$1; \alpha_1; \alpha_1 \cdot \alpha_2; \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3; \dots \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \dots \alpha_r,$$

sie enthält also eben so viele Zeichenwechsel, als unter den Coefficienten

$$1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_r$$

negative vorkommen, eben so viele Zeichenfolgen, als positive.

Dieselben Erwägungen, durch welche man die Regel des Cartesius als eine Folge des Fourier'schen Satzes erweist, führen bei dem Sturm'schen Satze zu dem entsprechendem Ergebnisse:

„Es hat die Gleichung $F(x) = 0$ höchstens so viele verschiedene reelle positive Wurzeln, als Zeichenwechsel und höchstens so viele verschiedene reelle negative Wurzeln, als Zeichenfolgen in der Reihe der constanten Glieder der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung und der diesen äquivalenten Functionen auftreten.“

Insbesondere ist also die Zahl der verschiedenen positiven Wurzeln von $F(x)$ nicht grösser, als die der negativen Grössen, die Zahl der verschiedenen negativen Wurzeln nicht grösser, als die der positiven Grössen in der Reihe $1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_r$.

Die Functionen $F_2, F_3, \dots F_r$ lassen sich sämmtlich durch F und F_1 und die Näherungswerte des Sturm'schen Kettenbruchs zweiter Gattung ausdrücken ³⁾. Substituirt man in die Gleichung

$$q_1 q_n \cdot q_2 q_{n-1} - q_2 q_n \cdot q_1 q_{n-1} = -x^{2(n-1)}$$

für $q_1 q_n$ und $q_2 q_n$ aus (7) die Werte $\frac{T}{T_n}$ und $\frac{T_1}{T_n}$, so erhält man die Gleichung

$$(10^*) \quad x^{2(n-1)} T_n(x) = T_1(x) \cdot q_1 q_{n-1} - T(x) \cdot q_2 q_{n-1}$$

oder

$$(10) \quad x^{2(n-1)} F_n(x) = F_1(x) \cdot q_1 q_{n-1} - F(x) \cdot q_2 q_{n-1}.$$

Ehe wir zu den weiteren Untersuchungen übergehen, welche sich an die Fundamentalformel (10) anschliessen, soll noch gezeigt werden, welche Modificationen die aufgestellten Sätze erleiden, wenn bei der Kettenbruchentwicklung von $\frac{F(x)}{F_1(x)}$ jeder Rest mit unverändertem Zeichen genommen wird ³⁾. Die Gleichungen (3) werden dann durch folgende ersetzt

$$F_2(x) = Q_1 \cdot F_1(x) + x^2 \cdot R_2$$

$$F_1(x) = Q_2 \cdot R_2 + x^2 \cdot R_3$$

$$R_2 = Q_3 \cdot R_3 + x^2 \cdot R_4$$

$$\dots \dots \dots$$

$$R_{n-1} = Q_n \cdot R_n + x^2 \cdot R_{n+1}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$R_{r-1} = Q_r \cdot R_r$$

Die Quotienten Q sind wieder lineare Functionen von x , und allgemein ist der Rest R_n vom Grade $r-n$. Vergleicht man dies neue System von Gleichungen mit dem früheren (3), so ergeben sich die Beziehungen

$$q_1 = +Q_1; \quad R_2 = -F_2$$

$$q_2 = -Q_2; \quad R_3 = -F_3$$

$$q_3 = +Q_3; \quad R_4 = +F_4$$

$$q_4 = -Q_4; \quad R_5 = +F_5$$

$$q_5 = +Q_5; \quad R_6 = -F_6$$

allgemein

$$q_n = (-1)^{n-1} \cdot Q_n; \quad R_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot F_n(x).$$

Entwickelt man also $\frac{F(x)}{F_1(x)}$ auf dem gewöhnlichen Wege in einen Kettenbruch

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} = Q_1 + \frac{1}{Q_2 + \dots + \frac{1}{Q_r}} \quad (r \leq m)$$

und bezeichnet die auftretenden Reste mit $R_2, R_3 \dots R_n$, so erhält man die Sturm'sche Function zweiter Gattung $F_n(x)$, wenn man den Rest R_n mit $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ — den Sturm'schen Theilnenner zweiter Gattung q_n , wenn man Q_n mit $(-1)^{n-1}$ multiplicirt.

Wir halten uns im Folgenden an den Sturm'schen Kettenbruch zweiter Gattung.

Litteratur.

1) vergl. Stern „Theorie der Kettenbrüche“ (Crelle Bd. 10. 1833. pag. 1 ff.); in den §§ 3, 4, 6, 8 und 9 findet man die weiterhin benutzten Relationen, welche für den allgemeinen Kettenbruch

$$q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3 + \dots + \frac{p_r}{q_r}}}$$

gelten,

$$q_1 q_n = q_n \cdot q_1 q_{n-1} + p_n \cdot q_1 q_{n-2},$$

$$q_2 q_n = q_n \cdot q_2 q_{n-1} + p_n \cdot q_2 q_{n-2},$$

$$q_r q_n = q_n q_r,$$

$$q_1 q_n \cdot q_2 q_{n-1} - q_1 q_{n-1} \cdot q_2 q_n = (-1)^n \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_n.$$

2) Sturm: „Démonstration d'un Théorème d'algèbre de M. Sylvester“ (Liouville: Journal. T. 7. pag. 356).

3) Sylvester: „On a remarkable Modification of Sturm's Theorem“ (Philosophical Magazine June 1853. pag. 446. July 1853. pag. 14).

§ 3.

Aus der Gleichung (10) ersieht man, dass sich stets drei ganze Functionen von x $\vartheta_{m-n}(x)$, $\varphi_{n-1}(x)$ und $\psi_{n-2}(x)$ bez. vom Grade $m-n$, $n-1$ und $n-2$ so bestimmen lassen, dass sie der Functionalgleichung

$$(11) \quad x^{2(n-1)} \vartheta_{m-n}(x) = F_1(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) - F(x) \cdot \psi_{n-2}(x)$$

Genüge leisten; man hat nur nötig,

$$(12) \quad \vartheta_{m-n} = \lambda_{n-1} \cdot F_n(x); \quad \varphi_{n-1} = \lambda_{n-1} \cdot q_1 q_{n-1}; \quad \psi_{n-2} = \lambda_{n-1} \cdot q_1 q_{n-2}$$

zu setzen, wo mit λ_{n-1} eine constante Grösse bezeichnet wird.

Es lässt sich aber weiter zeigen¹⁾, dass die Gleichung (11) nur diese eine Lösung besitzt; man erhält nämlich durch Elimination von $F_1(x)$ aus (10) und (11):

$$x^{2(n-1)}\{F_n(x) \cdot \varphi_{n-1} - \theta_{n-n} \cdot q_1 q_{n-1}\} = F(x)\{\psi_{n-2} \cdot q_1 q_{n-1} - \varphi_{n-1} \cdot q_2 q_{n-1}\}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist teilbar durch $x^{2(n-1)}$, die rechte enthält dagegen höchstens den Factor x^{2n-3} , da $F(x)$ nach Voraussetzung (§ 1.) nicht durch x oder eine höhere Potenz von x teilbar und der Klammerausdruck rechts nur vom Grade $2n-3$ ist. Es müssen also notwendig beide Seiten der letzten Gleichung $= 0$ sein, und daraus ergibt sich der in den Gleichungen (12) ausgedrückte Satz, dass die Functionen θ , φ und ψ sich bez. von $F_n(x)$, $q_1 q_{n-1}$ und $q_2 q_{n-1}$ nur durch ein und denselben constanten Factor unterscheiden können.

Der gemeinsame Factor von $F(x)$ und $F_1(x)$

$$\left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$$

ist, wie die Gleichung (11) zeigt, auch ein Factor von θ_{m-n} ; wir setzen daher

$$\theta_{m-n}(x) = \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) \cdot \theta_{r-n}(x)$$

und haben dann statt (11) die reducirte Gleichung zu lösen

$$(11^*) \quad x^{2(n-1)} \theta_{r-n}(x) = T_1(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) - T(x) \cdot \psi_{n-2}(x)$$

Dieses ist entsprechend der Gleichung (10*) nur gültig für $n=2, 3, \dots, r+1$, wenn man für $n=r+1$, θ_{r-n} gleich Null setzt; sie verliert ihre Bedeutung für $n=0$ und $n=1$.

Wir nehmen

$$\theta_r(x) \dots T(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

und

$$\theta_{r-1}(x) = T_1(x).$$

Die Partialbruchzerlegung des Quotienten $\frac{T_1(x)}{T(x)}$ liefert die Formel

$$\frac{T_1(x)}{T(x)} = - \sum \frac{T_1(x_1)}{x_1 T'(x_1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}},$$

in welcher der erste Partialbruch als Bildungstypus für die übrigen hinter das Summenzeichen geschrieben ist. Bezeichnen wir den Quo-

tienten $\frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)}$ zur Abkürzung mit ε_k

$$4^*) \quad \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} = \varepsilon_k$$

so wird

$$(13) \quad \Theta_{r-1}(x) = T_1(x) = - \sum \frac{\varepsilon_1}{x_1} \cdot \frac{T(x)}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)} \\ = - \sum \frac{\varepsilon_1}{x_1} \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \left(1 - \frac{x}{x_3}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

Wir setzen ferner nach Analogie mit den Sylvester'schen Functionen²⁾, nur x_k mit $\frac{1}{x_k}$, ε_k mit $\frac{\varepsilon_k}{x_k}$ vertauschend,

$$\Theta_{r-2}(x) = (-1)^2 \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{x_1 x_2} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{x_3}\right) \left(1 - \frac{x}{x_4}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right).$$

$$\Theta_{r-3}(x) = (-1)^3 \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{x_1 x_2 x_3} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \frac{1}{x_3}\right)^3 \left(1 - \frac{x}{x_4}\right) \left(1 - \frac{x}{x_5}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

und allgemein

$$(14) \quad \Theta_{r-n}(x) = (-1)^n \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{x_{n+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{n+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

Hier ist $\delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n}\right)$ das Product der sämtlichen Differenzen von je zwei der Grössen $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$ und das Summenzeichen bezieht sich auf alle Combinationsformen der n ten Classe aus den Elementen 1, 2, ... r .

Entsprechend der Formel (14) setzen wir

$$(15) \quad \varphi_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \times \\ \times \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_{n-1}}\right)$$

besonders auch mit Rücksicht darauf, dass, wie bei den Sylvester'schen Functionen die Coefficienten der höchsten Potenzen von x in Θ_{r-n} und φ_n , so hier die constanten Glieder von Θ_{r-n} und φ_n dieselben Werte haben.

Es lässt sich nun zeigen, dass unter Zugrundelegung der Werte (14) und (15) für Θ und φ die Differenz $x^{2(n-1)}\Theta_{r-n}(x) - T_1(x) \cdot \varphi_{n-1}(x)$ durch $T(x)$ teilbar ist; hierzu genügt aber der Nachweis, dass jene Differenz für irgend einen Wurzelwert von $F(x) = 0$, etwa für $x = x_1$ verschwindet, da sie eine symmetrische Function der Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_r darstellt. Man findet

$$\left\{ \begin{aligned} T_1(x_1) &= -\frac{\varepsilon_1}{x_1} \left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x_1}{x_r}\right) \\ \varphi_{n-1}(x_1) &= (-1)^{n-1} \sum \frac{\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_2 \dots x_n} \cdot \delta \left(\frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x_1}{x_n}\right) \end{aligned} \right.$$

und

$$\begin{aligned} \Theta_{r-n}(x_1) &= (-1)^n \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \cdot \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \left(1 - \frac{x_1}{x_{n+1}}\right) \dots \left(1 - \frac{x_1}{x_r}\right) \\ &= (-1)^n \frac{\varepsilon_1}{x_1} \frac{\left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x_1}{x_r}\right)}{x_1^{2(n-1)}} \sum \frac{\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_2 \dots x_n} \times \\ &\quad \times \delta \left(\frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x_1}{x_n}\right), \end{aligned}$$

daher, $x_1^{2(n-1)} \Theta_{r-n}(x_1) = T_1(x_1) \cdot \varphi_{n-1}(x_1)$ w. z. b. w.

Es ist also $\frac{x^{2(n-1)} \cdot \Theta_{r-n}(x) - T_1(x) \cdot \varphi_{n-1}(x)}{T(x)}$ eine ganze Function und zwar $(n-2)$ ten Grades; damit ist aber bewiesen, dass die Ausdrücke (14) und (15) die Gleichung (11*) befriedigen.

Man bemerke, dass, wenn die Wurzeln $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ Wiederholungen der unter einander verschiedenen Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_r sind, und nur unter dieser Voraussetzung, für solche Werte von n , welche $> r$ sind, die Ausdrücke für Θ_{r-n} und φ_n identisch $= 0$ werden. Umgekehrt zeigt also das Verschwinden der letzten oder mehrerer der letzten Functionen ϑ und φ das Vorhandensein gleicher Wurzeln an.

Die Werte (14) und (15) für die Functionen ϑ und φ , welche wir die Sylvester'schen Functionen zweiter Gattung nennen wollen, kann man noch in eine andere Form setzen, wenn man beachtet, dass

$$\delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(x_1 x_2 \dots x_n)^{2(n-1)}} \delta(x_1 x_2 \dots x_n)$$

ist. So findet man leicht

$$\begin{aligned} (14^*) \quad \frac{\Theta_{r-n}(x)}{T(x)} &= \frac{\Theta_{n-n}(x)}{F(x)} \\ &= (-1)^n \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_n}\right)} \\ &= \sum \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \frac{\delta(x_1 x_2 \dots x_n)^2}{(x_1 x_2 \dots x_n)^{2(n-1)}} \cdot \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)} \end{aligned}$$

(15*)

$$\varphi_{n-1}(x) = \sum \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} \frac{\delta(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^2}{(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{2(n-1)}} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_{n-1}).$$

Es bedarf zur Lösung der Aufgabe, $F_n(x)$ und $q_1 q_{n-1}$ selbst durch die Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ darzustellen, noch der Bestimmung des constanten Factors λ_{n-1} . Man erhält zunächst, wenn man aus den beiden Gleichungen

$$x^{2(n-1)} \cdot \vartheta_{m-n}(x) = F_1(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) - F(x) \cdot \psi_{n-2}(x)$$

$$x^{2n} \cdot \vartheta_{m-n-1}(x) = F_1(x) \cdot \varphi_n(x) - F(x) \cdot \psi_{n-1}(x)$$

die Function $F_1(x)$ eliminiert und auf der rechten Seite des Resultates für φ und ψ ihre Werte aus (12) substituirt,

$$\begin{aligned} x^{2(n-1)} \{ \vartheta_{m-n}(x) \cdot \varphi_n(x) - x^2 \cdot \vartheta_{m-n-1}(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) \} \\ = F(x) \cdot \lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \{ q_1 q_{n-1} \cdot q_2 q_n - q_1 q_n \cdot q_2 q_{n-1} \} \end{aligned}$$

oder nach einer schon im § 2. benutzten Formel aus der Theorie der Kettenbrüche

$$x^{2(n-1)} \{ \vartheta_{m-n}(x) \cdot \varphi_n(x) - x^2 \cdot \vartheta_{m-n-1}(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) \} = F(x) \cdot \lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \cdot x^{2(n-1)}$$

Heben wir den Factor $x^{2(n-1)}$, und setzen $x=0$, so reducirt sich $F(x)$ auf das constante Glied $a_0 = 1$, und wir erhalten

$$\lambda_n \cdot \lambda_{n-1} = \vartheta_{m-n}(0) \cdot \varphi_n(0)$$

oder

$$(16) \quad \lambda_n \cdot \lambda_{n-1} = \xi_n^2,$$

wenn die Constante

$$\vartheta_{m-n}(0) = \varphi_n(0) = (-1)^n \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \cdot \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2$$

mit ξ_n bezeichnet wird. Die Recursionsformel (16) gestattet, λ_n durch die Grössen $\xi_n, \xi_{n-1}, \dots, \xi_1$ und λ_0 auszudrücken; nach Gleichung (13)

ist aber $\xi_1 = -\sum \frac{\varepsilon_1}{x_1}$ und $\vartheta_{m-1}(x) = F_1(x)$, also $\lambda_0 = 1$, daher

$$\lambda_1 = \xi_1^2 = \left(-\sum \frac{\varepsilon_1}{x_1} \right)^2$$

$$\lambda_2 = \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2}; \quad \lambda_3 = \frac{\xi_1^2 \xi_3^2}{\xi_2^2}$$

und allgemein ²⁾

$$(17) \quad \lambda_{2n} = \frac{\xi_2^2 \cdot \xi_4^2 \dots \xi_{2n}^2}{\xi_1^2 \cdot \xi_3^2 \dots \xi_{2n-1}^2}; \quad \lambda_{2n+1} = \frac{\xi_1^2 \cdot \xi_3^2 \cdot \xi_5^2 \dots \xi_{2n+1}^2}{\xi_2^2 \cdot \xi_4^2 \dots \xi_{2n}^2}.$$

Da die Coefficienten von $F(x)$ reell sind, so sind auch die Grössen ξ reell; denn sie sind rationale symmetrische Functionen der Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_r und demnach auch rationale Functionen der Coefficienten von $F(x)$.

Es unterscheidet sich also $\vartheta_{m-n}(x)$ von $F(x)$ und $\vartheta_{n-1}(x)$ von $q_1 q_{n-1}$ nur durch einen von x unabhängigen, wesentlich positiven Factor λ_{n-1} , so dass wir mit Rücksicht auf den Satz 2) des vorigen Paragraphen den neuen Satz aussprechen können:

„Besitzt $F_1(x)$ für alle reellen Wurzelwerte von $F(x) = 0$ mit $F'(x)$ gleiches Vorzeichen, so können die Sylvester'schen Functionen zweiter Gattung

$$\vartheta_m(x) = F(x), \quad \vartheta_{m-1}(x) = F_1(x), \quad \vartheta_{m-2}(x), \quad \vartheta_{m-3}(x), \quad \dots \quad \vartheta_{m-r}(x)$$

oder

$$1, \quad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x), \quad \dots \quad \varphi_r(x)$$

den Sturm'schen Functionen zweiter Gattung substituiert werden.“

„In dem besonderen Falle $F_1(x) = F'(x)$ drückt (Gleichung (4)) ε_k aus, wie oft x_k unter den Wurzeln von $F(x) = 0$ vorkommt, und man kann dann statt der Formeln (14) und (15) sich der folgenden bedienen

$$\begin{aligned} \vartheta_{m-n}(x) &= (-1)^n \sum_{x_1 x_2 \dots x_n} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{x_{n+1}} \right) \left(1 - \frac{x}{x_{n+2}} \right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_m} \right) \\ (18) \quad \vartheta_{n-1}(x) &= (-1)^{n-1} \sum_{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \times \\ &\quad \times \left(1 - \frac{x}{x_2} \right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_{n-1}} \right), \end{aligned}$$

wenn man nur die Summe auf alle Combinationsformen n ter, bez. $(n-1)$ ter Classe aus den m Elementen x_1, x_2, \dots, x_m erweitert. Denn diese neuen Ausdrücke stimmen mit (14) und (15) unmittelbar für den Fall überein, dass sämtliche Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ verschieden sind; enthält aber die Gleichung $F(x) = 0$ mehrfache Wurzeln, so verschwinden in den obigen Summen so viele Glieder, dass man auf die früheren Formeln (14) und (15) zurückgelangt.

Der Coefficient der höchsten Potenz in ϑ_{m-n} ist

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^m}{x_1 x_2 \dots x_m} \sum \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \\ \text{der in } \vartheta_n(x) \text{ ist} \quad &\sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{(x_1 x_2 \dots x_n)^2} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \end{aligned}$$

Es giebt also die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$(19) \quad 1; \quad \Sigma \varepsilon_1; \quad \Sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \right)^2; \quad \dots \quad \Sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2$$

wie in der Reihe

$$(20) \quad 1; \quad \Sigma \frac{\varepsilon_1}{x_1^2}; \quad \Sigma \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{x_1^2 x_2^2} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \right)^2; \quad \dots \quad \Sigma \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r}{x_1^2 x_2^2 \dots x_r^2} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2$$

nach § 1. die Zahl der verschiedenen complexen Wurzepaare von $F(x) = 0$ an²); beiläufig kann man hieraus die Folgerung ziehen, dass die Grössen (19) und (20) äquivalente Zeichenreihen bilden.

Litteratur.

1) siehe Sturm § 2., 2)

2) Sylvester: „Memoir on Rational Derivation from Equations of Coexistence“ (Philosophical Magazine December 1839, pag. 438.) drückt zuerst die Sturm'sche Function $F_n(x)$ und $q_1 q_{n-1}$ durch die Wurzeln von $F(x) = 0$ aus. — In seiner „Theory of the Syzygetic relations“ (siehe § 1. 3)) behandelt Sylvester den allgemeinen Fall, dass der erste Divisor eine ganze Function beliebigen Grades ist (Section II); er specialisirt die allgemeinen Formeln in Section III, besonders im art. 35 und 36.

3) Hattendorf stellte, wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, die Formeln für den Fall auf, dass $F(x) = 0$ auch mehrfache Wurzeln enthalte.

§ 4.

Im letzten Paragraphen sind die Ausdrücke für die Functionen ϑ und φ nach Analogie mit den Sylvester'schen Functionen aufgestellt, und es ist nachträglich gezeigt, dass sie der Functionalgleichung (11*)

$$x^{2(n-1)} \cdot \Theta_{r-n}(x) = T_1(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) - T(x) \cdot \psi_{n-2}(x)$$

genügen. Man kann aber auch direct von dieser Gleichung aus die Werte von ϑ und ψ ermitteln.

Aus (11*) folgt nämlich, dass für $x = x_1, x_2 \dots x_r$

$$x^{2(n-1)} \Theta_{r-n}(x) = T_1(x) \cdot \varphi_{n-1}(x),$$

mithin

$$\frac{\Theta_{r-n}(x)}{\varphi_{n-1}(x)} = \frac{T_1(x)}{x^{2(n-1)}}$$

Es sind uns also von der gebrochenen Function $u = \frac{\Theta_{r-n}(x)}{\varphi_{n-1}(x)}$ r besondere Werte bekannt

$$(21) \quad u_1 = \frac{T_1(x_1)}{x_1^{2(n-1)}}; \quad u_2 = \frac{T_2(x_2)}{x_2^{2(n-1)}}; \quad \dots \quad u_r = \frac{T_r(x_r)}{x_r^{2(n-1)}}.$$

und diese bestimmen sie vollständig; denn ihr Zähler ist vom Grade $r-n$, ihr Nenner vom Grade $n-1$, somit überhaupt $r+1$ Constante unbestimmt, von denen eine der Einheit gleich gesetzt werden darf.

Die Function u ist nun gegeben durch die von Cauchy ¹⁾ aufgestellte Interpolationsformel, welche für den Fall, dass der Zähler eine ganze Function $(r-n)$ ten, der Nenner eine ganze Function $(n-1)$ ten Grades ist, folgende Form annimmt:

$$(22) \quad u = \frac{\sum u_1 u_2 \dots u_n \cdot \frac{(x-x_{n+1})(x-x_{n+2}) \dots (x-x_r)}{(x_1-x_{n+1}) \dots (x_1-x_r) \dots (x_n-x_{n+1}) \dots (x_n-x_r)}}{\sum u_1 u_2 \dots u_{n-1} \cdot \frac{(x_1-x)(x_2-x) \dots (x_{n-1}-x)}{(x_1-x_n) \dots (x_1-x_r) \dots (x_{n-1}-x_n) \dots (x_{n-1}-x_r)}}$$

Hier ist (Gleichung 13))

$$(21^*) \quad u_1 = \frac{T_1(x_1)}{x_1^{2(n-1)}} = -\frac{\varepsilon_1}{x_1} \frac{1}{x_1^{2(n-1)}} \left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right) \left(1 - \frac{x_1}{x_3}\right) \dots \left(1 - \frac{x_1}{x_r}\right) \\ = \frac{(-1)^r}{x_1 x_2 \dots x_r} \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3) \dots (x_1-x_r)}{x_1^{2(n-1)}},$$

also

$$\frac{u_1 u_2 \dots u_n (x-x_{n+1}) \dots (x-x_r)}{(x_1-x_{n+1}) \dots (x_1-x_r) \dots (x_n-x_{n+1}) \dots (x_n-x_r)} = \frac{(-1)^{nr}}{(x_1 x_2 \dots x_r)^n} \cdot \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \times \\ \frac{\{(x_1-x_2) \dots (x_1-x_n) \dots (x_{n-1}-x_1) \dots (x_{n-1}-x_n) (x-x_{n+1}) \dots (x-x_r)\}}{(x_1 x_2 \dots x_n)^{2(n-1)}} \\ = \frac{(-1)^{nr}}{(x_1 x_2 \dots x_r)^{n-1}} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \times \\ \times (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \cdot (-1)^{r-n} \left(1 - \frac{x}{x_{n+1}}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

und dem entsprechend

$$\frac{u_1 u_2 \dots u_{n-1} (x_1-x)(x_2-x) \dots (x_{n-1}-x)}{(x_1-x_n) \dots (x_1-x_r) \dots (x_{n-1}-x_n) \dots (x_{n-1}-x_r)} \\ = \frac{(-1)^{(n-1)r}}{(x_1 x_2 \dots x_r)^{n-1}} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} (-1)}{\varepsilon_n (-1)} \frac{(n-1)(n-2)}{2} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}} \right)^2 \times \\ \times \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_{n-1}}\right)$$

Wir sehen von dem Zähler und Nenner gemeinsamen Factor

$$\frac{(-1)^{(n-1)r} \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}}{(x_1 x_2 \dots x_r)^{n-1}} \text{ ab; dann behält der Zähler den Factor } (-1)^r \cdot (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{r-n} = -1 \text{ und wir finden schliesslich}$$

$$u = \frac{\Theta_{r-n}(x)}{\varphi_{n-1}(x)} = - \frac{\sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{x_{n+1}} \right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r} \right)}{\sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_{n-1}} \right)}$$

Da aber für $n=0$ $\Theta_{r-n}(x) = T(x)$ ist, so müssen wir setzen

$$(10) \quad \Theta_{r-n}(x) = (-1)^n \cdot \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \cdot \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \times \\ \times \left(1 - \frac{x}{x_{n+1}} \right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r} \right)$$

und daher

$$\varphi_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \cdot \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}} \right)^2 \\ \times \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_{n-1}} \right);$$

dies sind die in (14) und (15) für ϑ und φ aufgestellten Ausdrücke.

Es wird sich später bei einem anderen directen Verfahren zur Ermittlung der Functionen ϑ und φ zeigen, dass man zuerst den Wert von φ findet. Setzen wir aber die Function φ als bekannt voraus, so kann man ϑ durch folgendes Verfahren²⁾ bestimmen, welches nur aus dem Grunde schon hier seinen Platz findet, weil es für die Function ϑ , gleich den vorhergehenden Methoden, ihren Ausdruck durch die Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_r giebt. Man kennt nach der Lagrange'schen Interpolationsmethode die Function $\Theta_{r-n}(x)$, deren Grad $r-n$ ist, wenn ihr Wert für $r-n+1$ Werte des x , etwa für $x=x_n, x=x_{n+1}, \dots, x=x_r$ gegeben ist. Nach (11*) ist für jede Wurzel x_k der Gleichung $T(x) = 0$

$$x_k^{2(n-1)} \cdot \Theta_{r-n}(x_k) = T_1(x_k) \cdot \varphi_{n-1}(x_k);$$

es ist aber nach (13)

$$T_1(x_n) = - \frac{\varepsilon_n}{x_n} \left(1 - \frac{x_n}{x_1} \right) \left(1 - \frac{x_n}{x_2} \right) \dots \left(1 - \frac{x_n}{x_{n-1}} \right) \cdot \left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) \dots \left(1 - \frac{x_n}{x_r} \right)$$

und nach (15)

$$\varphi_{n-1}(x_n) = (-1)^{n-1} \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}} \right)^2 \left(1 - \frac{x_n}{x_1} \right) \left(1 - \frac{x_n}{x_2} \right) \dots \left(1 - \frac{x_n}{x_{n-1}} \right)$$

also

$$\Theta_{r-n}(x_n) = (-1)^n \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) \dots \left(1 - \frac{x_n}{x_r} \right).$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Ausdruck

$$(-1)^n \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{x_{n+1}} \right) \left(1 - \frac{x}{x_{n+2}} \right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r} \right)$$

für die $r-n+1$ Werte von $x: x = x_n, = x_{n+1}, = x_{n+2}, \dots x = x_r$ mit $\Theta_{r-n}(x)$ übereinstimmt, und da er eine ganze Function vom Grade $r-n$ ist, so ist er also auch der Wert von $\Theta_{r-n}(x)$.

Litteratur:

1) Cauchy: „Analyse algèbre.“ pag. 528. — Liouville hat zuerst auf die Benutzung der Cauchy'schen Formel zur Bestimmung von ϑ und φ aufmerksam gemacht (siehe die in § 2. 2) erwähnte Abhandlung von Sturm pag. 361).

2) Ich verdanke diese Methode einer Mitteilung des Herrn Prof. Stern; man hat dieselbe bei der Sylvester'schen Function ϑ noch nicht in Anwendung gebracht; dies kann aber in ganz ähnlicher Weise, wie hier, geschehen.

§ 5.

Es ist unsere weitere Aufgabe, die Functionen ϑ und φ zu ermitteln, wenn nur $F_1(x)$ und die Gleichung $F(x) = 0$ gegeben ist, deren Wurzeln uns unbekannt sind. — Man löst diese Aufgabe am einfachsten, indem man in das System von Gleichungen (3) für $F_n(x)$ seinen Wert aus (12) $\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{\lambda_{n-1}}$ substituirt; dann geht die Gleichung

$$F_{n-1}(x) = q_n \cdot F_n(x) - x^2 \cdot F_{n+1}(x)$$

über in die andere

$$\frac{\vartheta_{m-n+1}}{\lambda_{n-2}} = q_n \cdot \frac{\vartheta_{m-n}}{\lambda_{n-1}} - x^2 \cdot \frac{\vartheta_{m-n-1}}{\lambda_n}$$

oder durch Multiplication mit $\lambda_{n-2} \cdot \lambda_{n-1} \cdot \lambda_n$ in

$$\lambda_{n-1} \cdot \lambda_n \cdot \vartheta_{m-n+1} = \lambda_{n-2} \cdot \lambda_n \cdot q_n \cdot \vartheta_{m-n} - x^2 \cdot \lambda_{n-2} \cdot \lambda_{n-1} \cdot \vartheta_{m-n-1}$$

$$\delta\left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n} \\ \frac{1}{x_1^2} & \frac{1}{x_2^2} & \dots & \frac{1}{x_n^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{x_1^{n-1}} & \frac{1}{x_2^{n-1}} & \dots & \frac{1}{x_n^{n-1}} \end{vmatrix}$$

und ferner

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \delta\left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n}\right) \\ & \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_n}\right) \\ & = \sum \frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} \frac{\varepsilon_1}{x_1^n} \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n}{x_2 x_3 \dots x_n} \delta\left(\frac{1}{x_2} \frac{1}{x_3} \dots \frac{1}{x_n}\right) \end{aligned}$$

$$\text{d. i.} = \begin{vmatrix} \frac{\varepsilon_1}{x_1} & \frac{\varepsilon_2}{x_2} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{x_n} \\ \frac{\varepsilon_1}{x_1^2} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^2} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varepsilon_1}{x_1^{n-1}} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^{n-1}} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^{n-1}} \\ \frac{\varepsilon_1}{x_1^n \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^n \left(1 - \frac{x}{x_2}\right)} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^n \left(1 - \frac{x}{x_n}\right)} \end{vmatrix}$$

mithin nach dem Multiplicationstheorem

$$\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} =$$

$$(-1)^n \cdot \Sigma \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ X_2 & X_3 & \dots & X_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1} & X_n & \dots & X_{2n-2} \\ \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{x_i^n \left(1 - \frac{x}{x_i}\right)} & \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{x_i^{n+1} \left(1 - \frac{x}{x_i}\right)} & \dots & \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{x_i^{2n-1} \left(1 - \frac{x}{x_i}\right)} \end{vmatrix}$$

$$X_k = \frac{\varepsilon_1}{x_1^k} + \frac{\varepsilon_2}{x_2^k} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{x_n^k}$$

Diese letzte Determinante zerfällt in n^n Determinanten, die sämtlich identisch $= 0$ sind mit Ausnahme der $1. 2. \dots n$ Determinanten, welche man aus der folgenden durch Permutation der Indices $1, 2, 3, \dots n$ ableitet:

$$\begin{vmatrix} \frac{\varepsilon_1}{x_1} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^2} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^n} \\ \frac{\varepsilon_1}{x_1^2} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^3} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^{n+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varepsilon_1}{x_1^{n-1}} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^n} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^{2n-2}} \\ \frac{\varepsilon_1}{x_1^n \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^{n+1} \left(1 - \frac{x}{x_2}\right)} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^{2n-1} \left(1 - \frac{x}{x_n}\right)} \end{vmatrix}$$

Man findet also $(-1)^n \cdot \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F'(x)}$ als die Summe der $r(r-1) \dots (r-n+1)$ Determinanten, welche sich aus der vorstehenden Determinante ergeben, wenn man darin statt der Indices $1, 2, \dots n$ alle Variationen*) der n ten Classe aus den Elementen $1, 2, \dots r$ setzt. Dieselbe Summe wird durch die folgende Determinante zusammengefasst, welche wir also $= (-1)^n \cdot \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F'(x)}$ setzen dürfen.

$$(26) \quad \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F'(x)} = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$S_k = \frac{\varepsilon_1}{x_1^k} + \frac{\varepsilon_2}{x_2^k} + \dots + \frac{\varepsilon_r}{x_r^k}$$

$$U_k = \frac{\varepsilon_1}{x_1^k \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)} + \frac{\varepsilon_2}{x_2^k \left(1 - \frac{x}{x_2}\right)} + \dots + \frac{\varepsilon_r}{x_r^k \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)}$$

Es ist zu der Formel

*) Die Variationsformen begreifen alle die Formen, welche aus den Combinationsformen durch Permutation der Indices erhalten werden.

$$(26) \quad \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_i & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{i+1} & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{i+n-2} & \dots & S_{2n-2} \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{i+n-1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix}$$

die Bemerkung nicht überflüssig, dass man die in ihr auftretende Determinante noch weiter transformiren kann. Denn aus der identischen Gleichung

$$U_i = x \cdot U_{i+1} + S_i$$

folgt

$$U_i = x^{n-1} \cdot U_{i+n-1} + x^{n-2} \cdot S_{i+n-2} + x^{n-3} \cdot S_{i+n-3} + \dots + S_{i+1} + S_i;$$

multiplicirt man daher die erste Horizontalreihe mit x^0 , die zweite mit x^1 , u. s. f., die $(n-1)$ te mit x^{n-2} und addirt diese Producte sämmtlich zur letzten Horizontalreihe, nachdem man diese zuvor mit x^{n-1} multiplicirt hat, so findet sich

$$(26^*) \quad \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} = \frac{(-1)^n}{x^{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_i & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{i+1} & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{i+n-2} & \dots & S_{2n-2} \\ U_1 & U_2 & \dots & U_i & \dots & U_n \end{vmatrix}$$

In dieser Form hat wenigstens die Determinante mehr Symmetrie mit derjenigen, welche bei den Sturm'schen Functionen $\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)}$ darstellt.

Um $\vartheta_{m-n}(x)$ durch eine Determinante darzustellen, die sofort erkennen lässt, dass ϑ_{m-n} nur eine Function $(m-n)$ ten Grades ist, multipliciren wir in (26) auf beiden Seiten mit $F(x)$ und setzen

$$\sum_{k=1}^k \frac{\varepsilon_k \cdot F(x)}{x_k^{n+r} \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)} = V_{n+r};$$

dann wird

$$27) \quad \vartheta_{m-n}(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{r+1} & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+2} & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{r+n-2} & \dots & S_{2n-2} \\ V_n & V_{n+1} & \dots & V_{n+r} & \dots & V_{2n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n \sum_{0, n-1}^r h_{n+r} V_{n+r}$$

$$h_{n+r} = (-1)^{n+r-1} \begin{vmatrix} S_1 & \dots & S_r & S_{r+2} & \dots & S_n \\ S_2 & \dots & S_{r+1} & S_{r+3} & \dots & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & \dots & S_{n+r-2} & S_{n+r} & \dots & S_{2n-2} \end{vmatrix}$$

so können wir der Function $\vartheta_{m-n}(x)$ auch diese Form geben

$$(31) \quad \vartheta_{m-n}(x) = \sum_{0, m-n}^{\lambda} C_{\lambda}^{(m-n)} x^{\lambda}$$

$$(-1)^n \cdot C_0^{(m-n)} = D_0^{(m-n)}$$

$$(-1)^n \cdot C_{\lambda}^{(m-n)} = D_{\lambda}^{(m-n)} + a_1 D_{\lambda-1}^{(m-n)} + \dots + a_{\lambda} D_0^{(m-n)}$$

Für negative ganze Werte von p bis zu $p = -n+1$ ist $D_p^{(m-n)} = 0$.¹⁾

Es ist nach Gleichung (26)

$$U_1 = -\frac{T_1(x)}{T(x)} = -\frac{F_1(x)}{F(x)}$$

und

$$U_i = x \cdot U_{i+1} + S_i$$

folglich

$$U_i = x^i \cdot U_{i+1} + (S_1 + S_2 x + \dots + S_i x^{i-1})$$

oder

$$(32) \quad U_{i+1} = -\frac{F_1(x)}{F(x)} \cdot \frac{1}{x^i} - \left(\frac{S_1}{x^i} + \frac{S_2}{x^{i-1}} + \dots + \frac{S_i}{x} \right).$$

Von dieser Formel wird weiterhin Gebrauch gemacht.

Die wichtige Recursionsformel, durch welche die Grössen S successive aus den Coefficienten von $F(x)$ und $F_1(x)$ berechnet werden, leitet man direct aus der Identität der beiden Ausdrücke ab, durch welche man den Quotienten $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ darstellen kann. Es ist nämlich

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{T_1(x)}{T(x)} = -\sum_{1,r}^k \frac{\varepsilon_k}{x_k \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)} = -S_1 - S_2 x - S_3 x^2 - \dots$$

und daher

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{m-1} x^{m-1} = -(1 + a_1 x + \dots + a_m x^m) \cdot (S_1 + S_2 x + S_3 x^2 + \dots)$$

Diese Gleichung giebt sofort die Relation

$$(33) \quad S_{r+1} + a_1 S_r + a_2 S_{r-1} + \dots + a_r S_1 = -b_r.$$

Mit Hilfe derselben kann man der Grösse Q_{n+r} (Gleichung 28) die neue Form geben

$$Q_{n+r} = -\sum_{0, m-n}^{\lambda} x^{\lambda} \{ a_{\lambda+1} S_{n+r-1} + a_{\lambda+2} S_{n+r-2} + \dots + a_{n+\lambda+r-1} S_1 + b_{n+\lambda+r-1} \};$$

multiplicirt man daher in (29) die $(n-1)$ te Horizontalreihe mit $a_{\lambda+1}$,

die $(n-2)$ te mit a_{i+2} , ..., die erste mit a_{i+n-1} und addirt die Summe aller zur letzten, so wird das allgemeine Glied derselben

$$-\sum_{0, m=n}^{\lambda} x^{\lambda} \{a_{i+n} S_r + a_{i+n+1} S_{r-1} + \dots + a_{i+n+r-1} S_1 + b_{i+n+r-1}\}$$

Wir bezeichnen dieses mit Q'_{n+r} ; dann ist nach (29)

$$(34) \quad \vartheta_{m-n}(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{r+1} & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+2} & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{n+r-1} & \dots & S_{2n-2} \\ Q'_n & Q'_{n+1} & \dots & Q'_{n+r} & \dots & Q'_{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$Q'_n = -\sum_{0, m=n}^{\lambda} x^{\lambda} \cdot b_{i+n+r}$$

$$Q'_{n+1} = -\sum_{0, m=n}^{\lambda} x^{\lambda} (a_{i+n} S_1 + b_{i+n})$$

Setzt man, um auf die Functionen ϑ den Sturm'schen Satz anwenden zu können, $F_1(x) = F'(x)$, so wird $b_k = (k+1)a_{k+1}$; S_i stellt dann wirklich nur die Summe der reciproken i ten Potenzen aller Wurzeln von $F(x) = 0$ dar, und die Gleichung (33) vereinfacht sich, wenn man noch $r+1$ mit r vertauscht, zu der Formel

$$S_r + a_1 S_{r-1} + a_2 S_{r-2} + \dots + a_{r-1} S_1 + r \cdot a_r = 0,$$

welche durchaus der Newton'schen Recursionsformel für die Summen der ganzen Potenzen aller Wurzeln analog ist.

Litteratur:

1) Cayley „Note sur les fonctions de Sturm“ (Liouville. T. 11. pag. 297.) entwickelte zuerst die Formeln 27—30 unter den besonderen Voraussetzungen, dass $F_1(x) = F'(x)$ und alle Wurzeln von $F(x)$ ungleich sind. Vergl. Hattendorf. § 7.

2) Andere Ableitungen der Gleichung (33) gaben Hattendorf (§ 7.) und Brioschi: „Intorno ad alcune questione d'algebra“ (Tortolini: Annali di Scienze matematiche e fisiche. T. 5. pag. 301.)

§ 7.

Um auch $\varphi_{n-1}(x)$ durch eine Determinante darzustellen, entnehmen wir aus (15) den Wert

$$\varphi_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} x^{n-1} \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}} \right)^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1} \right) \dots \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_{n-1}} \right)$$

Wir ersetzen das Product

$$\delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_2} \right) \dots \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_{n-1}} \right) = \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}} \frac{1}{x} \right)$$

durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_1^2} & \dots & \frac{1}{x_1^{n-1}} \\ 1 & \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_2^2} & \dots & \frac{1}{x_2^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \frac{1}{x_{n-1}} & \frac{1}{x_{n-1}^2} & \dots & \frac{1}{x_{n-1}^{n-1}} \\ 1 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} & \dots & \frac{1}{x^{n-1}} \end{vmatrix}$$

Diese ist zu multipliciren mit $\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}} \right)$ oder mit

$$\begin{vmatrix} \frac{\varepsilon_1}{x_1} & \frac{\varepsilon_1}{x_1^2} & \dots & \frac{\varepsilon_1}{x_1^{n-1}} & 0 \\ \frac{\varepsilon_2}{x_2} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^2} & \dots & \frac{\varepsilon_2}{x_2^{n-1}} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varepsilon_{n-1}}{x_{n-1}} & \frac{\varepsilon_{n-1}}{x_{n-1}^2} & \dots & \frac{\varepsilon_{n-1}}{x_{n-1}^{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Das Resultat ist, wenn man

$$\frac{\varepsilon_1}{x_1^i} + \frac{\varepsilon_2}{x_2^i} + \dots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{x_{n-1}^i} = X_i$$

setzt,

$$\varphi_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} \Sigma \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ X_2 & X_3 & \dots & X_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1} & X_n & \dots & X_{2n-2} \\ x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

oder wie eine Betrachtung zeigt, ähnlich der, welche zur Aufstellung der Gleichung (26) führte¹⁾,

$$(35) \quad \varphi_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_i = \frac{\varepsilon_1}{x_1^i} + \frac{\varepsilon_2}{x_2^i} + \dots + \frac{\varepsilon_r}{x_r^i}$$

Führt man diesen Wert für $\varphi_{n-1}(x)$ und den für $\vartheta_{m-n}(x)$ aus (26) in die Functionalgleichung (11) ein, so wird man finden

$$(36) \quad \psi_{n-2}(x) = (-1)^n x^{n-1} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{r+1} & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+2} & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{r+n-1} & \dots & S_{2n-2} \\ 0 & P_1 & \dots & P_r & \dots & P_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$P_r = \frac{S_1}{x^r} + \frac{S_2}{x^{r-1}} + \dots + \frac{S_r}{x}$$

Bequemer²⁾ gelangt man zu diesem Ausdruck für $\psi_{n-2}(x)$, wenn man in (32)

$$\frac{S_1}{x^i} + \frac{S_2}{x^{i-1}} + \dots + \frac{S_i}{x} = P_i$$

also

$$U_{i+1} = -\frac{F_1(x)}{F(x)} \cdot \frac{1}{x^i} - P_i$$

setzt und diesen Ausdruck für U in (26) substituirt; dadurch zerfällt die Determinante auf der rechten Seite jener Gleichung²⁾ in zwei Theile, und man erhält

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} &= (-1)^{n-1} \frac{F_1(x)}{F(x)} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ x^{n-1} & x^n & \dots & x^{2n-2} \end{vmatrix} \\ &\quad - (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{r+1} & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+2} & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{r+n-1} & \dots & S_{2n-2} \\ P_{n-1} & P_n & \dots & P_{r+n-1} & \dots & P_{2n-2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf (35)

$$\begin{aligned}
 x^{2(n-1)} \cdot \vartheta_{m-n}(x) \\
 = F_1(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) - F(x) \cdot (-1)^n \cdot x^{2n-2} \cdot \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{r+1} & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+2} & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{r+n-1} & \dots & S_{2n-2} \\ P_{n-1} & P_n & \dots & P_{r+n-1} & \dots & P_{2n-2} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Vergleicht man diese Gleichung mit (11), so ergibt sich zur Bestimmung von $\psi_{n-2}(x)$ die Formel

$$\psi_{n-2}(x) = (-1)^n \cdot x^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{r+1} & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+2} & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{r+n-1} & \dots & S_{2n-2} \\ x^{n-1}P_{n-1} & x^{n-1}P_n & \dots & x^{n-1}P_{r+n-1} & \dots & x^{n-1}P_{2n-2} \end{vmatrix}$$

welche sich zu der in (36) aufgestellten vereinfacht, wenn man in der Determinante auf der rechten Seite die erste Horizontalreihe mit 1, die zweite mit x , ..., die vorletzte mit x^{n-2} multiplicirt und die Summe aller von der letzten subtrahirt.

Endlich ist die Constante ξ_n in $\vartheta_{m-n}(x)$ oder $\varphi_n(x)$ nach (35)

$$\xi_n = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-1} \end{vmatrix}$$

und der höchste Coefficient $C_{m-n}^{(m-n)}$ in $\vartheta_{m-n}(x)$ ist nach (31) (oder einfacher direct nach (19)), abgesehen von dem constanten, den höchsten Coefficienten aller Functionen ϑ gemeinsamen Factor

$$a_m = \frac{(-1)^m}{x_1 x_2 \dots x_m}$$

$$C_{m-n}^{(m-n)} = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \end{vmatrix}$$

der höchste Coefficient von $\varphi_n(x)$ hat dagegen nach (35) (oder direct nach (20)) den Wert

$$\begin{vmatrix} S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ S_3 & S_4 & \dots & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{2n} \end{vmatrix}$$

Man folgert hieraus (§ 1.):

„Die Gleichung $F(x) = 0$ hat nicht mehr verschiedene reelle positive Wurzeln, als Zeichenwechsel und nicht mehr verschiedene reelle negative Wurzeln, als Zeichenfolgen in der Determinantenreihe

$$(37) \quad 1, -S_1, + \begin{vmatrix} S_1 & S_2 \\ S_1 & S_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \\ S_3 & S_4 & S_5 \end{vmatrix}, \dots (-1)^r \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_r \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_r & S_{r+1} & \dots & S_{2r+1} \end{vmatrix}$$

auftreten; die Gleichung $F(x) = 0$ hat so viele verschiedene Paare conjugirter Wurzeln, als die Determinantenreihe

$$(38) \quad 1, S_0, \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}, \dots \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{r-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{r-1} & S_r & \dots & S_{2r-2} \end{vmatrix}$$

oder

$$(39) \quad 1, S_2, \begin{vmatrix} S_2 & S_3 \\ S_3 & S_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} S_2 & S_3 & S_4 \\ S_3 & S_4 & S_5 \\ S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix}, \dots \begin{vmatrix} S_2 & S_3 & \dots & S_{r+1} \\ S_3 & S_4 & \dots & S_{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{r+1} & S_{r+2} & \dots & S_{2r} \end{vmatrix}$$

Zeichenwechsel enthält³⁾. Die Zeichenreihen von (38) und (39) sind also äquivalent.“

Diese Sätze gelten nur dann, wenn auf die Functionen ϑ und φ der Satz von Sturm Anwendung findet, also insbesondere in dem Falle, wo $F_1(x) = F'(x)$ und die S die reciproken Potenzsummen aller Wurzeln darstellen.

Litteratur:

1) vergl. Joachimsthal: „Bemerkungen über den Sturm'schen Satz“ (Crelle. Bd. 48. pag. 386. im § 5. und 6.)

2) vergl. Brioschi in seinem § 6. 2) erwähnten Aufsätze pag. 306.

3) vergl. Borchardt: „Développements sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes“ (Liouville. Journal T. 12. pag. 59. oder Crelle. Bd. 30. pag. 41.). Die Reihe (38) geht sofort aus der Reihe Borchardt's hervor, wenn man allgemein x_k mit $\frac{1}{x_k}$, also $s_i = \sum_{1,r}^k \varepsilon_k x_k^i$ mit $S_i = \sum_{1,r}^k \frac{\varepsilon_k}{x_k^i}$ vertauscht.

§ 8.

Es ist für die weiteren Untersuchungen von Bedeutung und auch an und für sich nicht ohne Interesse, dass man die Functionen ϑ

und φ durch ortho-symmetrische*) Determinanten, bei denen allgemein das Element $a_{i,k} = a_{r,k}$ ist, darstellen kann ($i+k = i'+k'$).

Man erhält diese Ausdrücke am einfachsten aus der allgemeinen Formel¹⁾

$$(40) \quad \Sigma f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) \cdot \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_{n-1} \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n-1} & t_n & \dots & t_{2n-2} \end{vmatrix}$$

$$t_i = \sum_{1,r}^k \frac{f(x_k)}{x_k^i}$$

die man mit den Mitteln ableiten kann, welche bei Herleitung der Gleichung (26) zur Anwendung kamen. Es bezeichnet in (40) $f(x)$ eine beliebige Function von x , und durch das Summenzeichen wird angedeutet, dass man für 1, 2, ... n der Reihe nach alle Combinationen der n ten Classe aus den Zahlen 1, 2, ... r setzen und die entstehenden Ausdrücke summiren soll.

Aus der Gleichung (40) folgt (nach 14), wenn $f(x_k) = \frac{t_k}{x_k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x_k}}$

gesetzt wird,

$$(41) \quad \frac{\varphi_{n-n}(x)}{F(x)} = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_n \\ U_2 & U_3 & \dots & U_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$U_i = \sum_{1,r}^k \frac{t_k}{x_k^i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x_k}}$$

identificirt man dagegen in (40) $f(x_k)$ mit $\frac{t_k}{x_k} \left(1 - \frac{x}{x_k} \right)$, so wird nach (15):

$$(42) \quad \varphi_n(x) = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_2 & u_3 & \dots & u_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$u_i = \sum_{1,r}^k \frac{t_k}{x_k^i} \left(1 - \frac{x}{x_k} \right)$$

*) Baltzer „Determinanten“. § 3, 10.

Dieselben Determinanten für ϑ und φ kann man auch aus den früheren Resultaten ableiten.

Man multiplicire in (26) die Glieder der letzten Horizontalreihe mit x und addire sie zur vorletzten, multiplicire dann diese, nachdem man sie noch zuvor mit Hülfe der Relation $U_i = x \cdot U_{i+1} + S_i$ vereinfacht hat, mit x und addire sie zur $(n-2)$ ten u. s. f.; es ergibt sich

$$(41^*) \quad \frac{\vartheta_{n-n}(x)}{F(x)} = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} xU_2 + S_1 & xU_3 + S_2 & \dots & xU_{n+1} + S_n \\ xU_3 + S_2 & xU_4 + S_3 & \dots & xU_{n+2} + S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ xU_n + S_{n-1} & xU_{n+1} + S_n & \dots & xU_{2n-1} + S_{2n-2} \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix}$$

in Uebereinstimmung mit (41).

Um endlich auch aus (35) den neuen Wert von $\varphi_n(x)$ zu erhalten, wird dort n mit $n+1$ vertauscht und von jeder Verticalreihe die folgende, welche zuvor mit x multiplicirt ist, subtrahirt; dadurch wird die letzte Horizontalreihe zu $0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1$, und die Determinante $(n+1)$ -ten Grades reducirt sich also auf die folgende n ten Grades

$$(42^*) \quad \varphi_n(x) = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} S_1 - S_2x & S_2 - S_3x & \dots & S_n - S_{n+1}x \\ S_2 - S_3x & S_3 - S_4x & \dots & S_{n+1} - S_{n+2}x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n - S_{n+1}x & S_{n+1} - S_{n+2}x & \dots & S_{2n-1} - S_{2n}x \end{vmatrix}$$

welche sich von der Determinante in (42) nur durch die Schreibweise unterscheidet, da $S_i - x \cdot S_{i+1} = u_i$ ist.

Litteratur:

- 1) vergl. Joachimsthal in der Abhandlung sub § 7. 1) pag. 394.
- 2) vergl. Jacobi „Ueber die Darstellung einer Reihe gegebner Werte durch eine gebrochne rationale Function“. (Crelle. Band 30. pag. 143.) und Brioschi in der Abhandlung sub § 6. 2) pag. 309.
- 3) vergl. Jacobi in der Arbeit sub 2) pag. 129. und Brioschi: „Theorie der Determinanten“. (Deutsche Ausgabe von Schellbach pag. 61. 1854.)

§ 9.

Der im § 3. eingeschlagene Weg, um zu beweisen, dass die Functionen ϑ und φ den Sturm'schen Functionen zweiter Gattung äquivalente Zeichenreihen liefern, ist nicht der einzig mögliche; es giebt noch eine Reihe anderer.

Wir setzen voraus, dass die Grössen ε positiv sind; dies ist unter andern der Fall, wenn $F_1(x) = F'(x)$, da dann ε_k nach (4) angiebt, wie oft x_k unter den Wurzeln von $F(x) = 0$ vorkommt.

Man hat zunächst aus (13) und (14)

$$\Theta_r(x) = T(x), \quad \Theta_{r-1}(x) = T_1(x),$$

also auch

$$\vartheta_m(x) = F(x), \quad \vartheta_{m-1}(x) = F_1(x)$$

und nach (15)

$$\begin{aligned} \varphi_r(x) &= (-1)^r \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r}{x_1 x_2 \dots x_r} \partial \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 T(x) \\ \varphi_{r-1}(x) &= (-1)^{r-1} \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{r-1}}{x_1 x_2 \dots x_{r-1}} \partial \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{r-1}} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \left(1 - \frac{x}{x_2} \right) \\ &\quad \dots \left(1 - \frac{x}{x_{r-1}} \right) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass $\Theta_r(x) = 0$ und $\varphi_r(x) = 0$ dieselben Wurzeln besitzen, wie $F(x)$, aber jede nur einfach, und dass für alle reellen Wurzelwerte von $F(x) = T(x) = 0$ $\Theta_{r-1}(x)$ und — abgesehen von dem Factor $\frac{(-1)^r}{x_1 x_2 \dots x_r}$, der indes $\varphi_r(x)$ und $\varphi_{r-1}(x)$ gemeinsam ist — auch $\varphi_{r-1}(x)$ mit $T_1(x)$ gleiches Vorzeichen hat.

Es bedarf daher, um auf die Aequivalenz der Zeichenreihen der ϑ und φ mit der der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung schliessen zu können, nach § 1. nur noch des Nachweises, dass, wenn eine der mittleren Functionen φ oder ϑ gleich Null wird, die einschliessenden Functionen entgegengesetztes Zeichen haben, und eben diese charakteristische Eigenschaft der Sylvester'schen Functionen zweiter Gattung soll im Folgenden auf verschiedenen Wegen gefolgert werden.

Sylvester¹⁾ hat zuerst gezeigt, dass in einer Reihe orthosymmetrischer Determinanten

$$\begin{aligned} D_0 &= 1; \quad D_1 = a_{11}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \dots \\ D_{n+1} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+11} & a_{n+12} & \dots & a_{n+1n+1} \end{vmatrix}; \quad \dots \quad D_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

stets D_{n-1} und D_{n+1} von entgegengesetztem Zeichen sind, wenn D_n verschwindet.

Denn bezeichnet man mit $a_{i,k}$ den Coefficienten von $a_{i,k}$ in D_{n+1} , so ist bekanntlich

$$\begin{vmatrix} a_{nn} & a_{n+1n} \\ a_{n+1n} & a_{n+1n+1} \end{vmatrix} = D_{n+1} \cdot \frac{\partial^2 D_{n+1}}{\partial a_{nn} \cdot \partial a_{n+1n+1}}$$

oder, da

$$a_{nn} = \frac{\partial D_{n+1}}{\partial a_{nn}}, \quad a_{n+1n+1} = a_{n+1n} = \frac{\partial D_{n+1}}{\partial a_{nn+1}}$$

und

$$a_{n+1n+1} = D_n, \quad \frac{\partial^2 D_{n+1}}{\partial a_{nn} \partial a_{n+1n+1}} = D_{n-1}$$

$$(43) \quad D_{n+1} \cdot D_{n-1} = \frac{\partial D_{n+1}}{\partial a_{nn}} \cdot D_n - \left(\frac{\partial D_{n+1}}{\partial a_{nn+1}} \right)^2$$

Wird also $D_n = 0$ für $x = x_k$, so wird für denselben Wert des x

$$D_{n+1} \cdot D_{n-1} = - \left(\frac{\partial D_{n+1}}{\partial a_{nn+1}} \right)^2$$

d. h. es haben D_{n+1} und D_{n-1} entgegengesetzte Zeichen

Im vorigen Paragraphen ist aber gezeigt, dass die Functionen $\frac{\vartheta_{m-n}}{F}$ und φ_n durch orthosymmetrische Determinanten dargestellt werden; denn der Factor $(-1)^n$ hebt die Orthosymmetrie in Formel (41) und (42) nicht auf. Diesen Functionen kommt daher die besprochene Eigenschaft zu; man erhält speciell

$$(43^*) \quad \varphi_{n+1}(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) = \frac{\partial \varphi_{n+1}(x)}{\partial u_{2n-1}} \cdot \varphi_n(x) - \left(\frac{\partial \varphi_{n+1}(x)}{\partial u_{2n}} \right)^2$$

und

(43**)

$$\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} \cdot \frac{\vartheta_{m-n-2}(x)}{F(x)} = \frac{\partial \left(\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} \right)}{\partial U_{2n-1}} \cdot \frac{\vartheta_{m-n-1}(x)}{F(x)} - \left(\frac{\partial \left(\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} \right)}{\partial U_{2n}} \right)^2$$

oder einfacher

$$\vartheta_{m-n}(x) \cdot \vartheta_{m-n-2}(x) = \frac{\partial \vartheta_{m-n}(x)}{\partial U_{2n-1}} \cdot \vartheta_{m-n-1}(x) - \left(\frac{\partial \vartheta_{m-n}(x)}{\partial U_{2n}} \right)^2$$

Einen andern Beweis verdankt man Joachimsthal ²⁾. Nach (35) ist

$$\varphi_n(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \\ x^n & x^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}; \quad S_i = \frac{\varepsilon_1}{x_1^i} + \frac{\varepsilon_2}{x_2^i} + \dots + \frac{\varepsilon_r}{x_r^i}$$

Wir setzen

$$\varphi_n(x) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)}x + A_2^{(n)}x^2 + \dots + A_n^{(n)}x^n$$

Verbindet man mit diesen

$$R(x) = \gamma_n x^n + \gamma_{n-1} x^{n-1} + \dots + \gamma_0,$$

so führt die Elimination der Grössen γ zu dem Resultato

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+2} & 0 \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{2n+1} & \frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} A_0^{(n+2)} \\ x^n & x^{n-1} & \dots & 1 & -R(x) \end{vmatrix} = 0$$

oder einfacher

$$A_0^{(n+1)} \cdot R(x) - \frac{A_0^{(n+2)} A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} \varphi_n(x) = 0.$$

Daher findet man schliesslich die gewünschte Gleichung

$$(45) \quad \varphi_{n+2}(x) = \left\{ \frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} + H \cdot x \right\} \cdot \varphi_{n+1}(x) - x^2 \cdot \left\{ \frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} \right\}^2 \cdot \varphi_n(x).$$

Dasselbe Verfahren lässt sich auf die Functionen ϑ anwenden³⁾.
Es sei

$$\vartheta_{m-n}(x) = C_0^{(m-n)} + C_1^{(m-n)} x + C_2^{(m-n)} x^2 + \dots + C_{m-n}^{(m-n)} x^{m-n}$$

Multiplicirt man beide Seiten der Gleichung (26)

$$\frac{\vartheta_{r-n}(x)}{T(x)} = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad \text{in der } U_i = \sum_{1,r}^k \frac{\varepsilon_k}{x k^i} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_k}\right)},$$

mit $T(x)$ und beachtet, dass $T(x) \cdot U_i$ sich für $x = x_k$ auf $-\frac{T_1(x_k)}{x_k^{i-1}}$ reducirt (Gleichung (13)), so findet man

$$(46) \quad \sum_{1,r}^k \varepsilon_k \cdot x_k^i \cdot \frac{\vartheta_{r-n}(x_k)}{T_1(x_k)} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ S_{n-1-i} & S_{n-i} & \dots & S_{2n-2-i} \end{vmatrix} \\ = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq i \leq n-2 \\ (-1)^{n-1} D_{-i-1}^{(m-n)} & \text{für } i < 0 \end{cases}$$

Um nun die Relation

$$\gamma_k = \frac{1}{A_0^{(n+1)} \cdot A_0^{(n+1)}} \cdot \begin{vmatrix} A_0^{(n+2)} & 0 & A_0^{(n+1)} \\ A_1^{(n+2)} & A_0^{(n+1)} & A_1^{(n+1)} \\ A_{k+2}^{(n+2)} & A_{k+1}^{(n+1)} & A_{k+2}^{(n+1)} \end{vmatrix}$$

ist; aus Gleichung (45) aber folgt

$$\gamma_k = \left\{ \frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} \right\}^2 \cdot A_k^{(n)}$$

und durch Gleichsetzung beider Werte von γ_k

$$A_0^{(n+2)} \cdot A_0^{(n+2)} \cdot A_k^{(n)} = \begin{vmatrix} A_0^{(n+2)} & 0 & A_0^{(n+1)} \\ A_1^{(n+2)} & A_0^{(n+1)} & A_1^{(n+1)} \\ A_{k+2}^{(n+2)} & A_{k+1}^{(n+1)} & A_{k+2}^{(n+1)} \end{vmatrix}$$

Um diese Gleichung weiter zu vereinfachen, bezeichnen wir mit E die folgende Determinante, in der allgemein nach einer Differentiation $a_{ik} = S_{i+k}$ gesetzt werden soll.

$$E = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} & a_{1n+1} & a_{1n+2} \\ a_{20} & a_{21} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} & a_{2n+1} & a_{2n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-k+10} & a_{n-k+11} & \dots & a_{n-k+1n-1} & a_{n-k+1n} & a_{n-k+1n+1} & a_{n-k+1n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} & a_{nn+1} & a_{nn+2} \\ a_{n+10} & a_{n+11} & \dots & a_{n+1n-1} & a_{n+1n} & a_{n+1n+1} & a_{n+1n+2} \\ a_{n+20} & a_{n+21} & \dots & a_{n+2n-1} & a_{n+2n} & a_{n+2n+1} & a_{n+2n+2} \\ a_{n+30} & a_{n+31} & \dots & a_{n+3n-1} & a_{n+3n} & a_{n+3n+1} & a_{n+3n+2} \end{vmatrix}$$

Nun ist allgemein

$$A_k^{(n)} = (-1)^{n+k} \begin{vmatrix} S_1 & \dots & S_{n-k} & S_{n-k+2} & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & \dots & S_{n-k+1} & S_{n-k+3} & \dots & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & \dots & S_{2n-k-1} & S_{2n-k+1} & \dots & S_{2n} \end{vmatrix}$$

also

$$A_0^{(n+1)} = (-1)^{n+1} \frac{\partial^2 E}{\partial a_{n+2n+1} \partial a_{n+3n+2}}; \quad A_1^{(n+2)} = (-1)^n \frac{\partial E}{\partial a_{n+2n+2}}$$

$$A_{k+1}^{(n+1)} = (-1)^{n+1} \frac{\partial^2 E}{\partial a_{n-k+1, n+1} \partial a_{n+3n+2}};$$

$$A_{k+2}^{(n+2)} = (-1)^n \frac{\partial E}{\partial a_{n-k+1, n+2}}$$

und daher die Determinante

$$\left| \begin{array}{cc} A_1^{(n+2)} & A_0^{(n+1)} \\ A_{k+2}^{(n+2)} & A_{k+1}^{(n+1)} \end{array} \right| = - \frac{\partial}{\partial a_{n+3n+2}} \cdot \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial E}{\partial a_{n+2n+2}} & \frac{\partial E}{\partial a_{n+2n+1}} \\ \frac{\partial E}{\partial a_{n-k+1n+2}} & \frac{\partial E}{\partial a_{n-k+1n+1}} \end{array} \right|$$

oder

$$= - \frac{\partial}{\partial a_{n+3n+2}} \left(E \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial a_{n-k+1n+1} \partial a_{n+2n+2}} \right)$$

d. h.

$$= (-1)^{n+1} \cdot A_0^{(n+2)} \frac{\partial^2 E}{\partial a_{n-k+1n+1} \partial a_{n+2n+2}}$$

Führen wir diesen Wert in die Determinante dritten Grades ein, so ergibt sich die merkwürdige Gleichung

$$(48) \quad A_0^{(n+2)} \cdot A_k^{(n)} = \left| \begin{array}{cc} A_0^{(n+1)} & A_1^{(n+1)} \\ A_{k+1}^{(n+1)} & A_{k+2}^{(n+1)} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial a_{n+k+1n+1} \partial a_{n+2n+2}} \end{array} \right|$$

speciell für $k=0$ erhält man hieraus

$$(48^*) \quad A_0^{(n+2)} \cdot A_0^{(n)} = \left| \begin{array}{cc} A_0^{(n+1)} & A_1^{(n+1)} \\ A_1^{(n+1)} & A_2^{(n+1)} + (-1)^{n+1} \frac{\partial^2 E}{\partial a_{n+1n+1} \partial a_{n+2n+2}} \end{array} \right|$$

Mit Hilfe dieser Formel kann die Gleichung (47) auf folgende Weise hergeleitet werden.

Die Division von $\Theta_{m-n}(x)$ durch $\Theta_{m-n-1}(x)$ giebt den Quotienten

$$\frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} + H_1 x \quad H_1 = \frac{C_0^{(m-n-1)} \cdot C_1^{(m-n)} - C_0^{(m-n)} C_1^{(m-n-1)}}{C_0^{(m-n-1)} C_0^{(m-n-1)}}$$

und einen Rest, der, abgesehen von dem Factor x^2 , eine ganze Function $(m-n-2)$ ten Grades von x ist. Wir setzen jetzt entsprechend dem Verfahren beim Beweise von (45)

$$\frac{\Theta_{r-n}(x)}{T(x)} = \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} + H_1 x \right\} \cdot \frac{\Theta_{r-n-1}(x)}{T(x)} - x^2 \cdot R_1(x)$$

und

$$R_1(x) = \gamma_{n+2} U_{n+2} + \gamma_{n+3} U_{n+3} + \dots + \gamma_{2n+3} U_2 + 3.$$

Die Ausdrücke $\sum_{1,r} \varepsilon_{krk'} \cdot \frac{\Theta_{r-n}(x_k)}{T_1(x_k)}$, welche wir aus den beiden vorstehenden Gleichungen bilden, liefern mit Rücksicht auf (46) für

$$L_{-3} = \frac{(-1)^n}{C_0^{(m-n-1)} C_0^{(m-n-1)}} \cdot \begin{vmatrix} D_0^{(m-n)} & 0 & D_0^{(m-n-1)} \\ D_1^{(m-n)} & D_0^{(m-n-1)} & D_1^{(m-n-1)} \\ D_2^{(m-n)} & D_1^{(m-n-1)} & D_2^{(m-n-1)} \end{vmatrix}$$

Bezeichnet man ferner die Determinante $\frac{\partial E}{\partial a_{n+3n+2}}$ mit D , so findet sich

$$\begin{vmatrix} D_1^{(m-n)} & D_0^{(m-n-1)} \\ D_2^{(m-n)} & D_1^{(m-n-1)} \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial a_{nn+1}} \begin{vmatrix} \frac{\partial D}{\partial a_{n+2n}} & \frac{\partial D}{\partial a_{n+2n+1}} \\ \frac{\partial D}{\partial a_{n+1n}} & \frac{\partial D}{\partial a_{n+1n+1}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_{nn+1}} \left(D \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial a_{n+1n} \partial a_{n+2n+1}} \right)$$

d. h.

$$= D_0^{(m-n)} \frac{\partial D}{\partial a_{nn+1}}$$

und daher

$$L_{-3} = \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)} C_0^{(m-n-1)}} \cdot \begin{vmatrix} D_0^{(m-n-1)} & D_1^{(m-n-1)} \\ D_1^{(m-n-1)} & \frac{\partial D}{\partial a_{nn+1}} + D_2^{(m-n-1)} \end{vmatrix}$$

Der Vergleich der letzten Determinante mit der in (48*) zeigt die Identität beider; daraus folgt

$$L_{-3} = \frac{C_0^{(m-n)} \cdot A_0^{(n)} \cdot A^{(n+2)}}{C_0^{(m-n-1)} C_0^{(m-n-1)}} = C_0^{(m-n-2)} \cdot \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} \right\}^2,$$

mithin

$$R_1(x) = \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} \right\}^2 \cdot \frac{\Theta_{r-n-2}(x)}{T(x)}$$

und

$$(47) \quad \Theta_{r-n}(x) = \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} + H_1 x \right\} \cdot \frac{\Theta_{r-n-1}(x)}{T(x)} - x^2 \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} \right\}^2 \Theta_{r-n-2}(x)$$

Litteratur.

1) Sylvester im Art. 11. seines Aufsatzes sub § 1. 3); vergl. auch Brioschi, Determinanten pag. 62.

2) vergl. sub § 7. 1) pag. 397. — Eine andere Ableitung dieser Gleichung giebt Jacobi „De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis“ (Crelle, Band 15. pag. 123)

3) Hattendorf in seiner Dissertation pag. 38.

4) Hattendorf in der zweiten Auflage pag. 35.

§ 10.

Joachimsthal giebt eine andere Ableitung der Gleichung (47), die hier um so weniger übergangen werden soll, weil sie Gelegenheit bietet, auch die weitem Untersuchungen Joachimsthal's auf unsern Fall auszudehnen. Joachimsthal weist nämlich zunächst nach, dass eine der Gleichung (45) ähnliche Relation für eine ganze Classe von Functionen besteht und zeigt sodann, dass zu diesen auch die Functionen ϑ gehören.

Es sei

$$T_1(x) = \frac{F'(x)}{\left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right)}$$

$$= - \sum \frac{\varepsilon_i}{x_i} \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \left(1 - \frac{x}{x_3}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

und $F'(x) = \frac{dF}{dx}$, so dass also unter ε_k die wesentlich positive Zahl verstanden wird, welche angiebt, wie oft x_k unter den Wurzeln von $F(x) = 0$ enthalten ist. Wir bezeichnen ferner mit $\chi(x)$ irgend eine rationale Function von x , von der wir nur dies Zweifache voraussetzen:

- 1) dass sie für alle reellen Werte von x stets positiv bleibt, und
- 2) dass sie für keinen Wurzelwert von $T(x) = 0$ verschwindet.

Setzen wir endlich noch

$$\mathfrak{T}_1(x) = - \sum \frac{\chi(x_1)}{x_1} \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \left(1 - \frac{x}{x_3}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

und

$$\mathfrak{T}_2(x) = - \sum \frac{\varepsilon_r^2 \cdot x_r^{2r-2}}{x_r \cdot \chi(x_r) \{T_1(x_r)\}^2} \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_{r-1}}\right)$$

so behält nach § 1. der Sturm'sche Satz für die Reihe der Reste, welche man nach Analogie der Sturm'schen Reste zweiter Gattung aus $T(x)$ und $\mathfrak{T}_1(x)$ oder aus $T(x)$ und $\mathfrak{T}_2(x)$ ableitet, seine Gültigkeit.

Wir nehmen zunächst $\mathfrak{T}_2(x)$ zum ersten Divisor, multipliciren aber $T(x)$ und $\mathfrak{T}_2(x)$ vor Ausführung der Division mit dem constanten Factor

$$\delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 \frac{\chi_1}{x_1} \frac{\chi_2}{x_2} \dots \frac{\chi_r}{x_r}$$

so dass sie, wenn man noch zur Abkürzung $\chi(x_k)$ mit χ_k bezeichnet, übergehen bez. in

$$\Phi_r(x) = (-1)^r \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 \cdot \frac{\lambda_1}{x_1} \frac{\lambda_2}{x_2} \dots \frac{\lambda_r}{x_r} \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \left(1 - \frac{x}{x_2} \right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r} \right)$$

und

$$\Phi_{r-1}(x) = (-1)^{r-1} \Sigma \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{r-1}} \right)^2 \cdot \frac{\lambda_1}{x_1} \frac{\lambda_2}{x_2} \dots \frac{\lambda_{r-1}}{x_{r-1}} \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \left(1 - \frac{x}{x_2} \right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_{r-1}} \right)$$

denn nach (13) ist

$$T_1(x_r) = -\varepsilon_r x_r^{r-2} \left(\frac{1}{x_r} - \frac{1}{x_1} \right) \left(\frac{1}{x_r} - \frac{1}{x_2} \right) \dots \left(\frac{1}{x_r} - \frac{1}{x_{r-1}} \right)$$

Für die vorstehenden Ausdrücke von Φ_r und Φ_{r-1} findet man nach Analogie mit (35) die Determinanten

$$\Phi_r(x) = (-1)^r \begin{vmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \dots & \Sigma_{r+1} \\ \Sigma_2 & \Sigma_3 & \dots & \Sigma_{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma_r & \Sigma_{r+1} & \dots & \Sigma_{2r} \\ x^r & x^{r-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}; \quad \Phi_{r-1}(x) = (-1)^{r-1} \begin{vmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \dots & \Sigma_r \\ \Sigma_2 & \Sigma_3 & \dots & \Sigma_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma_{r-1} & \Sigma_r & \dots & \Sigma_{2r-2} \\ x^{r-1} & x^{r-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Sigma_i = \frac{\lambda_1}{x_1^i} + \frac{\lambda_2}{x_2^i} + \dots + \frac{\lambda_r}{x_r^i}$$

Diese Darstellungen zeigen, dass auch für die Functionen Φ die Relation (45) bestehen bleibt. Setzen wir daher allgemein

$$(35^*) \quad \Phi_n(x) = (-1)^n \Sigma \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \cdot \frac{\lambda_1}{x_1} \frac{\lambda_2}{x_2} \dots \frac{\lambda_n}{x_n} \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \left(1 - \frac{x}{x_2} \right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_n} \right) \\ = (-1)^n \begin{vmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \dots & \Sigma_{n+1} \\ \Sigma_2 & \Sigma_3 & \dots & \Sigma_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma_n & \Sigma_{n+1} & \dots & \Sigma_{2n} \\ x^n & x^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

und bezeichnen der Reihe nach mit $A_0^{(n)}$, $A_1^{(n)}$, ... $A_n^{(n)}$ die Coefficienten in den nach wachsenden Potenzen von x geordneten Function $\Phi_n(x)$, so ist

$$(45^*) \quad \Phi_{n+2}(x) = \left\{ \frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} + Hx \right\} \Phi_{n+1}(x) - x^2 \left\{ \frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} \right\}^2 \Phi_n(x) \\ H = \frac{A_0^{(n+1)} \cdot A_1^{(n+2)} - A_0^{(n+2)} \cdot A_1^{(n+1)}}{A_0^{(n+1)} \cdot A_0^{(n+1)}}$$

Wir erhalten so den Satz:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{r-2} &= (-1)^r \frac{\chi_1}{x_1} \dots \frac{\chi_r}{x_r} \cdot \delta \left(\frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 (-1)^2 \sum \frac{x_1 x_2}{\chi_1 \chi_2} \cdot \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 \cdot (x_1 x_2)^{2r-4}}{\{T_1(x_1) \cdot T_1(x_2)\}^2} \times \\
 &\quad \delta \left(\frac{1}{x_1 x_2} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{x_2} \right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r} \right) \\
 &\dots \dots \dots \\
 \Phi_{r-n} &= \\
 &\quad (-1)^r \frac{\chi_1}{x_1} \dots \frac{\chi_r}{x_r} \cdot \delta \left(\frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 (-1)^n \sum \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{\chi_1 \chi_2 \dots \chi_n} \cdot \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n)^2 \cdot (x_1 x_2 \dots x_n)^{2r-4}}{\{T_1(x_1) \cdot T_1(x_2) \dots T_1(x_n)\}^2} \\
 &\quad \times \delta \left(\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{x_{n+1}} \right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r} \right) \\
 &\dots \dots \dots \\
 \Phi_1 &= \\
 &\quad (-1)^r \frac{\chi_1}{x_1} \dots \frac{\chi_r}{x_r} \delta \left(\frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 (-1)^{r-1} \sum \frac{x_1 x_2 \dots x_{r-1}}{\chi_1 \chi_2 \dots \chi_{r-1}} \cdot \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{r-1})^2 \cdot (x_1 x_2 \dots x_{r-1})^{2r-4}}{\{T_1(x_1) \cdot T_1(x_2) \dots T_1(x_{r-1})\}^2} \\
 &\quad \times \delta \left(\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_{r-1}} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{x_r} \right) \\
 1 = \Phi_0 &= \\
 &\quad (-1)^r \frac{\chi_1}{x_1} \dots \frac{\chi_r}{x_r} \cdot \delta \left(\frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 (-1)^r \sum \frac{x_1 x_2 \dots x_r}{\chi_1 \chi_2 \dots \chi_r} \cdot \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r)^2 \cdot (x_1 x_2 \dots x_r)^{2r-4}}{\{T_1(x_1) \cdot T_1(x_2) \dots T_1(x_r)\}^2} \\
 &\quad \times \delta \left(\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_r} \right)^2
 \end{aligned}$$

Wir lassen den gemeinsamen Factor aller Φ fort und vertauschen $\frac{\varepsilon_k^2 \cdot x_k^{2r-2}}{\chi_k \{T_1(x_k)\}^2}$ mit χ_k , so dass wieder χ eine sonst beliebige rationale Function von x bezeichnet, die nur den oben erwähnten Voraussetzungen genügt. Setzen wir daher allgemein

$$\begin{aligned}
 (15^*) \quad \Theta_{r-n}(x) &= (-1)^n \sum \frac{\chi_1 \chi_2 \dots \chi_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \cdot \delta \left(\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{x_{n+1}} \right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r} \right) \\
 &= C_0^{(r-n)} + C_1^{(r-n)} x + \dots + C_n^{(r-n)} x^n
 \end{aligned}$$

so ist auch

$$(47^*) \quad \Theta_{r-n}(x) = \left\{ \frac{C_0^{(r-n)}}{C_0^{(r-n-1)}} + H_1 x \right\} \Theta_{r-n-1}(x) - x^2 \left\{ \frac{C_0^{(r-n)}}{C_0^{(r-n-1)}} \right\}^2 \Theta_{r-n-2}(x)$$

und für die Functionen

$$\Theta_r(x), \quad \Theta_{r-1}(x), \quad \dots \quad \Theta_2(x), \quad \Theta_1(x), \quad \Theta_0(x)$$

gilt der Sturm'sche Satz. Ist endlich speciell $\chi(x_k) = \varepsilon_k$, so wird $\Theta_{r-n}(x)$ zu $\theta_{r-n}(x)$ und die Gleichung (47*) geht in (47) über, wenn wir in ihr

$$\begin{aligned}\Theta_{r-n} &= \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_n}\right) \cdot \theta_{r-n} \\ &= C_0^{(m-n)} + C_1^{m-n}x + \dots + C_n^{m-n}x^n\end{aligned}$$

setzen.

Litteratur:

Die § 7. 1) erwähnte Abhandlung von Joachimsthal (pag. 40).

§ 11.

Aus der Gleichung

$$(11^*) \quad x^{2(n-1)} \cdot T_n(x) = T_1(x) \cdot q_1 q_{n-1} - T'(x) \cdot q_2 q_{n-1}.$$

folgt, wenn $T_n(x) = u(q_1 q_{n-1})$ gesetzt wird,

$$(49) \quad T_n(x_k) = u_k(q_1 q_{n-1})_k$$

für $k = 1, 2, \dots, r$, wo u_k den Wert $\frac{T_1(x_k)}{x_k^{2(n-1)}} = \frac{\varepsilon_k T'(x_k)}{x_k^{2(n-1)}}$ hat und unter $(q_1 q_{n-1})_k$ der Wert verstanden wird, welchen $q_1 q_{n-1}$ für $x = x_k$ annimmt. Eliminiert man aus den r Gleichungen (49) und aus der Gleichung

$$T_n(x) = u \cdot q_1 q_{n-1}$$

die $r+1$ Coefficienten von $T_n(x)$ und $q_1 q_{n-1}$ und entwickelt die Determinanten, welche den Zähler und Nenner von u bilden, so erhält man die Cauchy'sche Formel (22), aus der sich dann, wie im § 4. gezeigt wurde, die Ausdrücke der ϑ und φ durch die Wurzeln der Gleichung $T(x) = 0$ ergeben. — Bleibt man aber bei den unentwickelten Determinanten stehen, so werden die Functionen $q_1 q_{n-1}$ und $T_n(x)$ direct als Determinanten gefunden. Diese Herleitung liefert zugleich einen neuen Beweis dafür, dass die Zeichenreihen der bez. durch die Gleichungen (35) und (26) definirten Functionen φ und θ den Zeichenreihen der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung äquivalent sind.

Wir eliminiren aus den r Gleichungen (49) zuerst die $(r-n)$ Coefficienten von $T_n(x)$ und danach aus den nach der Elimination erhaltenen Gleichungen und aus

$$(50) \quad q_1 q_{n-1} = \alpha_0^{(n-1)} + \alpha_1^{(n-1)}x + \alpha_2^{(n-1)}x^2 + \dots + \alpha_{n-1}^{(n-1)}x^{n-1}$$

auch die n Coefficienten von $q_1 q_{n-1}$.

Nach (49) ist

$$(51) \quad \sum_{1,r}^k \frac{x_k^i \cdot T_n(x_k)}{T'(x_k)} = \sum_{1,r}^k \frac{x_k^i \cdot u_k \cdot (q_1 q_{n-1})_k}{T'(x_k)}$$

Die Partialbruchzerlegung gibt die Identität

$$(52) \quad \frac{T_n(x)}{T(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{T_n(x_k)}{(x-x_k)T'(x_k)}$$

Entwickelt man beide Seiten der Gleichung (52) nach fallenden Potenzen von x , so beginnt die Reihe links mit einem Gliede, welches $\frac{1}{x^n}$ enthält, es müssen daher alle Glieder der rechten Seite, welche mit einer höheren Potenz von x , als der $-n$ -ten multiplicirt sind, identisch verschwinden, d. h. es muss

$$\sum_{1, r}^k \frac{x_k^i T_n(x_k)}{T'(x_k)} = 0 \text{ sein für } i = n-2, n-3, \dots, 2, 1, 0$$

Es ist also nach (51) auch $\sum_{1,r}^k \frac{x_k^i \cdot u_k \cdot (q_1 q_{n-1})_k}{T''(x_k)}$ oder wenn man für u_k seinen Wert $\frac{\varepsilon_k \cdot T'(x_k)}{x_k 2(n-1)}$ substituiert,

$$(51^*) \quad \sum_{l=1}^k \frac{x_k^l \cdot \varepsilon_k \cdot (q_l q_{n-1})^k}{x_k^{2(n-1)}} = 0 \text{ für } i = n-2, n-3, \dots, 1, 0$$

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf die Definitionsgleichung für q, q_{n-1} das folgende System von Gleichungen

$$(53) \quad \begin{cases} \alpha_0^{(n-1)} S_n + \alpha_1^{(n-1)} S_{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}^{(n-1)} S_1 = 0 \\ \alpha_0^{(n-1)} S_{n+1} + \alpha_1^{(n-1)} S_n + \dots + \alpha_{n-1}^{(n-1)} S_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0^{(n-1)} S_{2n-2} + \alpha_1^{(n-1)} S_{2n-3} + \dots + \alpha_{n-1}^{(n-1)} S_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Aus diesem folgt in Verbindung mit (50)

$$q_1 q_{n-1} = \frac{\alpha_0^{(n-1)}}{\mathcal{A}_{n-1}} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Es sei $\gamma_0^{(r-n)}$ die Constante in $T_n(x)$; wir finden für diese, wenn wir in (52) $x = 0$ setzen, den Wert

$$\gamma_0^{(r-n)} = - \sum_{1 \leq k \leq r} \frac{T_n(x_k)}{x_k \cdot T'(x_k)}$$

oder nach (51)

$$\gamma_0^{(r-n)} = - \sum_{1,r}^k \frac{u_k \cdot (q_1 q_{n-1})_k}{x_k \cdot T'(x_k)} = - \sum_{1,r}^k \frac{\varepsilon_k \cdot (q_1 q_{n-1})_k}{x_k \cdot x_k^{2n-2}}$$

also entwickelt

$$\gamma_0^{(r-n)} = -(\alpha_0^{(n-1)} S_{2n-1} + \alpha_1^{(n-1)} S_{2n-2} + \dots + \alpha_{n-1}^{(n-1)} S_n)$$

Verbinden wir diese Gleichung mit dem System (53), so erhalten wir die Relation

$$(54) \quad -\gamma_0^{(r-n)} \mathcal{A}_{n-1} = \alpha_0^{(n-1)} \mathcal{A}_n$$

daher ist auch

$$(55) \quad q_1 q_{n-1} = - \frac{\gamma_0^{(r-n)}}{\mathcal{A}_n} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Es bleibt noch der constante Factor $-\frac{\gamma_0^{(r-n)}}{\mathcal{A}_n}$ zu bestimmen. Die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^{2(n-1)} \cdot T_n(x) &= T_1(x) \cdot q_1 q_{n-1} - T(x) \cdot q_2 q_{n-1} \\ x^{2(n-2)} \cdot T_{n-1}(x) &= T_1(x) \cdot q_1 q_{n-2} - T(x) \cdot q_2 q_{n-2} \end{aligned}$$

geben mit Rücksicht darauf, dass

$$q_1 q_{n-2} \cdot q_2 q_{n-1} - q_2 q_{n-2} \cdot q_1 q_{n-1} = x^{2(n-1)} \text{ ist:}$$

$$T(x) = T_{n-1}(x) \cdot q_1 q_{n-1} - x^2 \cdot T_n(x) \cdot q_1 q_{n-2}$$

Die constanten Glieder müssen beiderseits dieselben sein

$$1 = \gamma_0^{(r-n+1)} \cdot \alpha_0^{(n-1)}$$

Die Elimination von $\alpha_0^{(n-1)}$ aus der letzten Gleichung und aus (54) führt zu der Recursionsformel

$$\gamma_0^{(r-n)} = - \frac{1}{\gamma_0^{(r-n+1)}} \cdot \frac{\mathcal{A}_n}{\mathcal{A}_{n-1}}$$

Nun ist die Constante in $T_1(x)$

$$\gamma_0^{(r-1)} = - \sum_{r,1}^k \frac{\varepsilon_k}{x_k} = -S_1 = -\mathcal{A}_1$$

also allgemein

$$\begin{aligned} \gamma_0^{(r-2n)} &= \frac{(\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_4 \dots \mathcal{A}_{2n-2})^2}{(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_5 \dots \mathcal{A}_{2n-1})^2} \mathcal{A}_{2n} \\ \gamma_0^{(r-2n-1)} &= - \frac{(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_3 \dots \mathcal{A}_{2n-1})^2}{(\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_4 \dots \mathcal{A}_{2n})^2} \mathcal{A}_{2n+1} \end{aligned}$$

Es unterscheidet sich also $q_1 q_{n-1}$ von der durch Gleichung (35) definirten Function $\varphi_{n-1}(x)$ nur durch einen stets positiven Factor.

Man kann $T_n(x)$ in analoger Weise wie $q_1 q_{n-1}$ ableiten; denn aus der Gleichung $T_n(x_k) = u_k \cdot (q_1 q_{n-1})_k$ folgt auch

$$(51a) \quad \sum_{i=1}^k \frac{x_k^i \cdot (q_1 q_{n-1})_k}{T'(x_k)} = \sum_{i=1}^k \frac{x_k^i \cdot T_n(x_k)}{u_k \cdot T'(x_k)}$$

Die Partialbruchzerlegung von $\frac{q_1 q_{n-1}}{T(x)}$ zeigt, dass die linke Seite der Gleichung (51a) den Wert Null hat für $i = 0, 1, \dots, r-n-1$ und den Wert $-\alpha_0^{(n-1)}$ für $i = -1$, also ist

$$(51^*a) \quad \sum_{1 \leq k \leq r} \frac{x_k^i T_n(x_k)}{u_k \cdot T'(x_k)} = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0, 1, \dots, r-n-1, \\ -\alpha_0^{(n-1)} & \text{für } i = -1, \end{cases}$$

oder, da $u_k = \frac{T_1(x_k)}{T_1^2(n-1)}$,

$$\sum_{\lambda} \frac{x_k^\lambda \cdot T_n(x_k)}{T_1(x_k) \cdot T'(x_k)} = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda = 2n-2, 2n-1, \dots, r+n-3, \\ -\alpha_0^{(n-1)} & \text{für } \lambda = 2n-3. \end{cases}$$

Setzen wir daher

$$T_n(x) = \gamma_0^{(r-n)} + \gamma_1^{(r-n)}x + \dots + \gamma_{r-n}^{(r-n)}x^{r-n}$$

und bezeichnen noch

$$\sum_{k=1}^r \frac{x_k^\lambda}{T_k(x_k) \cdot T'_k(x_k)} \text{ mit } v_{2r-2-\lambda}.$$

so erhalten wir dies System von Gleichungen

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \gamma_{r-n}^{(r-n)} v_1 + \gamma_{r-n-1}^{(r-n)} v_2 + \dots + \gamma_0^{(r-n)} v_{r-n+1} \\ 0 = \gamma_{r-n}^{(r-n)} v_2 + \gamma_{r-n-1}^{(r-n)} v_3 + \dots + \gamma_0^{(r-n)} v_{r-n+2} \\ \vdots \\ 0 = \gamma_{r-n}^{(r-n)} v_{r-n} + \gamma_{r-n-1}^{(r-n)} v_{r-n+1} + \dots + \gamma_0^{(r-n)} v_{2r-2n} \end{array} \right.$$

und

(56*)

$$-\alpha_0^{n-1} = \gamma_{r-n}^{(r-n)} \cdot v_{r-n+1} + \gamma_{r-n-1}^{(r-n)} \cdot v_{r-n+2} + \dots + \gamma_0^{(r-n)} \cdot v_{2r-2n+1}$$

Wir substituieren die Werte, welche sich aus (56) für die Verhältnisse der Coefficienten von $T_n(x)$ ergeben, in den Ausdruck für $T_n(x)$ und finden so

$$T_n(x) = \frac{\gamma_0^{(r-n)}}{R_{r-n}} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{r-n+1} \\ v_2 & v_3 & \dots & v_{r-n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{r-n} & v_{r-n+1} & \dots & v_{2r-2n} \\ x^{r-n} & x^{r-n+1} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$R_{r-n} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{r-n} \\ v_2 & v_3 & \dots & v_{r-n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{r-n} & v_{r-n+1} & \dots & v_{2r-2n-1} \end{vmatrix}$$

Zur Bestimmung des constanten Factors $\frac{\gamma_0^{(r-n)}}{R_{r-n}}$ ergibt sich aus (56) und (56*) die Formel

$$\gamma_0^{(r-n)}, R_{r-n+1} = -\alpha_0^{(n-1)} \cdot R_{r-n}$$

$$\text{d. i.} = -\frac{1}{\gamma_0^{(r-n+1)}} R_{r-n} \quad (\text{da } \alpha_0^{(n-1)} \cdot \gamma_0^{(r-n+1)} = 1 \text{ (pag. 54)})$$

durch deren wiederholte Anwendung man zeigt, dass

$$R_{r-n} = (-1)^n \cdot \gamma_0^{(r-n)} \cdot (\gamma_0^{(r-n+1)})^2 \cdot (\gamma_0^{(r-n+2)})^2 \dots (\gamma_0^{(r-1)})^2 \cdot \gamma_0^{(r)} \cdot R_r$$

ist. Es ist daher die durch die Determinanten

$$(-1)^n \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{r-n+1} \\ v_2 & v_3 & \dots & v_{r-n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{r-n} & v_{r-n+1} & \dots & v_{2r-2n} \\ x^{r-n} & x^{r-n+1} & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (n = 0, 1, \dots, r)$$

dargestellte Functionenreihe der Sturm'schen zweiter Gattung äquivalent.

Um aber $T_n(x)$ ebenso wie $q_1 q_{n-1}$ durch eine Determinante n ten Grades darzustellen, ersetzen wir in (52) $T_n(x_k)$ durch

$$u_k(q_1 q_{n-1})_k = \frac{\varepsilon_k \cdot T'(x_k) (q_1 q_{n-1})_k}{x_k^{2(n-1)}}; \text{ es wird}$$

$$\frac{T_n(x)}{T'(x)} = -\sum \frac{\varepsilon_k \cdot (q_1 q_{n-1})_k}{x_k \cdot x_k^{2(n-1)} \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)}$$

oder

$$-\frac{T_n(x)}{T'(x)} = \alpha_0^{(n-1)} \cdot U_{2n-1} + \alpha_1^{(n-1)} \cdot U_{2n-2} + \dots + \alpha_{n-1}^{(n-1)} \cdot U_n$$

wo wieder mit U_i die Summe $\sum_{1,r}^k \frac{\varepsilon_k}{x_k^i} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_k}\right)}$ bezeichnet ist. Ver-

bindet man diese Gleichung mit dem System (53), so sieht man, dass

$$\frac{T_n(x)}{T(x)} = -\frac{\alpha_0^{(n-1)}}{A_{n-1}} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix}$$

ist; hieraus folgt mit Rücksicht auf die obige Constantenbestimmung,

dass $\frac{T_n(x)}{T(x)}$ bis auf einen wesentlich positiven Factor mit

$$(26) \quad \frac{\theta_{r-n}(x)}{T(x)} = (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix}$$

übereinstimmt.

Litteratur:

Die in diesem Paragraphen gegebene Herleitung ist eine Specialisirung der Untersuchungen Jacobi's in dem Aufsatz § 8. 2) — Man vergleiche noch, besonders bezüglich der Constantenbestimmung

Brioschi „Sur les fonctions de Sturm“ (Nouvelles Annales de Mathématiques. T. 13. pag. 71). — Den allgemeineren Fall, dass der erste Divisor von einem um e ($e > 1$) niedrigeren Grade, als $F(x)$ ist, behandelt Brioschi in gleicher Weise in dem Aufsatz § 6. 2) pag. 304.

Ueber die Darstellung von $T_n(x)$ durch eine Determinante ($r-n+1$)ten Grades vergl. Kronecker: „Ueber die verschiedenen Sturm'schen Reihen“. (Monatsberichte der Berliner Academie. Februar 1873. pag. 124 und 130).

§ 12.

Ein anderes Verfahren, die Functionen φ und ϑ direct durch die Determinanten in (35) und (26) darzustellen, geht von der Entwicklung des Kettenbruchs

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} = q_1 - \frac{x^2}{q_2} - \frac{x^2}{q_3} - \dots - \frac{x^2}{q_r}, \quad (r \geq m), \quad q_n = \alpha_n + \beta_n x$$

in eine Reihe aus.

Wir setzen

$$(50^*) \quad \begin{aligned} q_1 q_n &= \alpha_0^{(n)} + \alpha_1^{(n)} x + \dots + \alpha_n^{(n)} x^n \\ q_2 q_n &= \beta_0^{(n)} + \beta_1^{(n)} x + \dots + \beta_{n-1}^{(n)} x^{n-1} \end{aligned}$$

$$a_k = \alpha_k^{(r)} \cdot F_r(x)$$

$$b_k = \beta_k^{(r)} \cdot F_r(x)$$

Ferner müssen auf der linken Seite von (57) auch alle Glieder, welche die Potenzen x^n , x^{n+1} , ... x^{2n-1} enthalten, verschwinden; dies giebt die Gleichungen

[illegible]

Stellt man mit dem System (59) die Gleichung

$$\alpha_n^{(n)} x^n + \alpha_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + \dots + \alpha_0^{(n)} = q_1 q_n$$

zusammen, so findet sich

$$(60) \quad q_1 q_n = \frac{\alpha_0^{(n)}}{\Delta_n} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \\ x^n & x^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Durch Vergleich der Coefficienten von x^{2n} in (57) gewinnt man die Relation

$$\alpha_n^{(n)}.S_{n+1} + \alpha_{n-1}^{(n)}.S_{n+2} + \dots + \alpha_0^{(n)}.S_{2n+1} = -\frac{1}{\alpha_0^{(n+1)}}$$

aus der in Verbindung mit (59) die Recursionsformel

$$(61) \quad \alpha_0^{(n+1)} = -\frac{1}{\alpha_0^{(n)}} \cdot \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}$$

erhalten wird.

Nun ist nach (60) $q_1 = \frac{\alpha_0^{(1)}}{A_1} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 \\ x & 1 \end{vmatrix} = \alpha_1 + \beta_1 x$, also $\alpha_1 = \alpha_0^{(1)}$;

sodann ist $\alpha_1 = \frac{1}{b_0}$ und b_0 die Constante in $F_1(x)$ gleich der Constanten in $T_1(x)$ d. i. $= -S_1$ nach (13), also

$$\alpha_0^{(1)} = -\frac{1}{S_1} = -\frac{1}{\mathcal{A}_1}$$

Daher hat man nach (61) allgemein

$$\begin{aligned} \alpha_0^{(2n)} &= \frac{(\mathcal{A}_3 \mathcal{A}_5 \mathcal{A}_7 \dots \mathcal{A}_{2n-1})^2}{(\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_4 \dots \mathcal{A}_{2n-2})^2} \cdot \frac{1}{\mathcal{A}_{2n}} \\ \alpha_0^{(2n+1)} &= -\frac{(\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_4 \dots \mathcal{A}_{2n})^2}{(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_3 \dots \mathcal{A}_{2n-1})^2} \cdot \frac{1}{\mathcal{A}_{2n+1}} \end{aligned}$$

Diese Formeln zeigen, dass $q_1 q_n$, abgesehen von einem wesentlich positiven Factor, mit

$$(35) \quad \varphi_n(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \\ x^n & x^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

identisch ist.

Da man aus diesem Wert von $\varphi_n(x)$ leicht seinen Ausdruck durch die Wurzeln von $F(x) = 0$ ableitet, so kann man zur Bestimmung von $\theta_{r-n}(x)$ sich hier, wie auch im letzten Paragraphen, der Methode des Herrn Prof. Stern (§ 4.) bedienen; man erhält dann freilich für $\theta_{r-n}(x)$ die Darstellung durch die Wurzeln.

Um im Anschluss an die vorhergehenden Betrachtungen $\theta_{r-n}(x)$ sofort als Determinante aufzustellen, bemerken wir, dass nach (11)

$$x^{2n} \cdot \frac{F_{n+1}(x)}{F(x)} = q_1 q_n \cdot \frac{F_1(x)}{F(x)} - q_2 q_n$$

ist. Entwickelt man die rechte Seite dieser Gleichung nach wachsenden Potenzen von x , so beginnt nach (57) die Reihe erst mit x^{2n} ; es wird also

$$x^{2n} \cdot \frac{F_{n+1}(x)}{F(x)} = - \sum_{0,\infty} x^{2n+\lambda} \{ \alpha_n^{(n)} \cdot S_{n+\lambda+1} + \alpha_{n-1}^{(n)} \cdot S_{n+\lambda+2} + \dots + \alpha_0^{(n)} \cdot S_{2n+\lambda+1} \}$$

oder

$$\frac{F_{n+1}(x)}{F(x)} = - \left(\alpha_n^{(n)} \sum_{0,\infty} \sum_{1,r} \frac{x^\lambda \cdot \varepsilon_k}{x_k^{n+\lambda+1}} + \alpha_{n-1}^{(n)} \sum_{0,\infty} \sum_{1,r} \frac{x^\lambda \cdot \varepsilon_k}{x_k^{n+\lambda+2}} + \dots + \alpha_0^{(n)} \sum_{0,\infty} \sum_{1,r} \frac{x^\lambda \cdot \varepsilon_k}{x_k^{2n+\lambda+1}} \right)$$

Wir vertauschen hier die Reihenfolge der Summation und setzen für $\sum_{0,\infty} \frac{x^\lambda}{x_k^{n+\lambda+1}}$ den gleichgeltenden Ausdruck $\frac{1}{x_k^{n+r} \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)}$; dadurch vereinfacht sich die letzte Gleichung zu

$$\frac{F_{n+1}(x)}{F(x)} = - (\alpha_n^{(n)} \cdot U_{n+1} + \alpha_{n-1}^{(n)} \cdot U_{n+2} + \dots + \alpha_0^{(n)} \cdot U_{2n+1})$$

Aus dieser und dem System (59) folgt

$$\frac{F_{n+1}(x)}{F(x)} = -\frac{\alpha_0^{(n)}}{\Delta_n} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \\ U_{n+1} & U_{n+2} & \dots & U_{2n+1} \end{vmatrix}$$

und daher ist bis auf einen positiven constanten Factor $\frac{F_{n+1}(x)}{F(x)}$ gleich

$$(26) \quad \frac{\theta_{r-n-1}(x)}{T(x)} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \\ U_{n+1} & U_{n+2} & \dots & U_{2n+1} \end{vmatrix}$$

Litteratur:

Das in diesem Paragraphen eingeschlagene Verfahren verdanke ich einer Mitteilung des Herrn Prof. Stern. — Vergl. noch Hanckel „Ueber die Transformation von Reihen in Kettenbrüche“ (Schlömlich, Zeitschrift für Mathematik und Physik. 7. Jahrgang. pag. 338).

§ 13.

Die Functionen ϑ , φ , ψ sollen endlich unmittelbar durch die Coefficienten von $F(x)$ und $F_1(x)$ ausgedrückt werden. Wir ersetzen zu dem Zwecke die Determinante n ten Grades in (27) durch die folgende vom Grade $2n-1$

$$\vartheta_{n-n}(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & S_1 & S_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & S_2 & S_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & S_1 & \dots & S_{n-2} & S_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} & S_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_2 & S_3 & \dots & S_n & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-3} & S_{2n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & V_n & V_{n+1} & \dots & V_{2n-2} & V_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Der gewählten Bezeichnung zufolge ist $V_i = F(x) \cdot U_i$, also nach (32)

$$V_i = -\frac{F_1(x)}{x^{i-1}} - F(x) \left\{ \frac{S_{i-1}}{x} + \frac{S_{i-2}}{x^2} + \dots + \frac{S_2}{x^{i-2}} + \frac{S_1}{x^{i-1}} \right\}$$

addiren wir daher die erste, zweite, ... $(2n-2)$ te Horizontalreihe, nachdem dieselben bez. mit $\frac{F(x)}{x^{2n-2}}$, $\frac{F(x)}{x^{2n-3}}$, ... $\frac{F(x)}{x}$ multiplicirt sind,

zur letzten Horizontalreihe und nehmen aus dieser den Factor $\frac{1}{x^{2(n-1)}}$ vor die Determinante, so werden die Elemente der letzten Horizontalreihe

$$F(x), \quad x.F(x), \quad x^2.F(x), \quad \dots \quad x^{n-2}.F(x), \quad -x^{n-1}.F_1(x), \quad -x^{n-2}.F_1(x), \quad \dots \\ -x.F_1(x), \quad -F_1(x)$$

Hierauf addiren wir zu jeder der übrigen Horizontalreihen die sämtlichen über ihr stehenden, welche wir zuvor der Reihe nach von unten nach oben mit $a_1 a_2 \dots$ multipliciren, und benutzen zur Reduction der so erhaltenen Elemente die Recursionsformel (33). Abgesehen von dem stets positiven Factor $\frac{1}{x^{2n-2}}$ wird dann

$$(63) \quad \vartheta_{m-n}(x) =$$

1	0	...	0	0	...	0	b_0
a_1	1	...	0	0	...	b_0	b_1
a_2	a_1	...	0	0	...	b_1	b_2
...
a_{n-2}	a_{n-3}	...	1	0	b_0	...	b_{n-3}
a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	b_0	b_1	...	b_{n-2}
a_n	a_{n-1}	...	a_2	b_1	b_2	...	b_{n-1}
...
a_{2n-3}	a_{2n-4}	...	a_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-1}	...	b_{2n-4}
$F(x)$	$x.F(x)$...	$x^{n-2}.F(x)$	$x^{n-1}.F_1(x)$	$x^{n-2}.F_1(x)$...	$x.F_1(x)$
							$F_1(x)$

Man erhält aus der Determinante in (63) 1) $\varphi_{n-1}(x)$, wenn man 0 statt $F(x)$ und 1 statt $F_1(x)$, 2) $\psi_{n-2}(x)$, wenn man umgekehrt 1 statt $F(x)$ und 0 statt $F_1(x)$ setzt. Man findet ferner 3) das constante Glied von $\vartheta_{m-n+1}(x)$ oder $\varphi_{n-1}(x)$, ξ_{n-1} , wenn man die letzte Horizontalreihe und die letzte Verticalreihe streicht (wodurch die erste Horizontalreihe und die erste Verticalreihe zugleich mit wegfallen), 4) den Coefficienten der höchsten Potenz in $\varphi_{n-1}(x)$, wenn man die letzte Horizontal- und die n te Verticalreihe fortlässt, auch die restirende Determinante $(2n-1)$ ten Grades mit $(-1)^{n-1}$ multiplicirt. Um endlich 5) den Coefficienten der höchsten Potenz in $\vartheta_{m-n}(x)$ zu bilden, streiche man die letzte Horizontalreihe und die n te Verticalreihe und multiplicire das Resultat mit $(-1)^{n-1}.b_{m-1}$; ebenfalls streiche man in der Determinante (63) die letzte Horizontal- und die $(n-1)$ te Verticalreihe und multiplicire den Rest mit $(-1)^n.a_n$; die Summe beider Resultate giebt den höchsten Coefficienten in $\vartheta_{m-n}(x)$.

Damit der Sturm'sche Satz auf die in (63) dargestellten Functionen ϑ Anwendung finden kann, identificiren wir am einfachsten $F_1(x)$ mit $F'(x)$. Dann ist $b_r = (r+1)a_{r+1}$ und daher

$$(64) \quad \Phi_{n-n}(x) =$$

1	0	...	0	0	0	...	0	a_1
a_1	1	...	0	0	0	...	a_1	$2a_2$
a_2	a_1	...	0	0	0	...	$2a_2$	$3a_3$
...
a_{n-2}	a_{n-3}	...	1	0	a_1	...	$(n-2)a_{n-2}$	$(n-1)a_{n-1}$
a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_1	$2a_2$...	$(n-1)a_{n-1}$	na_n
a_n	a_{n-1}	...	a_2	$2a_2$	$3a_3$...	na_n	$(n+1)a_{n+1}$
...
a_{2n-3}	a_{2n-4}	...	$a_{n-1}(n-1)$	a_{n-1}	na_n	...	$(2n-3)a_{2n-3}$	$(2n-2)a_{2n-2}$
$F(x)$	$x.F(x)$...	$x^{n-2}.F(x)$	$x^{n-1}.F'(x)$	$x^n.F'(x)$...	$x.F'(x)$	$F'(x)$

Aus dieser Determinante leiten sich die übrigen Grössen, genau wie vorhin aus (63) ab.

Litteratur:

Cayley „Nouvelles Recherches sur les fonctions de M. Sturm“ (Liouville. Journal T. 13. pag. 269). Das Vorzeichen von Cayley's Functionen berichtigt Hattendorf, Dissertation § 9. — Vergl. noch Brioschi in der Abhandlung unter § 11.

§ 14.

Auch die im vorigen Paragraphen entwickelten Ausdrücke können direct erhalten werden. Setzt man nämlich in (11)

$$\varphi_{n-1}(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_{n-1}x^{n-1}$$

$$\psi_{n-2}(x) = B_0 + B_1x + \dots + B_{n-2}x^{n-2}$$

und beachtet, dass die niedrigste Potenz von x auf der linken Seite die $2(n-1)$ te ist, dass also auch auf der rechten Seite das constante Glied und die Coefficienten von x, x^2, \dots, x^{2n-3} verschwinden müssen, so ergeben sich folgende Gleichungen

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & = - & B_0 - & 0 & \dots\dots\dots & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots\dots\dots & 0 & + & b_0 & A_0 \\
0 & = - & a_1 & B_0 - & B_1 - \dots\dots\dots & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots\dots\dots & b_0 & + & b_1 & A_1 + b_1 & A_0 \\
0 & = - & a_2 & B_0 - & a_1 & B_1 - \dots\dots\dots & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots\dots\dots & b_1 & + & A_1 + b_2 & A_0
\end{array}$$

Bezeichnet man daher mit D_n und ξ_{n-1} die Determinanten

$D_n =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 & b_0 & \dots & b_{n-3} & b_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-1} & \dots & b_{2n-4} & b_{2n-3} \\ F(x) & x.F(x) & \dots & x^{n-2}.F(x) & x^{n-1}.F_1(x) & x^{n-2}.F_1(x) & \dots & x.F_1(x) & F_1(x) \end{vmatrix}$$

$$\xi_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-4} & a_{2n-5} & \dots & a_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-1} & \dots & b_{2n-5} & b_{2n-4} \end{vmatrix}$$

so wird

$$x^{2(n-1)}.\vartheta_{m-n}(x).\xi_{n-1} = A_0.D_n$$

oder wenn $A_0 = \xi_{n-1}$ genommen und der stets positive Factor $x^{2(n-1)}$ unterdrückt wird,

$$(65) \quad \vartheta_{m-n}(x) = D_n$$

Es ist noch zu zeigen, dass diese Function mit $F_n(x)$ im Vorzeichen übereinstimmt. Da $\vartheta_{m-n}(x)$ und $\varphi_n(x)$ dasselbe constante Glied, ξ_n , haben, so findet man hier wie im § 3. die Relation

$$\lambda_n.\lambda_{n-1} = \xi_n^2$$

aus der folgt, dass die constanten Factoren, durch welche sich die Functionen F von den Functionen ϑ unterscheiden, sämmtlich dasselbe Vorzeichen haben. Nun unterscheidet sich aber das constante Glied in $F_2(x)$

$$\frac{1}{b_0^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & b_0 \\ a_1 & b_0 & b_1 \\ a_2 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

nur durch den positiven Factor $\frac{1}{b_0^2}$ von der Constanten in $\vartheta_{m-2}(x)$, es haben daher überhaupt die durch (65) dargestellten Functionen mit den Functionen F gleiches Vorzeichen. — Die Gleichung (65) ist identisch mit (63).

Litteratur:

Jacobi (1836 sub § 9. 2) pag. 119), Sturm (1842 sub § 2. 2) pag. 359) und Sylvester (1853 sub § 3. 2) im Art. 2.) bemerken, dass die $2n-2$ Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten von $\varphi_{n-1}(x)$ und $\psi_{n-2}(x)$, welche sich unmittelbar aus der Functionalgleichung ergeben, zu einer directen Bestimmung der Functionen $\varphi_{m-n}(x)$, $\varphi_{n-1}(x)$ und $\psi_{n-2}(x)$ (von einem constanten, allen drei gemeinsamen Factor abgesehen) hinreichen. Hattendorf (Dissertation § 10.) hat zuerst diese Herleitungen wirklich durchgeführt.

§ 15.

Bei dem gewöhnlichen, bisher betrachteten Verfahren, die Sturm'schen Reste zu bilden, wurde die Division stets so weit fortgesetzt, bis der Quotient ein Binom darstellte. Man kann dagegen auch jede Division schon nach einmaliger Ausführung derselben abbrechen. Dann erhält man folgendes Schema

$$\begin{array}{ll}
 F(x) = \alpha_0 \cdot F_1(x) + x \cdot U_2; & F_1(x) = \alpha_1 \cdot U_2 + x \cdot W_3 \\
 U_2 = \alpha_2 \cdot W_3 + x \cdot U_4; & W_3 = \alpha_3 \cdot U_4 + x \cdot W_5 \\
 U_4 = \alpha_4 \cdot W_5 + x \cdot U_6; & W_5 = \alpha_5 \cdot U_6 + x \cdot W_7 \\
 (66) \quad \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 U_{2n-2} = \alpha_{2n-2} \cdot W_{2n-1} + x \cdot U_{2n}; & W_{2n-1} = \alpha_{2n-1} \cdot U_{2n} + x \cdot W_{2n+1} \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 U_{2r-2} = \alpha_{2r-2} \cdot W_{2r-1} + x \cdot U_{2r}; & W_{2r-1} = \alpha_{2r-1} \cdot U_{2r}
 \end{array}$$

dem der Kettenbruch entspricht

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} = \alpha_0 + \frac{x}{\alpha_1 + \frac{x}{\alpha_2 + \dots + \frac{x}{\alpha_{2r-2} + \frac{x}{\alpha_{2r-1}}}}} \quad (r \leq m)$$

Wir nehmen an, dass in keiner der Functionen U und W das constante Glied und der Coefficient der höchsten Potenz von x verschwinden. Unter dieser Voraussetzung ist U_2 vom Grade $m-1$, W_3 vom Grade $m-2$ und allgemein jede Function U von demselben Grade, wie die ihr vorhergehende Function W , jede Function W aber von einem um 1 niedrigerem Grade, als die ihr vorhergehende Function U . Ist der gemeinsame Factor von $F(x)$ und $F_1(x)$ vom Grade $m-r$, so ist W_{2r-1} die letzte der Functionen W , U_{2r} die letzte der Functionen U ; U_{2r} ist jener gemeinschaftliche Factor.

Um die bei diesem Verfahren auftretenden Functionen mit den Sturm'schen Functionen zweiter Gattung in Beziehung zu setzen,

eliminiren wir aus (66) die U und vergleichen die entstehenden Gleichungen mit (3); es findet sich

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \frac{1}{\alpha_1} W_3; & F_3(x) &= \frac{\alpha_1}{\alpha_3} W_5 \\ F_4(x) &= \frac{\alpha_3}{\alpha_1 \alpha_5} W_7; & F_5(x) &= \frac{\alpha_1 \alpha_5}{\alpha_3 \alpha_7} W_9 \\ &\dots & &\dots \\ F_{2n}(x) &= \frac{\alpha_3 \alpha_7 \dots \alpha_{4n-5}}{\alpha_1 \alpha_5 \alpha_9 \dots \alpha_{4n-3}} W_{4n-1}; & F_{2n+1}(x) &= \frac{\alpha_1 \alpha_5 \dots \alpha_{4n-3}}{\alpha_3 \alpha_7 \dots \alpha_{4n-1}} W_{4n+1} \\ &\dots & &\dots \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} a_0 = 1, \quad a_1, \quad a_2, \quad \dots \quad a_m & \text{ die Coefficienten von } F(x), \\ b_0, \quad b_1, \quad b_2, \quad \dots \quad b_{m-1} & \text{ die Coefficienten von } F_1(x), \\ & \dots \\ c_0^{(2n-1)}, c_1^{(2n-1)}, c_2^{(2n-1)}, \dots c_{m-n}^{(2n-1)} & \text{ die Coefficienten von } W_{2n-1}, \\ c_0^{(2n)}, c_1^{(2n)}, c_2^{(2n)}, \dots c_{m-n}^{(2n)} & \text{ die Coefficienten von } U_{2n} \end{aligned}$$

in der Reihenfolge, wie sie wachsenden Potenzen von x entsprechen, so erhält man unmittelbar aus dem Gange der Division zur Berechnung der Coefficienten die Recursionsformel

$$(67) \quad c_s^{(k+2)} = c_{s+1}^{(k)} - \alpha_k c_{s+1}^{(k+1)}$$

wobei $c_s^{(0)} = a_s$ und $c_s^{(1)} = b_s$, und für den Theilnenner α_k den Wert

$$(68) \quad \alpha_k = \frac{c_0^{(k)}}{c_0^{(k+1)}}$$

Die Einführung dieses Ausdrucks in (67) giebt die Formel

$$(67^*) \quad c_s^{(k+2)} = \frac{1}{c_0^{(k+1)}} \begin{vmatrix} c_0^{(k+1)} & c_0^{(k)} \\ c_{s+1}^{(k+1)} & c_{s+1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

durch deren wiederholte Anwendung man jeden Rest direct durch $F(x)$, $F_1(x)$ und ihre Coefficienten darstellen kann.

Zerlegt man nämlich in der Gleichung

$$c_s^{(k)} = \frac{1}{c_0^{(k-1)}} \begin{vmatrix} c_0^{(k-1)} & c_0^{(k-2)} \\ c_{s+1}^{(k-1)} & c_{s+1}^{(k-2)} \end{vmatrix}$$

die erste Verticalreihe nach (67*), so zerfällt die Determinante in zwei Determinanten, welche sich zusammenziehen lassen zu

$$\frac{1}{c_0^{(k-2)}} \begin{vmatrix} c_0^{(k-2)} & c_0^{(k-3)} & 0 \\ c_1^{(k-2)} & c_1^{(k-3)} & c_0^{(k-2)} \\ c_{s+2}^{(k-2)} & c_{s+2}^{(k-3)} & c_{s+1}^{(k-2)} \end{vmatrix}$$

Zerlegt man ebenso die letzte Verticalreihe dieser Determinante, so findet man nach einigen Reductionen

$$c_s^{(k)} = \frac{1}{c_0^{(k-1)} \cdot c_0^{(k-2)}} \begin{vmatrix} c_0^{(k-2)} & c_0^{(k-3)} & c_0^{(k-4)} \\ c_1^{(k-2)} & c_1^{(k-3)} & c_1^{(k-4)} \\ c_{s+2}^{(k-2)} & c_{s+2}^{(k-3)} & c_{s+2}^{(k-4)} \end{vmatrix}$$

Allgemein zeigt man mit denselben Mitteln die Uebereinstimmung der folgenden Determinanten

$$\begin{vmatrix} c_0^{(k-h)} & c_0^{(k-h-1)} & \dots & c_0^{(k-2h)} \\ c_1^{(k-h)} & c_1^{(k-h-1)} & \dots & c_1^{(k-2h)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{h-1}^{(k-h)} & c_{h-1}^{(k-h-1)} & \dots & c_{h-1}^{(k-2h)} \\ c_{s+h}^{(k-h)} & c_{s+h}^{(k-h-1)} & \dots & c_{s+h}^{(k-2h)} \end{vmatrix}$$

und

$$\frac{1}{c_0^{(k-h-1)}} \begin{vmatrix} c_0^{(k-h-1)} & c_0^{(k-h-2)} & \dots & c_0^{(k-2h-2)} \\ c_1^{(k-h-1)} & c_1^{(k-h-2)} & \dots & c_1^{(k-2h-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_h^{(k-h-1)} & c_h^{(k-h-2)} & \dots & c_h^{(k-2h-2)} \\ c_{s+h+1}^{(k-h-1)} & c_{s+h+1}^{(k-h-2)} & \dots & c_{s+h+1}^{(k-2h-2)} \end{vmatrix}$$

Die wiederholte Anwendung dieser Transformation führt für $k = 2n - 1$ zu dem Endresultate

$$c_0^{(2n-2)} \cdot c_0^{(2n-3)} \dots c_0^{(1)} \cdot c_s^{(2n-1)} =$$

$$\begin{vmatrix} c_0^{(1)} & c_0^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1^{(1)} & c_1^{(0)} & c_0^{(1)} & c_0^{(0)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2^{(1)} & c_2^{(0)} & c_1^{(1)} & c_1^{(0)} & c_0^{(1)} & c_0^{(0)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{2n-3}^{(1)} & c_{2n-3}^{(0)} & c_{2n-4}^{(1)} & c_{2n-4}^{(0)} & c_{2n-5}^{(1)} & c_{2n-5}^{(0)} & \dots & c_{n-2}^{(1)} \\ c_{s+2n-2}^{(1)} & c_{s+2n-2}^{(0)} & c_{s+2n-3}^{(1)} & c_{s+2n-3}^{(0)} & c_{s+2n-4}^{(1)} & c_{s+2n-4}^{(0)} & \dots & c_{s+n-1}^{(1)} \end{vmatrix}$$

Um hieraus die Function W_{2n-1} zu bilden, müssen wir die letzte Horizontalreihe mit x^s multipliciren und die für $s = 0, 1, \dots, m - n$ sich ergebenden Ausdrücke summiren. Addiren wir danach zu der letzten Horizontalreihe noch die 1te, 2te, ... $(2n-2)$ te, nachdem diese zuvor bez. mit $\frac{1}{x^{2n-2}}, \frac{1}{x^{2n-3}}, \dots, \frac{1}{x}$ multiplicirt sind, so ergibt sich

$$W_{2n-1} = \frac{1}{c_0^{(2n-2)} \cdot c_0^{(2n-3)} \dots c_0^{(1)}} \cdot \frac{1}{x^{2(n-1)}} \cdot D_n$$

wenn D_n die Determinante darstellt

$$(69) \quad D_n = \begin{vmatrix} b_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & b_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_1 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-3} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-2} & a_{n-2} & \dots & a_1 & b_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{2n-3} & a_{2n-3} & b_{2n-4} & a_{2n-4} & \dots & a_{n-1} & b_{n-2} \\ F_2(x) & F(x) & x.F_1(x) & x.F(x) & \dots & x^{n-2}.F(x) & x^{n-1}.F_1(x) \end{vmatrix}$$

Nun ist

$$F_n(x) = \frac{a_{2n-5}.a_{2n-9} \dots}{a_{2n-3}.a_{2n-7} \dots} W_{2n-1}$$

also mit Rücksicht auf (68)

$$(70) \quad F_n(x) = \frac{1}{\{c_0^{(2n-3)}, c_0^{(2n-4)}, c_0^{(2n-7)} \dots\}^2} \cdot \frac{1}{x^{2(n-1)}} \cdot D_n$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Zeichenreihen der durch die Determinanten D_n dargestellten Functionen den Zeichenreihen der Functionen $F_n(x)$ äquivalent sind.

Die Determinante (70) stimmt mit (63) und (65) überein; denn die Determinante (70) erhält nur den Factor $(-1)^{n(n-1)} = +1$, wenn man die 1te, 3te, ... $(2n-1)$ te Horizontalreihe nach einander bez. zur $(2n-1)$ ten, $(2n-2)$ ten, ... n ten macht.

Litteratur:

Dies Verfahren entwickelt Heilermann in seinen drei Aufsätzen:

1846 „Ueber die Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche“ (Crelle Bd. 33. pag. 174).

1852 „Ueber die Reste, welche bei der Anwendung des Sturm'schen Satzes vorkommen“ (Crelle Bd. 43. pag. 43).

1854 „Independente Berechnung der Sturm'schen Reste“ (Crelle Bd. 48. pag. 190).

Vergl. noch Sylvester: „On a Theory of the Syzygetic relations“ art. 10.

§ 16.

Es ist meine weitere Aufgabe zu zeigen, wie auch aus der Hermite-Jacobi'schen Betrachtungsweise die Gültigkeit des Sturm'schen Satzes für die Sturm'schen Functionen zweiter Gattung gefolgt

werden kann. Zu diesem Zwecke stelle ich zunächst kurz die Hauptpunkte dieser Methode zusammen.

Während alle Forscher vor Hermite Functionen aufzustellen suchten, welche die im § 1. unter 1), 2) und 3) entwickelten Eigenschaften besitzen, ging Hermite von dem Trägheitsgesetze der quadratischen Formen aus:

„Wenn man eine quadratische Form

$$f = \sum_{1,r}^n \sum_{1,s}^s A_{n,s} u_n u_s$$

von den r unabhängigen Variablen $u_1, u_2, \dots u_r$, in welcher die Coefficienten ($A_{n,s} = A_{s,n}$) sämtlich reell sind, mittelst einer reellen linearen Substitution

$$u_n = a_{n,1} v_1 + a_{n,2} v_2 + \dots + a_{n,r} v_r$$

in eine neue Form

$$f = \sum_{1,r}^n p_n v_n^2$$

transformirt, welche nur die Quadrate der Variablen enthält, so wird die Zahl der positiven und negativen Terme in der transformirten Form stets dieselbe sein, welche Substitution man auch gewählt haben mag.“ (Baltzer, Determinanten § 13, 15).

Zur Bestimmung dieser constanten Zahl führt am einfachsten die reelle lineare Substitution

$$u_n = v_n + a_{n+1,n} v_{n+1} + a_{n+2,n} v_{n+2} + \dots + a_{r,n} v_r$$

($n = 1, 2, \dots r$), welcher die Coefficienten

$$p_n = \frac{m_{n,n}}{m_{n-1,n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots r)$$

entsprechen, wenn $m_{n,n}$ die Determinante bezeichnet

$$(71) \quad m_{n,n} = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}$$

Die transformirte Form f enthält also so viel positive und bez. so viel negative Glieder, als Zeichenfolgen und bez. Zeichenwechsel in der Reihe

$$(72) \quad m_{0,0} = 1, \quad m_{1,1} = A_{1,1}, \quad m_{2,2}, \quad m_{3,3}, \dots m_{r,r}$$

vorkommen.

Es seien nun wie früher von den Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_m$ irgend welche Wiederholungen der unter einander verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_r$. Bezeichnen wir ferner mit $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_r(x)$ rationale Functionen von x mit reellen Coefficienten, mit a eine positive oder negative ganze ungrade Zahl, endlich mit $\omega(x)$ und $\pi(x)$ zwei Polynome mit reellen Coefficienten, welche für jeden reellen Wurzelwert von $F(x) = 0$ im Vorzeichen übereinstimmen, so führt die Betrachtung der für die Sturm'schen Functionen „erzeugenden“ quadratischen Form

$$(73) \quad f = \sum_{1,r}^k (x - x_k)^a \cdot \frac{\omega(x_k)}{\pi(x_k)} \cdot U_k^2 = \sum_{1,r}^n \sum_{1,r}^s A_{n,s} u_n u_s$$

in der

$$U_k = u_1 \cdot \varphi_1(x_k) + u_2 \cdot \varphi_2(x_k) + \dots + u_r \cdot \varphi_r(x_k)$$

$$(74) \quad A_{n,s} = \sum_{1,r}^k (x - x_k)^a \cdot \frac{\omega(x_k)}{\pi(x_k)} \cdot \varphi_n(x_k) \cdot \varphi_s(x_k)$$

auf diesen Satz:

„Für einen reellen Wert h von x stimmt die Anzahl der Zeichenfolgen in der Zeichenreihe der Functionen (72) überein mit der Anzahl der verschiedenen complexen Wurzelpaare von $F(x) = 0$, vermehrt um die Anzahl der verschiedenen reellen Wurzeln, die kleiner als h sind.

Und die Anzahl der Zeichenwechsel ist gleich der Anzahl der verschiedenen complexen Wurzelpaare, vermehrt um die Anzahl der verschiedenen reellen Wurzeln, die grösser als h sind.

Sind daher h und k reelle Zahlen und $k > h$, so liegen zwischen $x = h$ und $x = k$ so viele verschiedene reelle Wurzeln von $F(x) = 0$, wie die Zeichenreihe von (72) für $x = k$ weniger Zeichenwechsel enthält, als für $x = h$.

Vergl. Brioschi: „Sur les séries qui donnent le nombre des racines réelles des équations algébriques“ (Nouvelles Annales de Mathématiques T. 15. pag. 264).

§ 17.

Um hiernach aus den unendlich vielen Systemen von Functionen $m_{n,n}$ (71), welche die Eigenschaften der Sturm'schen Functionen besitzen, die vorhin betrachteten Functionen abzuleiten, nehmen wir die folgenden Substitutionen vor.

I.¹⁾ Unter den Voraussetzungen

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{x^n}, \quad \pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) = T_1(x), \quad a = 1$$

wird

$$\begin{aligned} A_{n,s} &= \sum_{1,r}^k (x - x_k) \cdot \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} \cdot \frac{1}{x_k^{n+s}} \\ &= - \sum_{1,r}^k \frac{\varepsilon_k}{x_k^{n+s-1}} \left(1 - \frac{x}{x_k}\right) \quad \text{d. i.} = -u_{n+s-1} \end{aligned}$$

daher

$$(75) \quad m_{n,n} = (-1)^n \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_2 & u_3 & \dots & u_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n-1} \end{vmatrix}$$

d. h. nach (42) die Function $m_{n,n}$ geht in die Sylvester'sche Function zweiter Gattung $\varphi_n(x)$ über.

II.¹⁾ Setzen wir dagegen

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{x^{n-1}}, \quad \pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) = T_1(x), \quad a = -1$$

also

$$\begin{aligned} A_{n,s} &= \sum_{1,r}^k \frac{1}{x - x_k} \cdot \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} \cdot \frac{1}{x_k^{n+s-2}} \\ &= - \sum_{1,r}^k \frac{\varepsilon_k}{x_k^{n+s-1}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_k}\right)} \quad \text{d. i.} = -U_{n+s-1} \end{aligned}$$

so ist

$$(76) \quad m_{n,n} = (-1)^n \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_n \\ U_2 & U_3 & \dots & U_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix}$$

d. h. nach (41) die Function $m_{n,n}$ ist in diesem Falle identisch mit der Sylvester'schen Function zweiter Gattung $\frac{\vartheta_{n-n}(x)}{F(x)}$.

Diese Ableitung der Functionen φ und ϑ ist gültig, es mögen die Teilnenner des Sturm'schen Kettenbruchs zweiter Gattung sämtlich linear sein oder nicht.

III.²⁾ Hält man dagegen an der Voraussetzung des § 1. fest, so kann auch aus der Methode Hermite's die Gültigkeit des Sturm-

$$\begin{array}{rcl}
 T(x) & = & (\alpha_1 + \beta_1 x).T_1(x) - x^2.T_2(x) \\
 T_1(x) & = & (\alpha_2 + \beta_2 x).T_2(x) - x^2.T_3(x) \\
 (3^*) \quad & . & . \\
 T_{i-1}(x) & = & (\alpha_i + \beta_i x).T_i(x) - x^2.T_{i+1}(x) \\
 & . & . \\
 T_{r-1}(x) & = & (\alpha_r + \beta_r x).T_r(x)
 \end{array}$$

$$\sum_{1,r}^k \frac{x_k^r \cdot T_1(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = \sum_{1,r}^k \frac{x_k^r}{T'(x_k)} = \begin{cases} 0 \text{ für } r = 0, 1, 2, \dots, r-2, \\ -1 \text{ für } r = -1, \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & \dots & 1 & \text{und} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_r} & & \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{x_1^{r-2}} & \frac{1}{x_2^{r-2}} & \dots & \frac{1}{x_r^{r-2}} & & \frac{1}{x_1^{r-1}} & \frac{1}{x_2^{r-1}} & \dots & \frac{1}{x_r^{r-1}} \\ \frac{1}{x_1^{r-2-r}} & \frac{1}{x_2^{r-2-r}} & \dots & \frac{1}{x_r^{r-2-r}} & & & & & \end{array}$$
$$\sum_{1,r}^k \frac{x_k^r \cdot T_2(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = \begin{cases} 0 & \text{für } r = 2, 3, \dots, r-1, \\ -\alpha_1 & \text{für } r = 1, \end{cases}$$
$$(77) \sum_{1,r}^k \frac{x_k^r \cdot T_i(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = \begin{cases} 0 & \text{für } r=2(i-1), 2(i-1)+1, \dots, r=2+(i-1), \\ -\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-1} & \text{für } r=2(i-1)-1, \end{cases}$$
$$(77^*) \quad \sum_{1, r}^k \frac{x_k^{r-1} x_k^{i-1-1} T_i(x_k)}{T'(x_k) T_1(x_k)} = \begin{cases} 0 & \text{für } r = i, i+1, \dots, r-1, \\ -\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-1} & \text{für } r = i-1. \end{cases}$$

Bezeichnet man mit $\gamma_0^{(r-i)}$ das constante Glied von $T_i(x)$ und setzt zur Abkürzung

$$(78) \quad \sum_{1,r}^k \frac{x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot T_i(x_k) \cdot T_i(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = S_i$$

so erhält man mit Hilfe der Relationen (77*) sofort die beiden Gleichungen

$$(79) \quad \sum_{1,r}^k \frac{x_k^{h-1-\frac{1}{2}} \cdot x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot T_h(x_k) \cdot T_i(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = 0 \text{ für } (h-i)^2 > 0$$

und

$$S_i = -\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-1} \cdot \gamma_0^{(r-i)}$$

Aus dem System (3*) ersieht man aber, dass $\gamma_0^{(r-1)} = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i}$; daher ist auch

$$(80) \quad S_i = -\frac{1}{\alpha_i}$$

Um diese wichtige Beziehung (80) herzuleiten, kann man auch ³⁾ in den Gleichungen

$$\begin{aligned} T_{i-1}(x_k) &= (\alpha_i + \beta_i x_k) \cdot T_i(x_k) - x_k^2 \cdot T_{i+1}(x_k) \\ T_i(x_k) &= (\alpha_{i+1} + \beta_{i+1} x_k) \cdot T_{i+1}(x_k) - x_k^2 \cdot T_{i+2}(x_k) \end{aligned}$$

auf beiden Seiten bez. mit $x_k^{2(i-1)-1} \cdot T_{i+1}(x_k)$ und $x_k^{2(i-1)-1} \cdot T_i(x_k)$ multipliciren und von $k=1$ bis $k=r$ summiren; man erhält mit Rücksicht auf (79)

$$\begin{aligned} S_{i+1} &= \alpha_i \cdot \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot T_i(x_k) \cdot T_{i+1}(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} \\ (80) \quad S_i &= \alpha_{i+1} \cdot \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot T_i(x_k) \cdot T_{i+1}(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} \end{aligned}$$

und daraus die gewünschte Relation

$$\alpha_{i+1} \cdot S_{i+1} = \alpha_i \cdot S_i = \dots = \alpha_1 \cdot S_1 = -1$$

denn es ist

$$S_1 = \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} = S_1 = -b_0 \quad \text{und} \quad \alpha_1 = \frac{1}{b_0}$$

Multipliziert man ferner die Gleichung

$$(3^{**}) \quad T_{i-1}(x_k) = (\alpha_i + \beta_i x_k) \cdot T_i(x_k) - x_k^2 \cdot T_{i+1}(x_k)$$

auf beiden Seiten mit $x_k^{2i-4} \cdot T_i(x_k)$ und summirt über k von 1 bis r , so erhält man

$$0 = \alpha_i \cdot \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot T_i(x_k) \cdot T_i(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} + \beta_i S_i$$

oder

$$(82) \quad \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{i-1-1} \cdot x_k^{i-1-1} \cdot T_i(x_k) \cdot T_i(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = \frac{\beta_i}{\alpha_i \cdot \alpha_i}$$

Multipliziert man endlich beide Seiten von (3**) mit $x_k^{h+i-1} \cdot T_h(x_k)$ und summiert wieder von $k = 1$ bis $k = n$, so wird

$$\alpha_i \cdot \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{h-1-1} \cdot x_k^{i-1-1} \cdot T_h(x_k) \cdot T_i(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = 0$$

wenn $(h-i)^2 > 1$, also auch

$$(83) \quad \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{h-1-1} \cdot x_k^{i-1-1} \cdot T_h(x_k) \cdot T_i(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = 0 \quad (h-i)^2 > 1$$

Setzen wir nunmehr

$$\varrho_1(x) = \frac{1}{x_1}, \quad \varrho_2(x) = \frac{q_1}{x^2}, \quad \dots \quad \varrho_n(x) = \frac{q_1 q_{n-1}}{x^n}, \quad \dots \quad \varrho_r(x) = \frac{q_1 q_{r-1}}{x^r}$$

$$\pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) = T_1(x), \quad a = 1$$

so ist zunächst nach (10*)

$$\varrho_n(x_k) = \frac{x_k^{n-2} \cdot T_n(x_k)}{T_1(x_k)}$$

und daher folgt aus (74)

$$A_{n,s} = x \cdot \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{n-1-1} \cdot x_k^{s-1-1} \cdot T_n(x_k) \cdot T_s(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} \\ - \sum_{1,r}^k \frac{x_k^{n-1-1} \cdot x_k^{s-1-1} \cdot T_n(x_k) \cdot T_s(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)}$$

Hieraus ergibt sich

erstens für $n = s$ nach (82) und (80)

$$A_{n,n} = x \frac{\beta_n}{\alpha_n \cdot \alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} = \frac{q_n}{\alpha_n^2}$$

zweitens für $s = n+1$ nach (81) und (79)

$$A_{n,n+1} = A_{n+1,n} = x \frac{S_{n+1}}{\alpha_n} = - \frac{x}{\alpha_n \cdot \alpha_{n+1}}$$

drittens für Werte von n und s , die sich um mehr als die Einheit unterscheiden,

$$A_{n,s} = 0 \text{ nach (83) und (79)}$$

Führt man diese Werte in (71) ein, schafft die Nenner vor die Determinante und multipliziert jede Horizontal- und jede Verticalreihe mit -1 , so findet sich

$$(84) \quad m_{n,n} = \frac{1}{\alpha_1^2 \cdot \alpha_2^2 \dots \alpha_n^2} \begin{vmatrix} q_1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & q_2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & q_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_{n-1} & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & q_n \end{vmatrix}$$

$$\text{d. h. } m_{n,n} = \frac{q_1 q_n}{\alpha_1^2 \cdot \alpha_2^2 \dots \alpha_n^2}$$

Wählen wir noch $x=0$, so reducirt sich q_n auf α_n , $A_{n,n}$ auf $\frac{1}{\alpha_n}$, und $A_{n,s}$ wird Null für $(n-s)^2 > 0$; daher ist in diesem Falle einfach

$$m_{n,n} = \frac{1}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

und diese Gleichung giebt wieder den Satz § 2.

IV.²) Setzt man in (73) und (74) $\alpha = 0$, so enthält die transformirte quadratische Form f so viel negative und so viel positive Quadrate, wie die Gleichung $F(x) = 0$ verschiedene Paare complex conjugirter Wurzeln besitzt.

Substituirt man gleichzeitig wie in III.

$$q_n(x) = \frac{q_1 q_{n-1}}{x_n}, \quad \pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) = T_1(x)$$

so folgt

$$A_{n,s} = \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{n-1-k} \cdot x_k^{s-1-k} \cdot T_n(x_k) \cdot T_s(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)}$$

Daher ist jetzt

$$A_{n,n} = \frac{\beta_n}{\alpha_n \cdot \alpha_n}$$

$$A_{n,n+1} = A_{n+1,n} = \frac{S_{n+1}}{\alpha_n} = -\frac{1}{\alpha_n \cdot \alpha_{n+1}}$$

$$A_{n,s} = 0 \text{ für } (n-s)^2 > 1$$

also

$$(85) \quad m_{n,n} = \frac{1}{\alpha_1^2 \cdot \alpha_2^2 \dots \alpha_n^2} \begin{vmatrix} \beta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \beta_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \beta_n \end{vmatrix}$$

Durch dies Resultat ist abermals der Satz § 2. verificirt.

Ist endlich ⁴⁾

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{x^{n+\lambda-1}}, \quad \pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) = T_1(x) \quad \text{und noch } a = 0$$

so wird

$$A_{n,s} = S_{n+s+2\lambda-2}$$

Es giebt also die Zahl der Zeichenwechsel wie der Zeichenfolgen in der Reihe der Determinanten

$$(86) \quad 1; S_{2\lambda}; \begin{vmatrix} S_{2\lambda} & S_{2\lambda+1} \\ S_{2\lambda+1} & S_{2\lambda+2} \end{vmatrix}; \dots \begin{vmatrix} S_{2\lambda} & S_{2\lambda+1} & \dots & S_{2\lambda+r-1} \\ S_{2\lambda+1} & S_{2\lambda+2} & \dots & S_{2\lambda+r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{2\lambda+r-1} & S_{2\lambda+r} & \dots & S_{2\lambda+2r-2} \end{vmatrix}$$

die Anzahl der verschiedenen imaginären Wurzeln von $F(x) = 0$ an. In (86) kann man für λ irgend eine ganze, positive oder negative, Zahl setzen und erhält danach unendlich viele äquivalente Zeichenreihen; speciell für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ gelangt man zu den Reihen (38) und (39) zurück.

Litteratur:

- 1) Vergl. die im § 16. citirte Abhandlung Brioschi's.
- 2) Brioschi: „Sur les fonctions de Sturm.“ *Comptes Rendus* T. 68. pag. 1318. 1869.
- 3) Kronecker: „Sur le théorème de Sturm.“ *Comptes Rendus* T. 68. pag. 1078. 1869.
- 4) Jacobi (Crelle, Journal Bd. 53. pag. 281).

II.

Les trois sphères des Polyèdres réguliers étoilés.

Par

Georges Dostor,

Professeur à la Faculté des sciences de l'Université catholique de Paris.

§ 1. Notice sur les Polyèdres réguliers étoilés.

1. La découverte des premiers Polyèdres étoilés paraît due à Képler. Dans son *Harmonique du Monde*¹, le grand astronome donne, à la page 52 du deuxième livre, la construction des deux dodécaèdres réguliers étoilés, qui ont des angles solides convexes. Les faces de ces deux polyèdres sont, pour l'un et pour l'autre, des pentagones réguliers étoilés; mais les angles solides, qui sont convexes dans les deux corps, sont pentaèdres dans le premier et trièdres dans le second de ces deux polyèdres étoilés.

Dans le même livre, à la page 54, Képler fournit, de chacun de ces corps constellés, un double dessin ombré, parfaitement exécuté: les deux polyèdres sont représentés chacun de face et de côté par rapport à l'un des pentagones étoilés, qui les terminent.

Il est probable que l'auteur des lois planétaires aurait été conduit immédiatement aux deux autres polyèdres réguliers étoilés, s'il avait eu l'idée de l'existence d'angles solides étoilés. On sait que ces

¹ *Harmonices mundi libri V. Lincii Austriae, MDCXIX; in-fol°.*

deux polyèdres rayonnés sont terminés, l'un par des polygones réguliers convexes, et l'autre par des triangles équilatéraux, mais que les angles solides sont, dans les deux corps, des angles pentaèdres étoilés.

Ces deux nouveaux polyèdres réguliers étoilés n'ont été trouvés qu'en 1809 par l'illustre Poinsoy, qui a établi, d'une manière générale, la Théorie des polygones et polyèdres étoilés.¹

Deux ans plus tard, Cauchy a prouvé qu'il n'existe que quatre polyèdres réguliers étoilés, et que ces polyèdres s'obtiennent, en prolongeant les arêtes ou les faces dans le dodécaèdre régulier convexe et l'icosaèdre régulier convexe.²

Enfin en 1858, M. Joseph Bertrand a établi le même principe, en rattachant aussi les polyèdres réguliers étoilés aux polyèdres réguliers convexes. La démonstration, tout aussi rigoureuse que celle de Cauchy, exige une attention moins abstraite et présente l'avantage d'une plus grande simplicité.³

C'est tout ce qui paraît avoir été tenté sur les polyèdres réguliers étoilés.

2. Dans ce mémoire, nous nous proposons d'établir les formules générales, qui lient entre eux les divers éléments d'un polyèdre régulier, que ce corps soit convexe ou étoilé. Nous ferons intervenir, dans ces formules, un nouvel élément, qui n'a pas encore été considéré jusqu'ici: le rayon de la sphère tangente aux arêtes du polyèdre régulier.

L'usage de ce rayon nous permet d'obtenir nos formules d'une manière fort simple, et nous conduit à des résultats assez remarquables, pour mériter d'être signalés.⁴

¹ Journal de l'Ecole Polytechnique, 1810; t. V, cahier 10; pages 16 à 48.

² Journal de l'Ecole Polytechnique, 1813; t. IX, cahier 16; page 68.

³ Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1858; t. XLVI; page 79.

⁴ Nous avons déjà eu l'occasion de traiter la même Question, pour les polyèdres réguliers convexes seulement, dans l'Archiv der Mathematik und Physik, t. LIX, 1876; pages 50 à 58. Mais pour ne pas rompre l'unité du sujet et donner à la théorie toute la généralité qu'elle comporte, nous avons dû donner à ce mémoire tous les développements, qui se rattachent à tous les polyèdres réguliers, qu'ils soient ou non étoilés.

§ II. Relations générales entre les rayons des trois sphères, l'une inscrite à un polyèdre régulier étoilé quelconque, l'autre tangente aux arêtes, et la troisième circonscrite au polyèdre étoilé.

3. Relation entre le rayon de la sphère inscrite et le rayon de la sphère tangente aux arêtes. Soient O le centre d'un polyèdre régulier, AB l'une des arêtes du polyèdre et C le centre de l'une des deux faces régulières, aux quelles appartient cette arête AB (Fig. 1). La droite OC sera perpendiculaire sur le plan ABC .

Abaissons CI perpendiculairement sur l'arête AB ; puis tirons les droites OI et OA . Le point I sera nécessairement le milieu de l'arête AB et la ligne OI sera perpendiculaire sur cette arête.

Cela fait, il est évident que la droite OC est le rayon r de la sphère inscrite dans le polyèdre régulier; que la droite OA est le rayon R de la sphère circonscrite à ce polyèdre; et que OI est le rayon de la sphère tangente aux arêtes du même polyèdre. Nous représenterons ce dernier rayon par ρ .

Tirons les droites OB , CA et CB .

Supposons que chaque angle solide du polyèdre ait m faces et soit de l'espèce p ; que chaque face du polyèdre soit un polygone de n côtés et de l'espèce q .

Par le rayon OA de la sphère circonscrite et par chacune des m arêtes telles que AB , qui sont issues du sommet A , menons un plan. Chacun des m plans ainsi menés formera avec le suivant un angle dièdre; et les m angles dièdres ainsi obtenus comprendront p fois l'espace rempli par les quatre dièdres droits, que l'on peut former autour du rayon OA , espace angulaire qui est mesuré par 2π . Par suite chacun de nos m dièdres sera la $m^{\text{ième}}$ partie de p fois 2π ou sera égal à $\frac{2p\pi}{m}$. Or le dièdre $COAI$, compris entre les deux plans OAC et OAI est la moitié de l'un de ces dièdres; donc on a

$$(1) \quad \text{l'angle dièdre } COAI = \frac{p\pi}{m}.$$

Puisque chaque face de notre polyèdre régulier est un polygone régulier de n côtés et de l'espèce q , l'angle au centre de l'une de ces faces sera égal à la $n^{\text{ième}}$ partie de q fois 2π ou égal à $\frac{2q\pi}{n}$; par suite on a

$$(2) \quad \text{l'angle plan } ACI = \frac{q\pi}{n}.$$

Cela posé, dans le tétraèdre $IACO$, projetons sur le plan de la face ACO l'ensemble des trois autres faces CIO , AIO et ACI ; nous obtenons l'égalité

$$ACO = CIO \cdot \cos ACI + AIO \cdot \cos COAI + ACI \cdot \cos IACO,$$

ou, en ayant égard aux valeurs (1) et (2), et en observant que $\cos IACO = \cos \frac{\pi}{2} = 0$,

$$(3) \quad ACO = CIO \cdot \cos \frac{q\pi}{n} + AIO \cdot \cos \frac{p\pi}{m}$$

Mais nous avons

$$\text{le triangle } ACO = \frac{1}{2} OC \cdot AC = \frac{1}{2} r \cdot AC,$$

$$\text{le triangle } CIO = \frac{1}{2} OC \cdot CI = \frac{1}{2} r \cdot AC \cos \frac{q\pi}{n},$$

$$\text{et le triangle } AIO = \frac{1}{2} OI \cdot AI = \frac{1}{2} \rho \cdot AC \sin \frac{q\pi}{n}.$$

Il vient donc, en substituant dans (3) et en divisant le résultat par $\frac{1}{2}AC$,

$$r = r \cos^2 \frac{q\pi}{n} + \rho \sin \frac{q\pi}{n} \cos \frac{p\pi}{m}.$$

Faisant passer $r \cos^2 \frac{q\pi}{n}$ dans le premier membre, remplaçant $1 - \cos^2 \frac{q\pi}{n}$ par $\sin^2 \frac{q\pi}{n}$, puis divisant par $\sin \frac{q\pi}{n}$, on obtient la relation

$$(I) \quad r \sin \frac{q\pi}{n} = \rho \cos \frac{p\pi}{m},$$

qui existe entre le rayon r de la sphère inscrite dans le polyèdre régulier et le rayon ρ de la sphère tangente aux arêtes du polyèdre.

4. Relation entre le rayon R de la sphère circonscrite et le rayon ρ de la sphère tangente aux arêtes. Le triangle AIO (Fig. 1) nous donne

$$OA^2 = \overline{OI}^2 + \overline{AI}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{AC}^2 \sin^2 \frac{q\pi}{n} = OI^2 + (\overline{AO}^2 - \overline{CO}^2) \sin^2 \frac{q\pi}{n},$$

ou

$$R^2 = \rho^2 + (R^2 - r^2) \sin^2 \frac{q\pi}{n}.$$

On en déduit

$$R^2 \cos^2 \frac{q\pi}{n} = \rho^2 - r^2 \sin^2 \frac{q\pi}{n}.$$

Remplaçant $r \sin \frac{q\pi}{n}$ par sa valeur $\varrho \cos \frac{p\pi}{m}$ tirée de (I), on obtient la relation demandée

$$R^2 \cos^2 \frac{q\pi}{n} = \varrho^2 - \varrho^2 \cos^2 \frac{p\pi}{m} = \varrho^2 \sin^2 \frac{p\pi}{m},$$

ou

$$(II) \quad R \cos \frac{q\pi}{n} = \varrho \sin \frac{p\pi}{m}.$$

5. **Relation entre le rayon r de la sphère inscrite et celui R de la sphère circonscrite.** Si nous divisons membre à membre les deux équations (II) et (I), nous trouvons la relation

$$\frac{R \cos \frac{q\pi}{n}}{r \sin \frac{q\pi}{n}} = \frac{\sin \frac{p\pi}{m}}{\cos \frac{p\pi}{m}},$$

qui se réduit à

$$(III) \quad \frac{R}{r} = \tan \frac{p\pi}{m} \tan \frac{q\pi}{n}.$$

Cette relation était connue pour les polyèdres réguliers convexes, c'est-à-dire pour le cas où $p = 1$ et $q = 1$.

6. **Relation entre les rayons R , r et ϱ des trois sphères.** Faisons le produit des deux égalités (I) et (II), nous obtenons la relation

$$Rr \sin \frac{q\pi}{n} \cos \frac{q\pi}{n} = \varrho^2 \sin \frac{p\pi}{m} \cos \frac{p\pi}{m},$$

qui prend la forme remarquable

$$(IV) \quad Rr \sin \frac{2q\pi}{n} = \varrho^2 \sin \frac{2p\pi}{m}.$$

§ III. Inclinaison mutuelle des faces adjacentes dans les polyèdres réguliers étoilés.

7. Nous désignerons par $2I$ l'angle plan qui mesure cette inclinaison. L'angle $2I$ est évidemment double de l'angle plan OIC (Fig. 1).

Pour trouver la valeur de I , nous ferons remarquer que le triangle rectangle OCI nous donne

$$OC = OI \sin OIC,$$

ou

$$(4) \quad r = \varrho \sin I;$$

d'où nous tirons

$$\sin I = \frac{r}{\varrho}.$$

Mais par la relation (I) nous avons

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{\cos \frac{p\pi}{m}}{\sin \frac{q\pi}{n}};$$

donc il nous vient

$$(V) \quad \sin I = \frac{\cos \frac{p\pi}{m}}{\sin \frac{q\pi}{n}}.$$

Cette expression était aussi connue pour les polyèdres réguliers convexes, ou pour le cas de $p = 1$ et $q = 1$.

Au moyen de cette formule (V) nous pouvons calculer les angles d'inclinaison des faces adjacentes dans les polyèdres réguliers étoilés comme dans les polyèdres réguliers convexes.

8. Inclinaison des faces dans le tétraèdre régulier. Dans ce polyèdre régulier convexe (Fig. 2), les faces sont triangulaires et les angles solides sont des trièdres. Nous avons donc

$$n = 3, \quad q = 1; \quad m = 3, \quad p = 1;$$

ce qui nous donne

$$\sin I = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2 \sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

et par suite

$$\cos I = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \tan I = \sqrt{2}.$$

Nous avons par conséquent

$$(a) \quad \sin 2I = \frac{2}{3} \sqrt{2}, \quad \cos 2I = \frac{1}{3}, \quad \tan 2I = 2\sqrt{2}, \quad \sec 2I = 3,$$

et

$$2I = 70^\circ 31' 43'', 6.$$

9. Inclinaison des faces dans l'hexaèdre régulier. Les faces de ce polyèdre régulier convexe (Fig. 3) sont des carrés et les angles solides sont des trièdres trirectangles. On posera donc dans la formule (V)

$$n = 4, \quad q = 1; \quad m = 3, \quad p = 1;$$

ce qui nous donne

$$\sin I = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2 \sin 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

et par suite

$$\cos I = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan I = 1.$$

Il nous vient par conséquent

$$(b) \quad \sin 2I = 1, \quad \cos 2I = 0, \quad \tan 2I = \infty,$$

et

$$2I = 90^\circ.$$

10. **Inclinaison des faces dans l'octaèdre régulier.** Dans ce corps régulier (Fig. 4) les faces sont triangulaires et les angles solides sont tétraèdres. On fera donc dans (V)

$$n = 3, \quad q = 1; \quad m = 4, \quad p = 1;$$

ce qui nous donne

$$\sin I = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2 \cos 45^\circ}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

et par suite

$$\cos I = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan I = 2.$$

Il nous vient par conséquent

$$(c) \quad \sin 2I = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \cos 2I = -\frac{1}{3}, \quad \tan 2I = -2\sqrt{2}, \quad \sec 2I = -3,$$

et

$$I = 109^\circ 28' 16'', 4.$$

Si nous comparons les valeurs (a) et (c), nous verrons que

Les inclinaisons des faces dans l'octaèdre régulier sont les suppléments des inclinaisons des faces dans le tétraèdre régulier.

11. **Identités utiles dans l'évaluation des éléments des polyèdres réguliers, qui sont terminés par des faces pentagonales, convexes ou étoilés, ou par des sommets pentaèdres convexes ou étoilés.** Puisque

$$2 \sin \frac{\pi}{5} = 2 \sin 36^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$2 \cos \frac{\pi}{10} = 2 \cos 18^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

il vient

$$4 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{10} = \frac{1}{4} \sqrt{100-20} = \frac{1}{4} \sqrt{80} = \sqrt{5}.$$

Donc on a

$$(5) \quad \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{10}}{\sqrt{5}}, \text{ et } \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{5}}{\sqrt{5}}.$$

En second lieu, comme

$$2 \sin \frac{\pi}{10} = 2 \sin 18^\circ = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1),$$

$$2 \cos \frac{\pi}{5} = 2 \cos 36^\circ = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1),$$

on a

$$4 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5} = 1.$$

Donc il vient aussi

$$(6) \quad \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{10}} = 2 \cos \frac{\pi}{5}, \text{ et } \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{5}} = 2 \sin \frac{\pi}{10}.$$

12. Inclinaison des faces dans le dodécaèdre régulier convexe.

Dans ce polyèdre régulier (Fig. 5), les faces sont des pentagones réguliers convexes et les angles solides sont des trièdres; par suite on a

$$n = 5, \quad q = 1; \quad m = 3, \quad p = 1,$$

ce qui transforme la formule (V) dans la suivante, en égard à l'identité (5),

$$\sin I = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{10}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

On en déduit, en tenant compte de (5) et de (6),

$$\cos I = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \frac{2 \sin 36^\circ}{\sqrt{5}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{5}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{10}},$$

$$\text{tang } I = \frac{\cos \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{10}} = 2 \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1);$$

par suite on a

$$(d) \quad \sin 2I = \frac{8 \cos \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos 2I = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \tan 2I = -2,$$

et

$$2I = 116^\circ 33' 54'', 2.$$

13. **Inclinaison des faces dans l'icosaèdre régulier convexe.**
Dans ce corps régulier (Fig. 6) les faces sont triangulaires et les angles solides sont des angles pentaèdres convexes. Dans la formule (V) on fera donc

$$n = 3, \quad q = 1; \quad m = 5, \quad p = 1,$$

ce qui donne

$$\sin I = \frac{\cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{5}}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2 \cos 36^\circ}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{15} + \sqrt{3}),$$

$$\cos I = \frac{1}{2}(\sqrt{15} - \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sin \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sin 36^\circ}{\sin 60^\circ},$$

$$\tan I = \frac{\cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{10}} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{5}}{2 \sin \frac{\pi}{10}} = 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)^2;$$

par suite on a

$$(e) \quad \sin 2I = \frac{2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5}}{\sin^2 \frac{\pi}{5}} = 2, \quad \cos 2I = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan 2I = -\frac{2}{\sqrt{5}};$$

et

$$2I = 138^\circ 11' 22'', 75.$$

14. **Inclinaison des faces dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à faces pentagonales étoilées et à sommets pentaèdres convexes.** On a pour ce corps régulier (Fig. 7)

$$n = 3, \quad q = 2; \quad m = 5, \quad p = 1.$$

La formule (V) donne donc, en égard à (5),

$$\sin I = \frac{\cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{10}}{\sqrt{5}}.$$

Cette valeur de $\sin I$ est la même que celle qui se rapporte au dodécaèdre régulier convexe (n° 12). Nous en concluons que

Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à faces pentagonales étoilées et à sommets pentaèdres convexes, l'inclinaison des faces est la même que dans le dodécaèdre régulier convexe.

15. Inclinaison des faces dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à faces pentagonales étoilées et à sommets trièdres. Pour ce polyèdre étoilé (Fig. 8) on a

$$n = 5, \quad q = 2; \quad m = 3, \quad p = 1.$$

On trouve donc, par la formule (V), que

$$\sin I = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{2\pi}{5}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2 \sin 36^\circ}{\sqrt{5}},$$

ou

$$\sin I = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

Le sinus de cette demi-inclinaison est par suite égal au cosinus de la demi-inclinaison du polyèdre étoilé précédent. Les demi-inclinaison des deux polyèdres sont ainsi complémentaires. Donc

Dans les deux polyèdres réguliers étoilés de Képler, les inclinaisons des faces sont supplémentaires l'une de l'autre.

Cette inclinaison est par conséquent

$$2I = 63^\circ 26' 5'',8.$$

16. Inclinaison des faces dans le dodécaèdre étoilé de Poincot. Dans ce polyèdre régulier (Fig. 9), les faces sont des pentagones convexes et les angles solides sont des angles pentaèdres étoilés. Par suite on devra poser dans (V)

$$n = 5, \quad q = 1; \quad m = 5, \quad p = 2,$$

ce qui donne

$$\sin I = \frac{\cos \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{5}}{\sqrt{5}}.$$

L'inclinaison des faces dans ce polyèdre est ainsi égale à celle du polyèdre précédent. Donc

Les faces ont même inclinaison dans le dodécaèdre régulier étoilé de Poinsoot que dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets trièdres.

17. Inclinaison des faces dans l'icosaèdre régulier étoilé de Poinsoot. Dans ce corps régulier (Fig. 10), les faces sont triangulaires et les angles solides sont des angles pentaèdres étoilés. Il suffira donc de faire, dans la formule (V),

$$n = 3, \quad q = 1; \quad m = 5, \quad p = 2.$$

On trouve ainsi que

$$\sin I = \frac{\cos \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sin \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{10}}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2 \sin 18^\circ}{2 \sin 60^\circ}$$

ou

$$\sin I = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{6}(\sqrt{15}-\sqrt{3}).$$

Si nous comparons cette valeur à l'expression de $\cos I$, dans l'icosaèdre régulier convexe (n° 13), nous voyons qu'elles sont égales; les valeurs de I sont par suite complémentaires dans les deux corps et celles de $2I$ sont supplémentaires. Donc

Dans les deux icosaèdres réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé, les inclinaisons des faces sont supplémentaires l'une de l'autre.

L'inclinaison des faces dans l'icosaèdre régulier étoilé de Poinsoot est par conséquent

$$2I = 41^\circ 48' 37''{,}25.$$

§ IV. Relations numériques entre les rayons des trois sphères dans les divers polyèdres réguliers.

18. Relations numériques entre le rayon de la sphère inscrite et celui de la sphère tangente aux arêtes. Pour les calculer, il nous suffira de faire usage de la formule (4), $r = \rho \sin I$. En y remplaçant $\sin I$ successivement par les valeurs trouvées de n° 8 à n° 17, nous obtenons les expressions suivantes:

$$\begin{array}{ll} \text{Tétraèdre régulier} & r = \frac{1}{3}\rho\sqrt{3}, \quad \rho = r\sqrt{3}. \\ \text{Hexaèdre régulier} & r = \frac{1}{2}\rho\sqrt{2}, \quad \rho = r\sqrt{2}. \end{array}$$

Octaèdre régulier . . . $r = \frac{1}{2} \varrho \sqrt{6}$, $\varrho = \frac{1}{2} r \sqrt{6}$.

Dodécaèdre régulier con-

vexe $r = \frac{1}{2} \varrho \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$, $\varrho = \frac{1}{2} r \sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Icosaèdre régulier con-

vexe $r = \frac{1}{6} \varrho \sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$, $\varrho = \frac{1}{2} r \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)$.

Dodécaèdre régulier étoilé

de Képler à sommets

pentaèdres $r = \frac{1}{2} \varrho \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$, $\varrho = \frac{1}{2} r \sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Dodécaèdre régulier étoilé

de Képler à sommets

trièdres $r = \frac{1}{2} \varrho \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$, $\varrho = \frac{1}{2} r \sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

Dodécaèdre régulier étoilé

de Poinsoot $r = \frac{1}{2} \varrho \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$, $\varrho = \frac{1}{2} r \sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

Icosaèdre régulier étoilé

de Poinsoot $r = \frac{1}{6} \varrho \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)$, $\varrho = \frac{1}{2} r \sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$.

Nous voyons par ce tableau que

1°. Dans le tétraèdre régulier, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est égal au côté du triangle équilatéral, qui se trouve inscrit dans un grand cercle de la sphère inscrite.

2°. Dans l'hexaèdre régulier, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est le côté du carré inscrit dans un grand cercle de la sphère inscrite.

3°. Dans le dodécaèdre régulier convexe et le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est égal au côté du pentagone régulier convexe, qui est inscrit dans un grand cercle de la sphère inscrite: car on a $\frac{1}{2} r \sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2r \sin \frac{\pi}{5}$.

4°. Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler à sommets trièdres, et le dodécaèdre régulier étoilé de Poinsoot, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est égal au côté du pentagone régulier étoilé, qui se trouve

inscrit dans un grand cercle de la sphère inscrite: car on a
 $\frac{1}{2}r\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 2r\sin\frac{2\pi}{5}.$

20. Nos valeurs démontrent en outre que

1°. Si le dodécaèdre régulier convexe ainsi que le dodécaèdre régulier étoilé, à sommets pentaèdres convexes sont circonscrits à une même sphère, les arêtes de ces deux polyèdres sont aussi tangentes à une même sphère.

2°. De même, si le dodécaèdre régulier étoilé à sommets trièdres et le dodécaèdre régulier étoilé à faces convexes sont circonscrits à une même sphère, leurs arêtes sont aussi tangentes à une même sphère.

21. Si nous représentons par $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ les rayons des sphères, qui sont tangentes aux arêtes des tétraèdre, hexaèdre et octaèdre réguliers, circonscrits à une même sphère de rayon r , on aura

$$\varrho_1:\varrho_2 = \varrho_3:r.$$

22. Relations numériques entre le rayon de la sphère circonscrite et celui de la sphère tangente aux arêtes. Nous ferons usage, pour le calcul de ces relations, de la formule (II) ou $R\cos\frac{q\pi}{n} = \varrho\sin\frac{p\pi}{m}.$ Elle nous fournit les valeurs suivantes:

$$\text{Tétraèdre régulier} \quad . \quad R = \varrho\sqrt{3}, \quad \varrho = \frac{1}{3}R\sqrt{3}.$$

$$\text{Hexaèdre régulier} \quad . \quad R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{6}, \quad \varrho = \frac{1}{3}R\sqrt{6}.$$

$$\text{Octaèdre régulier} \quad . \quad R = \varrho\sqrt{2}, \quad \varrho = \frac{1}{2}R\sqrt{2}.$$

Dodécaèdre régulier

$$\text{convexe} \quad . \quad . \quad . \quad R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{3}(\sqrt{5}-1), \quad \varrho = \frac{1}{6}R\sqrt{3}(\sqrt{5}+1).$$

Icosaèdre régulier

$$\text{convexe} \quad . \quad . \quad . \quad R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad \varrho = \frac{1}{4}R\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$$

Dodécaèdre régulier

étoilé de Képler,

$$\text{à sommets pentaèdres} \quad R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \quad \varrho = \frac{1}{2}R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

Dodécaèdre régulier

étoilé de Képler,

$$\text{à sommets trièdres} \quad . \quad R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{3}(\sqrt{5}+1), \quad \varrho = \frac{1}{6}R\sqrt{3}(\sqrt{5}-1).$$

Dodécaèdre régulier

$$\text{étoilé de Poincot} . . R = \frac{1}{2} \varrho \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad \varrho = \frac{1}{2} R \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

Icosaèdre régulier

$$\text{étoilé de Poincot} . . R = \frac{1}{2} \varrho \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad \varrho = \frac{1}{2} R \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

23. L'examen de ces valeurs prouve que

1°. Dans le tétraèdre régulier, le rayon de la sphère circonscrite est égal au côté du triangle équilatéral, qui se trouve inscrit dans un grand cercle de la sphère tangente aux arêtes.

2°. Dans l'octaèdre régulier, le rayon de la sphère circonscrite est égal au côté du carré inscrit dans la sphère tangente aux arêtes.

3°. Dans l'icosaèdre régulier convexe et le dodécaèdre régulier de Poincot, le rayon de la sphère circonscrite est égal au côté du pentagone régulier convexe, qui est inscrit dans un grand cercle de la sphère tangente aux arêtes.

4°. Dans le dodécaèdre régulier de Képler, à sommets pentaèdres, et l'icosaèdre régulier étoilé de Poincot, le rayon de la sphère circonscrite est égal au côté du pentagone régulier étoilé, qui est inscrit dans un grand cercle de la sphère tangente aux arêtes.

24. Si nous représentons par ϱ_1 , ϱ_2 , ϱ_3 les rayons des sphères tangentes aux arêtes, dans les tétraèdre, hexaèdre et octaèdre réguliers, qui sont inscrits dans une même sphère de rayon R , nous aurons

$$\varrho_1 : \varrho_2 = \varrho_3 : R.$$

25. **Relations numériques entre le rayon de la sphère inscrite et celui de la sphère circonscrite.** Multiplions entre elles respectivement les égalités de droite du n° 18 avec les égalités de gauche du n° 22; nous obtiendrons les valeurs de R en fonction de r , des quelles on tire de suite les expressions de r en fonction de R . Nous consignons ces valeurs dans le tableau suivant:

Tétraèdre régulier	$R = 3r,$	$r = \frac{1}{3}R.$
Hexaèdre régulier	$R = r\sqrt{3},$	$r = \frac{1}{\sqrt{3}}R\sqrt{3}.$
Octaèdre régulier	$R = r\sqrt{3},$	$r = \frac{1}{\sqrt{3}}R\sqrt{3}.$

Dodécaèdre régulier

$$\text{convexe} \dots\dots\dots R = r\sqrt{15-6\sqrt{5}}, \quad r = \frac{1}{3}R\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}}.$$

Icosaèdre régulier

$$\text{convexe} \dots\dots\dots R = r\sqrt{15-6\sqrt{5}}, \quad r = \frac{1}{3}R\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}}.$$

Dodécaèdre régulier

étoilé de Képler,

$$\text{à sommets pentaèdres } R = r\sqrt{5}, \quad r = \frac{1}{3}R\sqrt{5}.$$

Dodécaèdre régulier

étoilé de Képler,

$$\text{à sommets trièdres } R = r\sqrt{15+6\sqrt{5}}, \quad r = \frac{1}{3}R\sqrt{\frac{15-6\sqrt{5}}{5}}.$$

Dodécaèdre régulier

$$\text{étoilé de Poincot} \dots R = r\sqrt{5}, \quad r = \frac{1}{3}R\sqrt{5}.$$

Icosaèdre régulier

$$\text{étoilé de Poincot} \dots R = r\sqrt{15+6\sqrt{5}}, \quad r = \frac{1}{3}R\sqrt{\frac{15-6\sqrt{5}}{5}}.$$

26. La comparaison de ces valeurs fait voir que:

1°. Dans le tétraèdre régulier, le rayon de la sphère circonscrite est triple du rayon de la sphère inscrite.

2°. Dans l'hexaèdre et l'octaèdre réguliers, le rayon de la sphère circonscrite est égal au côté du triangle équilatéral, qui se trouve inscrit dans un grand cercle de la sphère inscrite.

3°. Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres et dans le dodécaèdre régulier étoilé de Poincot, le rayon de la sphère circonscrite est égal au rayon de la sphère inscrite multiplié par $\sqrt{5}$.

27. Les mêmes valeurs prouvent encore que

1°. Si l'hexaèdre et l'octaèdre réguliers sont inscrits dans une même sphère, ils seront aussi circonscrits à une même sphère.

2°. Si le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers convexes sont inscrits dans une même sphère, ils seront aussi circonscrits à une même sphère.

3°. Si le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, et le dodécaèdre régulier étoilé de Poinsoot sont inscrits dans une même sphère, ils seront aussi circonscrits à une même sphère.

4°. Enfin si le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets trièdres, et l'icosaèdre régulier étoilé de Poinsoot sont inscrits dans une même sphère, ils seront aussi circonscrits à une même sphère.

28. Les résultats précédents peuvent d'ailleurs se déduire directement de la formule (III)

$$\frac{R}{r} = \text{tang} \frac{p\pi}{m} \text{tang} \frac{q\pi}{n}.$$

En effet 1° on a dans l'hexaèdre régulier

$$m = 3, \quad p = 1; \quad n = 4, \quad q = 1;$$

et dans l'octaèdre régulier

$$m = 4, \quad p = 1; \quad n = 3, \quad q = 1.$$

Par suite le second membre de la relation précédente conserve la même valeur pour les deux polyèdres.

2°. Pour le dodécaèdre régulier convexe on a

$$m = 3, \quad p = 1; \quad n = 5, \quad q = 1;$$

et pour l'icosaèdre régulier convexe

$$m = 5, \quad p = 1; \quad n = 3, \quad q = 1.$$

Pour ces deux polyèdres le rapport $\frac{R}{r}$ sera donc le même.

3°. Il en sera encore ainsi pour le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, où

$$m = 5, \quad p = 1; \quad n = 5, \quad q = 2;$$

et pour le dodécaèdre régulier étoilé de Poinsoot, où

$$m = 5, \quad p = 2; \quad n = 5, \quad q = 1.$$

Et 4° de même aussi pour le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets trièdres, où

$$m = 3, \quad p = 1; \quad n = 5, \quad q = 2;$$

et l'icosaèdre régulier étoilé de Poinsoot, où

$$m = 5, \quad p = 2; \quad n = 5, \quad q = 1.$$

Dans ces quatre cas les valeurs de $\tan \frac{p\pi}{m}$ et $\tan \frac{q\pi}{n}$ s'échangent entre elles, de sorte que leur produit reste le même.

Ces polyèdres sont dits deux à deux conjugués.

Dans deux polyèdres réguliers conjugués, les faces de chacun sont de même ordre et de même espèce que les angles solides de l'autre, et réciproquement.

29. **Relation numériques entre les rayons des trois sphères.** Multiplions entre elles, d'abord les égalités de gauche, puis les égalités de droite des n° 18 et 22; nous obtiendrons pour les polyèdres réguliers, la suite des relations:

$$\text{Tétraèdre régulier } Rr = \varrho^2, \quad \varrho^2 = Rr.$$

$$\text{Hexaèdre régulier } Rr = \frac{1}{2}\varrho^2\sqrt{3}, \quad \varrho^2 = \frac{2}{3}Rr\sqrt{3}.$$

$$\text{Octaèdre régulier } Rr = \frac{2}{3}\varrho^2\sqrt{3}, \quad \varrho^2 = \frac{3}{2}Rr\sqrt{3}.$$

$$\text{Dodécaèdre régulier convexe} \dots Rr = \frac{1}{2}\varrho^2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}, \quad \varrho^2 = \frac{1}{3}Rr\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\text{Isocaèdre régulier convexe} \dots Rr = \frac{1}{2}\varrho^2\sqrt{3} \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}}, \quad \varrho^2 = \frac{1}{2}Rr\sqrt{3} \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} &\text{Dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à} \\ &\text{sommets pentaèdres } Rr = \frac{1}{2}\varrho^2(\sqrt{5}+1), \quad \varrho^2 = \frac{1}{2}Rr(\sqrt{5}-1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à} \\ &\text{sommets trièdres } Rr = \frac{1}{2}\varrho^2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}, \quad \varrho^2 = \frac{1}{3}Rr\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Dodécaèdre régulier étoilé de Poinot } Rr = \frac{1}{2}\varrho^2(\sqrt{5}-1), \quad \varrho^2 = \frac{1}{2}Rr(\sqrt{5}+1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Icosaèdre régulier étoilé de Poinot } Rr = \frac{1}{2}\varrho^2\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad \varrho^2 = \frac{1}{2}Rr\sqrt{3} \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

30. Ces valeurs prouvent que

1°. Dans le tétraèdre régulier, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est moyen proportionnel entre les rayons des deux sphères, l'une inscrite et l'autre circonscrite.

2°. Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est moyen proportionnel entre le rayon de la sphère inscrite et le côté du décagone régulier convexe, qui est inscrit dans un grand cercle de la sphère circonscrite: car on a $\frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1) = 2R\sin\frac{\pi}{10}$.

3°. Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Poincot, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est moyen proportionnel entre le rayon de la sphère inscrite et le côté du décagone régulier étoilé, qui est inscrit dans un grand cercle de la sphère circonscrite: car on a $\frac{1}{2}R(\sqrt{5}+1) = 2R\sin\frac{3\pi}{10}$.

31. **Autres relations numériques entre les rayons des trois sphères.** Il est aisé de trouver, au moyen des expressions des n° 18, 22 et 29, qu'on a, dans les divers polyèdres réguliers

Tétraèdre régulier $4R^2 = 9\rho^2 + 9r^2$.

Hexaèdre régulier $R^2 = \rho^2 + r^2$.

Octaèdre régulier $\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{r^2}$.

Dodécaèdre régulier convexe $R^2 = 12\rho^2 - 15r^2$.

Icosaèdre régulier convexe $R^2 = 4\rho^2 - 3r^2$.

Dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres $2\rho^2 = R(R-r)$.

Dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets trièdres $R^2 = 12\rho^2 - 15r^2$.

Dodécaèdre régulier étoilé de Poincot $2\rho^2 = R(R+r)$.

Icosaèdre régulier étoilé de Poincot $R^2 = 4\rho^2 - 3r^2$.

32. Nous pouvons donc dire que:

1°. Dans le tétraèdre régulier, le double rayon de la sphère circonscrite et les triples rayons des deux autres sphères forment les trois côtés d'un triangle rectangle.

2°. Dans l'hexaèdre régulier, les rayons des trois sphères sont les trois côtés d'un triangle rectangle.

3°. Dans l'octaèdre régulier, les inverses des rayons des trois sphères sont les trois côtés d'un triangle rectangle.

4°. Dans le dodécaèdre régulier convexe et dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets trièdres, les rayons des trois sphères forment entre eux la relation $R^2 = 12\rho^2 - 15r^2$.

5°. Dans les deux icosaèdres réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé, les rayons des trois sphères forment entre eux la relation $R^2 = 4\rho^2 - 3r^2$.

6°. Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est moyen proportionnel entre le rayon de la sphère circonscrite et la demi-différence entre ce rayon et celui de la sphère inscrite.

7°. Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Poinsoot, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est moyen proportionnel entre le rayon de la sphère circonscrite et la demi-somme de ce rayon et de celui de la sphère inscrite.

§ V. Expressions générales des rayons
des trois sphères en valeur de l'arête des polyèdres réguliers étoilés.

33. Expression du rayon r de la sphère inscrite dans un polyèdre régulier, en valeur de l'arête a de ce polyèdre. Les triangle rectangle OCI (Fig. 1) nous fournit la valeur

$$r = OC = CI \tan OIC = CI \tan I;$$

mais nous avons, par le triangle rectangle ACI ,

$$AC = AI \cot ACI = \frac{a}{2} \cot \frac{q\pi}{n}.$$

Il nous viendra donc, en substituant,

$$(VI) \quad 2r = a \cot \frac{q\pi}{n} \tan I.$$

34. Expression du rayon R de la sphère circonscrite à un polyèdre régulier, en valeur de l'arête a de ce polyèdre. Multiplions la relation précédente (VI) par la relation (III) du n°. 5; nous aurons de suite

$$2R = a \tan \frac{p\pi}{m} \tan \frac{q\pi}{n} \cot \frac{q\pi}{n} \tan I;$$

mais

$$\tan \frac{q\pi}{n} \cot \frac{q\pi}{n} = 1;$$

donc nous aurons

$$(VII) \quad 2R = a \operatorname{tang} \frac{p\pi}{m} \operatorname{tang} I.$$

35. Expression du rayon ϱ de la sphère tangente aux arêtes d'un polyèdre régulier, en valeur de l'arête a de ce polyèdre. Dans

la formule (VI) remplaçons r par sa valeur $\varrho \frac{\cos \frac{p\pi}{m}}{\sin \frac{q\pi}{n}}$ fournie par l'égalité (I); elle deviendra

$$2\varrho \frac{\cos \frac{p\pi}{m}}{\sin \frac{q\pi}{n}} = a \cot \frac{q\pi}{n} \operatorname{tang} I,$$

ou, en multipliant les deux membres par $\sin \frac{q\pi}{n}$ et en divisant par $\cos \frac{p\pi}{m}$,

$$(VIII) \quad 2\varrho = a \frac{\cos \frac{q\pi}{n}}{\cos \frac{p\pi}{m}} \operatorname{tang} I.$$

36. Nous pouvons trouver une expression plus simple de la valeur de 2ϱ . Multiplions, en effet, l'égalité précédente, membre à membre, par la relation (V); elle deviendra

$$2\varrho \sin I = a \frac{\cos \frac{q\pi}{n}}{\cos \frac{p\pi}{m}} \operatorname{tang} I \cdot \frac{\cos \frac{p\pi}{m}}{\sin \frac{q\pi}{n}}.$$

ou, en réduisant,

$$(IX) \quad 2\varrho = a \frac{\cot \frac{q\pi}{n}}{\cos I} = a \cot \frac{q\pi}{n} \sec I.$$

§ VI. Valeurs numériques des rayons des trois sphères en fonction de l'arête des divers polyèdres réguliers.

37. Valeurs numériques du rayon ϱ de la sphère tangente aux arêtes, en fonction de l'une a de ces arêtes. Pour plus de simplicité, au lieu de nous servir de la formule (IX), nous ferons usage de la relation (Fig. 1)

$$\overline{AO}^2 - \overline{OI}^2 = \overline{AI}^2,$$

ou

$$4R^2 - 4\rho^2 = a^2,$$

que nous fournit le triangle rectangle AIO .

Si nous remplaçons, dans cette égalité, $4R^2$ par ses valeurs successives en fonction de ρ , qui se trouvent au n°. 22, nous obtiendrons les expressions suivantes:

Tétraèdre régulier	$\rho = \frac{1}{4}a\sqrt{2},$	$a = 2\rho\sqrt{2}.$
Hexaèdre régulier	$\rho = \frac{1}{2}a\sqrt{2},$	$a = \rho\sqrt{2}.$
Octaèdre régulier	$\rho = \frac{1}{2}a,$	$a = 2\rho.$
Dodécaèdre régulier convexe .	$\rho = \frac{1}{4}a(\sqrt{5}+1)^2,$	$a = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{5}-1)^2.$
Icosaèdre régulier convexe .	$\rho = \frac{1}{4}a(\sqrt{5}+1),$	$a = \rho(\sqrt{5}-1).$
Dodécaèdre régulier étoilé de		
Képler, à sommets pentaèdres	$\rho = \frac{1}{4}a(\sqrt{5}-1),$	$a = \rho(\sqrt{5}+1).$
Dodécaèdre régulier étoilé de		
Képler, à sommets trièdres .	$\rho = \frac{1}{8}a(\sqrt{5}-1)^2,$	$a = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{5}+1)^2.$
Dodécaèdre régulier étoilé de		
Poinsot	$\rho = \frac{1}{4}a(\sqrt{5}+1),$	$a = \rho(\sqrt{5}-1).$
Icosaèdre régulier étoilé de		
Poinsot	$\rho = \frac{1}{4}a(\sqrt{5}-1),$	$a = \rho(\sqrt{5}+1).$

38. Nous voyons par ces valeurs que:

1°. Lorsque le tétraèdre et l'hexaèdre réguliers ont même arête; les rayons des deux sphères tangentes aux arêtes sont le second double du premier.

2°. Lorsque l'icosaèdre régulier convexe et le dodécaèdre régulier étoilé de Poinsot ont même centre et même arête, leurs arêtes sont tangentes à une même sphère, dont le diamètre est égal au côté du dodécaèdre régulier étoilé, qui se trouve inscrit dans le cercle ayant l'arête commune pour rayon.

3°. Lorsque le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, et l'icosaèdre régulier étoilé de Poinsot ont même centre et même arête, leurs arêtes sont aussi tangentes à une même sphère, dont le diamètre est égal au côté du dodécaèdre régulier convexe, qui se trouve inscrit dans le cercle ayant l'arête commune pour rayon.

4°. Lorsque l'icosaèdre régulier convexe et le dodé-

caèdre régulier étoilé de Poinsoot ont même arête que l'icosaèdre régulier étoilé de Poinsoot et le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, l'arête commune à ces quatre polyèdres réguliers est moyenne proportionnelle entre les diamètres des deux sphères, l'une tangente aux arêtes des deux premiers polyèdres réguliers, et l'autre tangente aux arêtes des deux derniers.

5°. Lorsque le dodécaèdre régulier convexe et le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets trièdres, ont même arête, cette arête commune est aussi moyenne proportionnelle entre les rayons des deux sphères tangentes aux arêtes.

39. Valeurs numériques du rayon R de la sphère circonscrite aux polyèdres réguliers en valeur de l'une a des arêtes de ce polyèdre. Multiplions les relations du n° 37, celles de gauche par les égalités de gauche du n° 22, et les relations de droite par celles de droite du même n° 22. Nous obtenons ainsi les expressions suivantes :

$$\text{Tétraèdre régulier} \quad . . R = \frac{1}{4}a\sqrt{6}, \quad a = \frac{2}{3}R\sqrt{6}.$$

$$\text{Hexaèdre régulier} \quad . . R = \frac{1}{2}a\sqrt{3}, \quad a = \frac{2}{3}R\sqrt{3}.$$

$$\text{Octaèdre régulier} \quad . . R = \frac{1}{2}a\sqrt{2}, \quad a = R\sqrt{2}.$$

Dodécaèdre régulier

$$\text{convexe} \quad R = \frac{1}{4}a\sqrt{3}(\sqrt{5}+1), \quad a = \frac{1}{3}R\sqrt{3}(\sqrt{5}-1).$$

Icosaèdre régulier

$$\text{convexe} \quad R = \frac{1}{4}a\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \quad a = R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

Dodécaèdre régulier

étoilé de Képler

$$\text{à sommets pentaèdres} \quad R = \frac{1}{4}a\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad a = R\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

Dodécaèdre régulier

étoilé de Képler

$$\text{à sommets trièdres} \quad . R = \frac{1}{4}a\sqrt{3}(\sqrt{5}-1), \quad a = \frac{1}{3}R\sqrt{3}(\sqrt{5}+1).$$

Dodécaèdre régulier

$$\text{étoilé de Poinsoot} \quad . . R = \frac{1}{4}a\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \quad a = R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

Icosaèdre régulier

$$\text{étoilé de Poinsoot} \quad . . R = \frac{1}{4}a\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad a = R\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

40. La comparaison de ces expressions prouve que:

1°. Si tous les polyèdres réguliers étoilés sont inscrits dans une même sphère, le rapport des arêtes est dans les trois premiers polyèdres réguliers

$$\frac{a_1}{2\sqrt{6}} = \frac{a_2}{2\sqrt{3}} = \frac{a_3}{3\sqrt{2}};$$

et les arêtes des six autres polyèdres réguliers sont dans les rapports

$$\frac{a_4\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1} = \frac{a_5\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)} = \frac{a_6\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)} = \frac{a_7\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1} =$$

$$\frac{a_8\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)} = \frac{a_9\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}.$$

2°. L'icosaèdre régulier convexe et le dodécaèdre régulier étoilé de Poincaré ont même arête, lorsqu'ils sont inscrits dans la même sphère.

3°. Le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, et l'icosaèdre régulier étoilé de Poincaré ont aussi même arête, lorsqu'ils sont inscrits dans une même sphère.

4°. Lorsque le dodécaèdre régulier convexe et le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets trièdres, sont inscrits dans la même sphère, leurs arêtes sont entre elles comme les côtés des deux décagones réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé, qui sont inscrits dans un même cercle.

41. Valeurs numériques du rayon r de la sphère inscrite dans les polyèdres réguliers, en fonction de l'une a des arêtes de ces polyèdres. Multiplions en croix et respectivement les relations du n° 39 par les égalités du n° 25. Nous obtiendrons les relations suivantes:

$$\text{Tétraèdre régulier} \quad . \quad r = \frac{1}{12}a\sqrt{6}, \quad a = 2r\sqrt{6}.$$

$$\text{Hexaèdre régulier} \quad . \quad r = \frac{1}{2}a, \quad a = 2r.$$

$$\text{Octaèdre régulier} \quad . \quad r = \frac{1}{6}a\sqrt{6}, \quad a = r\sqrt{6}.$$

Dodécaèdre régulier

$$\text{convexe} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad r = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}, \quad a = r\sqrt{50-22\sqrt{5}}.$$

Icosaèdre régulier

convexe $r = \frac{1}{12}a(3\sqrt{3} + \sqrt{15}), \quad a = r(3\sqrt{3} - \sqrt{15}).$

Dodécaèdre régulier

étoilé de Képler,

à sommets pentaèdres $r = \frac{1}{4}a \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}, \quad a = r\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$

Dodécaèdre régulier

étoilé de Képler,

à sommets trièdres $r = \frac{1}{4}a \sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}}, \quad a = r\sqrt{50+22\sqrt{5}}.$

Dodécaèdre régulier

étoilé de Poinso . . $r = \frac{1}{4}a \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}, \quad a = r\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$

Icosaèdre régulier

étoilé de Poinso . . $r = \frac{1}{12}a(3\sqrt{3} - \sqrt{15}), \quad a = r(3\sqrt{3} + \sqrt{15}).$

42. Si l'on compare toutes ces expressions, on verra que

1°. Si le tétraèdre et l'octaèdre réguliers sont circonscrits à une même sphère, l'arête du tétraèdre sera double de celle de l'octaèdre.

2°. Lorsque les deux icosaèdres réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé, se trouvent circonscrits à une même sphère, la somme de leurs deux arêtes est égal à six fois le côté du triangle équilatéral inscrit dans un grand cercle de cette sphère.

3°. Lorsque le dodécaèdre régulier convexe et son conjugué, l'icosaèdre régulier convexe, sont circonscrits à une même sphère, leurs arêtes sont entre elles comme les côtés des décagone et pentagone réguliers convexes, inscrits dans un même cercle et multipliés respectivement par $\sqrt{5}$ et $\sqrt{3}$.

4°. Lorsque le dodécaèdre régulier étoilé, à faces pentagonales étoilées et à sommets pentaèdres convexes, et son conjugué, le dodécaèdre régulier étoilé, à faces pentagonales convexes et à sommets pentaèdres étoilés se trouvent circonscrits à une même sphère, leurs arêtes sont entre elles comme les côtés des deux pentagones réguliers, l'un étoilé et l'autre convexe, qui sont inscrits dans un même cercle.

5°. Lorsque le dodécaèdre régulier étoilé, à faces pentagonales étoilés et à sommets trièdres, et son conjugué, l'icosaèdre régulier étoilé, à faces triangulaires et à sommets pentaèdres étoilés, se trouvent circonscrits à une même sphère, leurs arêtes sont entre elles comme les côtés des décagone et pentagone réguliers étoilés, inscrits dans un même cercle et multipliés respectivement par $\sqrt{5}$ et $\sqrt{3}$.

Paris, Octobre 1877.

III.

Inscription dans le cercle des polygones réguliers de 15, 30, 60, 120, etc. côtés. Calcul des Côtés.

Par

Georges Dostor,

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université catholique de Paris.

La méthode, dont nous faisons usage, repose sur la Trigonométrie la plus élémentaire; elle suppose connu que la règle, qui sert à calculer le sinus de la somme et de la différence de deux arcs.

1. Inscription dans le cercle des quatre polygones réguliers de quinze côtés. Il existe quatre pentédécagons réguliers, dont les trois étoilés sont des espèces 2, 4 et 7.

Les demi-angles au centre de ces quatre polygones réguliers de 15 côtés sont respectivement

$$(1) \quad \frac{\pi}{15}, \quad \frac{2\pi}{15}, \quad \frac{4\pi}{15}, \quad \frac{7\pi}{15};$$

par conséquent, si R est le rayon du cercle circonscrit, les côtés seront

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{15,1} = 2R \sin \frac{\pi}{15}, \\ C_{15,2} = 2R \sin \frac{2\pi}{15}, \\ C_{15,4} = 2R \sin \frac{4\pi}{15}, \\ C_{15,7} = 2R \sin \frac{7\pi}{15}. \end{array} \right.$$

Les sinus des quatre arcs (1) se calculeront aisément au moyen de sinus et cosinus d'arcs plus simples, qui sont déjà connus.

Ajoutons d'abord le premier et le troisième de nos arcs (1), puis retranchons, l'un de l'autre, les mêmes arcs; nous obtenons les deux identités

$$\frac{4\pi}{15} + \frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{4\pi}{15} - \frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{5},$$

qui nous donnent de suite

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{4\pi}{15} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{10}, \\ \frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10}. \end{array} \right.$$

De même, faisons d'abord la somme, puis la différence du second et du quatrième des arcs (1); nous aurons les égalités

$$\frac{7\pi}{15} + \frac{2\pi}{15} = \frac{3\pi}{5}, \quad \frac{7\pi}{15} - \frac{2\pi}{15} = \frac{\pi}{3}.$$

d'où nous tirons de suite

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{7\pi}{15} = \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{6}, \\ \frac{2\pi}{15} = \frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{6}. \end{array} \right.$$

Il nous suffira actuellement de mettre ces équivalents (3) et (4) dans les formules (2), pour obtenir les expressions

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{15,1} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10}\right) = 2R \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{10} - 2R \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{10} \\ C_{15,2} = 2R \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{6}\right) = 2R \sin \frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi}{6} - 2R \cos \frac{3\pi}{10} \sin \frac{\pi}{6}, \\ C_{15,4} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{10}\right) = 2R \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{10} + 2R \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{10}. \\ C_{15,7} = 2R \sin\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{6}\right) = 2R \sin \frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi}{6} + 2R \cos \frac{3\pi}{10} \sin \frac{\pi}{6}. \end{array} \right.$$

Mais on sait que

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, & \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \\ \sin \frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1), & \cos \frac{\pi}{10} = \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}; \\ \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1), & \cos \frac{3\pi}{10} = \sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}; \end{array} \right.$$

car $\sin \frac{2\pi}{5}$ est le demi-côté du pentagone régulier étoilé, qui se trouve inscrit dans le cercle, dont le rayon est égal à l'unité; et $\sin \frac{3\pi}{10}$ est le demi côté du décagone régulier étoilé, qui est inscrit dans le même cercle.

Si nous substituons ces valeurs (6) dans les égalités (5), nous obtiendrons, pour les côtés des quatre pentédécagones réguliers, les expressions suivantes:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{15,1} = \frac{1}{4}R(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}), \\ C_{15,2} = \frac{1}{4}R(\sqrt{15} + \sqrt{3} - \sqrt{10-2\sqrt{5}}), \\ C_{15,4} = \frac{1}{4}R(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{15} - \sqrt{3}), \\ C_{15,7} = \frac{1}{4}R(\sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}). \end{array} \right.$$

2. La comparaison de ces expressions nous fournit les deux relations

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{15,1} + C_{15,4} = \frac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \\ C_{15,7} - C_{15,2} = \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}. \end{array} \right.$$

Elles démontrent que

1°. La somme des deux pentédécagones réguliers des espèces 4 et 1 est égale au côté du pentagone régulier étoilé, inscrit dans le même cercle.

2°. La différence des côtés des pentédécagones réguliers des espèces 7 et 2, qui sont inscrits dans le même cercle, est égale au côté du pentagone régulier convexe, inscrit dans le même cercle.

3. Inscription dans le cercle des quatre polygones réguliers de trente côtés. Comme la moitié 15 de 30 est un nombre impair, il existe aussi quatre polygones réguliers de 30 côtés, dont les trois étoilés sont des espèces 7, 11 et 13.

Les demi-angles au centre de ces quatre polygones réguliers de 30 côtés sont respectivement

$$(7) \quad \frac{\pi}{30}, \quad \frac{7\pi}{30}, \quad \frac{11\pi}{30}, \quad \frac{13\pi}{30};$$

par suite les côtés seront

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{30,1} = 2R \sin \frac{\pi}{30}, \\ C_{30,7} = 2R \sin \frac{7\pi}{30}, \\ C_{30,11} = 2R \sin \frac{11\pi}{30}, \\ C_{30,13} = 2R \sin \frac{13\pi}{30}. \end{array} \right.$$

Les sinus des quatre arcs pourront s'obtenir en valeur de sinus d'arcs plus simples, sinus dont nous connaissons déjà la valeur.

Ajoutons d'abord le premier et le troisième de nos arcs (7), puis prenons la différence entre les mêmes arcs; nous aurons les deux identités

$$\frac{11\pi}{30} + \frac{\pi}{30} = \frac{2\pi}{5}, \quad \frac{11\pi}{30} - \frac{\pi}{30} = \frac{\pi}{3};$$

d'où nous tirons de suite

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{11\pi}{30} = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{6}, \\ \frac{\pi}{30} = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6} \end{array} \right.$$

Si nous prenons de même la somme et la différence du deuxième et du quatrième de nos mêmes arcs (7), nous aurons les égalités

$$\frac{13\pi}{30} + \frac{7\pi}{30} = \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{13\pi}{30} - \frac{7\pi}{30} = \frac{\pi}{5};$$

qui nous donnent de suite

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{13\pi}{30} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{10}, \\ \frac{7\pi}{30} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{10}. \end{array} \right.$$

Mettons ces sommes et ces différences (9) et (10) dans les formules (8); nous obtiendrons les expressions

$$C_{30;1} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right) = 2R \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{6} - 2R \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{6},$$

$$C_{30;7} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{10}\right) = 2R \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{10} - 2R \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{10},$$

$$C_{30;11} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{6}\right) = 2R \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{6} + 2R \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{6},$$

$$C_{30;13} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{10}\right) = 2R \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{10} + 2R \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{10}.$$

Substituons aux facteurs trigonométriques des seconds membres leurs valeurs numériques

$$\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\sin \frac{\pi}{5} = \cos \frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad \cos \frac{\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1);$$

$$\sin \frac{\pi}{10} = \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1), \quad \cos \frac{\pi}{10} = \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

nous trouverons pour les côtés des quatre polygones réguliers de 30 côtés les valeurs

$$(III) \quad \begin{cases} C_{30;1} = \frac{1}{4}R(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1), \\ C_{30;7} = \frac{1}{4}R(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1), \\ C_{30;11} = \frac{1}{4}R(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1), \\ C_{30;13} = \frac{1}{4}R(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1). \end{cases}$$

4. La comparaison de ces expressions nous fournit les deux relations

$$(IV) \quad \begin{cases} C_{30;11} - C_{30;1} = \frac{1}{4}R(\sqrt{5}+1), \\ C_{30;13} - C_{30;7} = \frac{1}{4}R(\sqrt{5}-1); \end{cases}$$

qui prouvent que

1°. La différence entre les côtés des polygones réguliers de 30 côtés, des espèces 11 et 1, inscrits dans le même cercle, est égale au côté du décagone régulier étoilé, inscrit dans ce cercle.

2°. La différence entre les côtés des polygones réguliers de 30 côtés, des espèces 13 et 7, inscrits dans le même cercle, est égale au côté du décagone régulier convexe, inscrit dans ce cercle.

5. Inscription dans le cercle des huit polygones réguliers de 60 côtés. Ces huit polygones réguliers sont des espèces

$$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.$$

Les demi-angles au centre de ces polygones seront ainsi

$$(11) \quad \frac{\pi}{60}, \quad \frac{7\pi}{60}, \quad \frac{11\pi}{60}, \quad \frac{13\pi}{60}, \quad \frac{17\pi}{60}, \quad \frac{19\pi}{60}, \quad \frac{23\pi}{60}, \quad \frac{29\pi}{60},$$

de sorte qu'on aura, pour les côtés, les expressions

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} C_{60,1} = 2R \sin \frac{\pi}{60}, & C_{60,19} = 2R \sin \frac{29\pi}{60}, \\ C_{60,7} = 2R \sin \frac{7\pi}{60}, & C_{60,23} = 2R \sin \frac{23\pi}{60}, \\ C_{60,11} = 2R \sin \frac{11\pi}{60}, & C_{60,13} = 2R \sin \frac{19\pi}{60}, \\ C_{60,13} = 2R \sin \frac{13\pi}{60}, & C_{60,17} = 2R \sin \frac{17\pi}{60}. \end{array} \right.$$

Comme on a

$$\frac{29\pi}{60} + \frac{\pi}{60} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{29\pi}{60} - \frac{\pi}{60} = \frac{7\pi}{15}; \quad \text{etc.}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{60} &= \frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{30}, & \frac{29\pi}{60} &= \frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{30}, \\ \frac{7\pi}{60} &= \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{15}, & \frac{23\pi}{60} &= \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{15}, \\ \frac{11\pi}{60} &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{15}, & \frac{19\pi}{60} &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{15}, \\ \frac{13\pi}{60} &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{30}, & \frac{17\pi}{60} &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{30}. \end{aligned}$$

Développant les sinus et observant que

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

et que

$$\begin{aligned} \cos \frac{7\pi}{30} &= \sin \frac{4\pi}{15}, & \cos \frac{2\pi}{15} &= \sin \frac{11\pi}{30}, \\ \cos \frac{\pi}{15} &= \sin \frac{13\pi}{30}, & \cos \frac{\pi}{30} &= \sin \frac{7\pi}{15}, \end{aligned}$$

on trouve, en substituant dans (12), pour les côtés de nos huit polygones réguliers

$$C_{60,1} = R\sqrt{2} \left(\sin \frac{4\pi}{15} - \sin \frac{7\pi}{30} \right),$$

$$C_{60,7} = R\sqrt{2} \left(\sin \frac{11\pi}{30} - \sin \frac{2\pi}{15} \right),$$

$$C_{60,11} = R\sqrt{2} \left(\sin \frac{13\pi}{30} - \sin \frac{\pi}{15} \right),$$

$$C_{60,13} = R\sqrt{2} \left(\sin \frac{7\pi}{15} - \sin \frac{\pi}{30} \right),$$

$$C_{60,17} = R\sqrt{2} \left(\sin \frac{7\pi}{15} + \sin \frac{\pi}{30} \right),$$

$$C_{60,19} = R\sqrt{2} \left(\sin \frac{13\pi}{30} + \sin \frac{\pi}{15} \right),$$

$$C_{60,23} = R\sqrt{2} \left(\sin \frac{11\pi}{30} + \sin \frac{2\pi}{15} \right),$$

$$C_{60,29} = R\sqrt{2} \left(\sin \frac{4\pi}{15} + \sin \frac{7\pi}{30} \right).$$

Si l'on met, dans les seconds membres, à la place des sinus leurs valeurs tirés de (I) et (II), on trouve enfin que les côtés des huit polygones réguliers de 60 côtés sont:

$$(V) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{60,1} = \frac{1}{8}R\sqrt{2}[(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1) - (\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}], \\ C_{60,7} = \frac{1}{8}R\sqrt{2}[(\sqrt{3}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}} - (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)], \\ C_{60,11} = \frac{1}{8}R\sqrt{2}[(\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)], \\ C_{60,13} = \frac{1}{8}R\sqrt{2}[(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1) - (\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}], \\ C_{60,17} = \frac{1}{8}R\sqrt{2}[(\sqrt{3}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}} + (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)], \\ C_{60,19} = \frac{1}{8}R\sqrt{2}[(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)], \\ C_{60,23} = \frac{1}{8}R\sqrt{2}[(\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}} + (\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)], \\ C_{60,29} = \frac{1}{8}R\sqrt{2}[(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)]. \end{array} \right.$$

5. Inscription dans le cercle des seize polygones réguliers de 120 côtés. On pourra calculer les côtés de ces seize polygones réguliers, en suivant la même méthode; il suffira pour cela de faire usage des identités suivantes:

$$\frac{\pi}{120} = \frac{\pi}{8} - \frac{7\pi}{60},$$

$$\frac{31\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} - \frac{7\pi}{60},$$

$$\frac{7\pi}{120} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{15},$$

$$\frac{37\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{15},$$

$$\frac{11\pi}{120} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{30},$$

$$\frac{41\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{30},$$

$$\frac{13\pi}{120} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{60},$$

$$\frac{43\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{60},$$

$$\frac{17\pi}{120} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{60},$$

$$\frac{47\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{60},$$

$$\frac{19\pi}{120} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{30},$$

$$\frac{49\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{30},$$

$$\frac{23\pi}{120} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{15},$$

$$\frac{53\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{15},$$

$$\frac{29\pi}{120} = \frac{\pi}{8} + \frac{7\pi}{60},$$

$$\frac{59\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} + \frac{7\pi}{60}.$$

Ce mode de calcul peut fournir, comme l'on voit, toutes les valeurs que donne la résolution de l'équation binôme $x^n - 1 = 0$.

IV.

Neue Eigenschaft der Kegelschnitte.

Von

K. Zahradnik.

Jeder Kreis schneidet einen Kegelschnitt in vier Punkten; die Parameter der Schnittpunkte erhalten wir, wenn wir die Coordinaten eines Kegelschnittspunktes¹⁾

$$x = \frac{2p}{u^2 - q}, \quad y = \frac{2pu}{u^2 - q} \quad (1)$$

in die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + m^2 = 0 \quad (2)$$

eingeführen, als Wurzeln einer biquadratischen Gleichung in u . Da nun drei Punkte die Lage des Kreises vollständig bestimmen, so müssen die Parameterwerte der vier Schnittpunkte einer Bedingungs-gleichung genügen, und ein Vergleich der Coefficienten der erwähnten biquadratischen Gleichung gibt uns unmittelbar diese Bedingungs-gleichung²⁾ in Form

$$(u)_3 + q(u)_1 = 0 \quad (3)$$

Für $u_2 = u_3 = u_4 = u$ wird der Kreis (2) zum Krümmungskreise und die Bedingungs-gleichung (3) geht in diesem Falle über in

$$u^3 + 3u^2u_1 + q(3u + u_1) = 0 \quad (4)$$

welche wir auch schreiben können, u' statt u_1 setzend,

$$u^3 + 3qu + u'(3u^2 + q) = 0 \quad (4')$$

1) Siehe dieses „Archiv“ Teil 61. pag. 220.

2) Siehe Dr. E. m. Weyr: „Kegelschnitte“. Sitzb. d. kgl. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. 18. Oct. 1872. Prag, Sepabdr. pag. 29.

Diese Gleichung besagt uns, dass jeder Krümmungskreis im Punkte u den Kegelschnitt in einem Punkte u_1' schneidet, und umgekehrt, dass durch jeden Punkt des Kegelschnittes u_1 drei Krümmungskreise hindurchgehen. Die Osculationstripel bilden nämlich eine cubische Involution. Von den Osculationstripeln können wir nun die Eigenschaft nachweisen, dass ihre Schwerpunkte auf der Nebenachse des Kegelschnittes liegen.

Bezeichnen wir mit u_1, u_2, u_3 die Wurzeln der Gleichung (4'), so erkennen wir, dass dem Kegelschnittspunkte u' das Osculationstripel $u_1 u_2 u_3$ entspricht, somit auch dessen Schwerpunkt $(\xi \eta)$. Die Coordinaten des Schwerpunktes eines dem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecks $(u_1 u_2 u_3)$ sind nun

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{2p}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{u_k^2 - q} \\ \eta &= \frac{2p}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{u_k}{u_k^2 - q}\end{aligned}\tag{5}$$

Sollen nun dessen Ecken die Osculationspunkte des Kegelschnittspunktes u' sein, so müssen deren Parameter wegen (4) den Gleichungen

$$\begin{aligned}(u)_1 &= -3u' \\ (u)_2 &= 3q \\ (u)_3 &= -qu'\end{aligned}\tag{6}$$

genügen; da nun mit Rücksicht auf (6)

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^3 (u_k^2 - q) &= 16q^2(u'^2 - q) \\ (u_1^2 - q)(u_2^2 - q) + (u_2^2 - q)(u_3^2 - q) + (u_3^2 - q)(u_1^2 - q) &= -24q(u'^2 - q)\end{aligned}$$

ist, folgt

$$\xi = -\frac{p}{q}\tag{7}$$

womit der Satz als bewiesen erscheint.

Agram, Februar 1878.

Litterarischer Bericht

CCXLV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo X. Roma 1877. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der Inhalt der letzten 6 Hefte ist folgender:

7. Heft. Sigmund Günther: Ueber die Anfänge und Entwicklungsstufen des Principis der Coordinaten. Ins Italienische übersetzt von Giovanni Garbieri.

8. Heft. Pietro Riccardi: Ueber ein kleines Werk von Francesco dal Sole. Ungedruckte auf ihn bezügliche Documente. B. Boncompagni: Ueber das Wort „Cumulo“, von Francesco dal Sole gebraucht im Sinne von tausend Millionen.

9. Heft. Paul Mansion: Die Mathematiker in Belgien in den Jahren 1871, 1873, 1874, 1875.

10. Heft. Schluss des Vorigen. Pietro Riccardi: Brief an B. Boncompagni zur Berichtigung einer Aussage betreffend Biagio Pelacani in der obigen Schrift von Günther.

11. Heft. P. Treutlein: Ueber einige ungedruckte Schriften bezüglich auf das Rechnen mit dem Abacus. Ins Italienische übersetzt von Alfonso Sparagna. Wörtliche Mittheilung jener Schriften.

12. Heft. Schluss des Vorigen. B. Boncompagni: Ueber den Tractatus de abaco von Gerlando. Angelo Genocchi: Ueber die von B. Boncompagni veranstaltete Publication von 11 Briefen von Louis Lagrange an Leonhard Euler.

Publicationsverzeichnisse im 8., 10. und 12. Heft.

Besonders herausgegeben sind die 2 Schriften von Boncompagni über die Summe der 4. Potenzen, aus dem Maiheft, und über das Wort Cumulo, aus dem Augustheft. H.

Jahrbuch der Erfindungen. Herausgegeben von H. Gretschel und G. Wunder. Dreizehnter Jahrgang. Mit 19 in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig 1877. Quandt u. Händel. kl. 8°. 460 S.

Diese Zeitschrift stellt den Fortschritt der einzelnen Zweige der Naturwissenschaft in den letzt vergangenen Jahren dar. Hauptsächlich sind die Resultate der quantitativen Ermittlungen, nebst Fehlergrenze und verglichen mit den früheren Bestimmungen übersichtlich angegeben, in der Kürze bei jeder bemerkt, woraus sie gewonnen ward, ferner der Name des Autors, nicht aber die Litteratur citirt. Der gegenwärtige Jahrgang umfasst eine Reihe Themata aus der Astronomie, Physik und Chemie. Zum Schluss ist der Nekrolog für 1876 beigelegt. H.

A list of writings relating to the method of least squares, with historical and critical notes. By Mansfield Merriman, Ph. D., Instructor in the Sheffield Scientific School of Yale College. New Haven 1877. (From the Transactions of the Connecticut Academy. Vol. IV. 1877). 232 S.

Die Liste enthält 408 Titel von Schriften, die von 1722 an der Erfindung der Methode 1805 theils anbahnend vorausgingen, theils nach dieser Zeit dieselbe behandelten, und zwar 313 Abhandlungen, 72 Bücher und 23 Teile von Büchern. Sie folgen der Zeit nach; an nötigen Angaben lassen sie nichts vermissen; auch die successiven Auflagen mit Jahreszahl sind bemerkt. Die Noten, welche auf die meisten Titel folgen, geben öfters über den Inhalt einigen Aufschluss, sind aber grösstenteils Urtheile der Wertschätzung und machen auf Fehler aufmerksam. Die Vollständigkeit begrenzt der Verfasser selbst dahin, dass er Schriften in den 8 Hauptsprachen aufgenommen hat, mit Ausschluss z. B. von Russisch und Ungarisch; ferner dass zu kurze, unzureichende Behandlungen unerwähnt geblieben sind. Die Schriften

stammen aus 12 Ländern, unter denen der Zahl nach Deutschland die erste, England die dritte Stelle einnimmt, was auch hinsichtlich der 2 Sprachen gilt. Von den 408 Schriften hat der Verfasser 312 selbst gesehen. Innerhalb der bezeichneten Grenzen bleibt es dem Publicum überlassen das noch Fehlende in Erinnerung zu bringen.

Methode und Principien.

Zur Grundlegung der Psychophysik. Kritische Beiträge von Dr. Georg Elias Müller, Privatdocenten der Philosophie an der Universität zu Göttingen. Berlin 1878. Theobald Grieben. 424 S.

Das Buch handelt vom Weber'schen Gesetze, nach welchem der kleinste wahrnehmbare Unterschied der Intensitäten zweier gleichartigen Sinnesreize den Intensitäten selbst proportional ist. Der Verfasser hat sein Mögliches getan, die betreffende Aufgabe zu einer exacten zu machen, indem er das Unzulängliche in Begriff und Methode ans Licht zieht, die Messungsfehler scheidet und in Rechnung bringt. Dennoch bleibt das Ergebniss auf dem Standpunkte derjenigen sogenannten Empirie, welche ohne causale Hypothese nur sammelt und aus Zahlen Gesetze abstrahirt, die im günstigsten Falle in irgend welchem Umfange eine leidliche Beständigkeit zeigen. Die erreichten Resultate hält indes der Verfasser wert und bekämpft eingehend die von Hering, Langer, Brentano u. A. erhobenen Einwände. Der erste Abschnitt, die psychophysischen Messmethoden, behandelt die zufälligen Fehlervorgänge und die zufälligen Beobachtungsfehler, die Hauptformeln der Methode der richtigen und falschen Fälle, deren bisherige Auffassungen und Anwendungen, die Elimination der constanten Fehler, die Methode der kleinsten Unterschiede, die Methode der mittleren Fehler, die bisherigen Versuche nach derselben, die Methode der übermerklichen Unterschiede; der zweite, die Tatsachen des Weber'schen Gesetzes, Versuche mit verdunkelnden Gläsern, Schattenversuche, Scheibenversuche; Masson's Versuche bei instantaner Beleuchtung rotirender Scheiben, die Beziehung der Sterngrößen zu den Sternintensitäten, Versuche nach der Methode der übermerklichen Unterschiede, Versuche mit farbigem Lichte, Resultate sämtlicher auf das W. Gesetz bezüglichen Untersuchungen im Gebiete des Gesichtssinns, Gewichtsversuche, das Augenmass, Versuche mit Schall-, Geschmacks- und Temperaturreizen; der dritte, die Deutung des W. Gesetzes, die psychophysische und die physiologische Auffassung des W. Gesetzes, die Denkbarekeit eines annähernd logarithmischen Abhängigkeitsverhältnisses zwischen 2 physischen Vorgängen, Erörterung der sog. Tatsache der Reizschwelle, die Abhängigkeit der Unter-

schiedsempfindlichkeit von der Reizqualität, das Parallelgesetz, die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Schwingungszahl, das functionelle Verhältniss zwischen Sinnenreiz und Nervenerregung nach den bisherigen physiologischen Untersuchungen, die Gültigkeit des W. Gesetzes im Gebiete des Muskelsinns, die Proportionalität des Präcisionsmasses und der absoluten Unterschiedsempfindlichkeit, die psychophysische Deutung der sog. Tatsache der Reizschwelle und des W. Gesetzes in psychologischer und metaphysischer Hinsicht, Bernstein's Auffassung des W. Gesetzes, die Wahrscheinlichkeit der corrigirten Massformel; der vierte, die Zweckmässigkeit des W. Gesetzes, die Wiedererkennung früher wahrgenommener Objecte, J. J. Müller's und Hering's teleologisshe Standpunkte. H.

Sur un mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non-euclidiennes. Par A. Genocchi. Turin 1877. Imprimerie Royale. 4^o. 42 S.

Zum Beweise des Parallelogramms der Kräfte und des Hebelgesetzes geht Foncenex von der Composition zweier gleichen Kräfte aus, deren Resultante dann in der Mitte liegen und den Seitenkräften proportional sein muss, so dass sie nur noch unbekannte Function des Winkel- oder bzhw. Normalabstandes bleibt. Durch mehrfache Anwendung der supponirten Function geht beim Hebel die Gleichung hervor:

$$f(x)f(x) = 2 + f(2x)$$

Er schliesst daraus irrig, $f(x)$ müsse constant sein. Dann hat sie den Wert 2, wie es dem Hebel entspricht. Derselben Gleichung genügt jedoch allgemeiner der Wert

$$f(x) = a^x + a^{-x}$$

wo a constant oder eine periodische Function von $\log x$ für die Periodenlänge $= \log 2$ ist. Der Verfasser macht nun darauf aufmerksam, dass erstlich die Herleitung unabhängig von der Gültigkeit des Parallelsatzes ist, zweitens dass die allgemeinere Lösung dem Hebelproblem auf der Fläche constanter Krümmung entspricht. Hieraus ergibt sich ihm ein neues Kriterium für die Specialeigenschaft der Ebene unter jenen Flächen, und er führt aus, man könne das Hebelgesetz für gleiche Kräfte als Axiom für das Euklid'sche substituiren. Es werden dann die Ansichten von Helmholtz, Beltrami, Klein u. A. ausführlich dargelegt. Im zweiten Teil (Appendix) wird gezeigt, dass aus der Geometrie auf der Fläche constanter negativer Krümmung die Unbeweisbarkeit des Parallelsatzes nicht folgt, solange nicht die Existenz einer solchen Fläche, welche die weitem Bedingungen

erfüllt, dass sie stetig, unendlich ausgedehnt und von einfachem Connex ist, bewiesen ist. Diese Bedingung haben Manche zu ersetzen gesucht; der Verfasser findet aber sämtliche Auskunftsmittel ungenügend; in der That ist nicht zu erschen, wie die hier aufgestellten dem Zwecke zu entsprechen vermöchten; die Lücke bleibt bestehen.

H.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der Geometrie, für Gymnasien und andere Lehranstalten. Von C. Meyer, Professor und Prorector am Gymnasium zu Potsdam. Zweiter Theil. Stereometrie. Sechste Auflage. Leipzig 1877. C. A. Koch. 140 S.

Das Lehrbuch zeichnet sich durchweg durch einen concinuen, leicht verständlichen, einfachen und sorgfältig exacten Vortrag aus. Ausser dem ersten Abschnitt, welcher von der Lage der Geraden und Ebenen gegen einander gerade das Notwendige, dieses aber recht vollständig enthält, charakterisirt es sich ferner durch die überwiegende Anzahl von Orientirungssätzen, welche ohne scientiven Fortschritt nur die unmittelbaren Folgen der Definition vorführen. Diese Abschnitte handeln der Reihe nach von den körperlichen Ecken und Pyramiden, den Prismen, dem Kegel und Cylinder, der Kugel, den sphärischen Figuren und den regelmässigen Körpern. Dann folgen stereometrische Constructionsaufgaben. Im Anhang sind noch besonders behandelt der Euler'sche Lehrsatz, der Obelisk, die Kegelschnitte, die Ausmessung der Fässer, und eine kleine Formeltabelle beigelegt. Die Beweise sind sämmtlich so kurz als möglich gefasst und wol manche auf weitere Ausführung im Unterricht berechnet. Anders aber ist es zu beurtheilen, dass in den Herleitungen der Inhalte der runden Körper und Flächen der Endschluss vom Grössern und Kleinern auf die Gleichheit stets als lückenhaft erscheint. Hier hätte doch mindestens ein einzigesmal die zur Evidenz ausreichende, bündige Schlussfolge aufgestellt werden sollen, was nicht übermässig viel Worte gekostet hätte. Im einzelnen noch einige Bemerkungen. Der Name „convexe Ecke“ ist, entsprechend den Namen „convexe Fläche“, convexer Körper“, dem Gebrauche ganz gemäss. Alle übrigen Ecken aber concav zu nennen, ist irreleitend, durch keinen Gebrauch gerechtfertigt und überdies überflüssig, weil der Gegensatz nicht vorkommt. Auch ist der Name „Raumwinkel“ = Flächenwinkel (genauer Ebenen-Winkel) dem Gebrauche nicht gemäss und führt zum Misverständniss, da man darunter eine Ecke verstehen wird. Im Euler'schen Satze fehlt die Beschränkung.

Die Figuren sind in den Text gedruckt, und deren Teile oberhalb der Bildebene durch dickere Linien kenntlich gemacht.

H.

Lehrbuch der Mathematik für Realschulen und Gymnasien sowie zum Selbstunterricht. Von Dr. B. Ohlert, Director der Realschule zu St. Petri und Pauli in Danzig. I. Abth. III. Theil. Lehrbuch der Stereometrie. Elbing 1877. Neumann-Hartmann. 183 S.

Hauptsächlich im Anfang, aber auch unerkennbar im weiteren Verlauf tritt an der Auswahl des Lehrstoffs die Bestimmung des Lehrbuchs hervor, zur mathematischen Vorbildung für das Zeichnen zu dienen. Doch ist diese Vorbildung eine gründliche, welche die logischen Erfordernisse in vollem Masse im Auge hat. Der Vortrag ist ausführlich und bei entwickelter mathematischer Fähigkeit leicht verständlich, der Ausdruck stets exact. In 4 Abschnitten wird der Reihe nach behandelt die Lage der Ebenen und Geraden gegen einander nebst der Ecke, die ebenflächigen Körper (Prisma, Pyramide, Obelisk), die krummflächigen Körper (Cylinder, Kegel, Rotationskörper, Kugel) und die Elemente der darstellenden Geometrie. Auch der letzte ist nach mathematischen, nicht nach technischen Gesichtspunkten abgefasst. Er beschränkt sich auf die rechtwinklige Projection. Die Figuren sind auf 12 Tafeln dem Werke beigelegt.

H.

Lehrbuch der Mathematik. Für den Schul- und Selbst-Unterricht bearbeitet von Dr. Hermann Gerlach, Oberlehrer am Friedrich-Franz-Gymnasium zu Parchim. Zweiter Theil. Elemente der Planimetrie. Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 125 Figuren in Holzschnitt und 682 Uebungssätzen und Aufgaben. Dessau 1877. Albert Reissner. 151 S.

Das Lehrbuch zeichnet sich in hohem Grade aus durch die sorgfältigste Berücksichtigung aller logischen Erfordernisse, welche ohne Umschweife bei concinnem, einfachem Vortrag erreicht wird und von einem bedeutendem Fleiss in der Bearbeitung zeugt. In den 3 schwierigen Punkten, dem Parallelsatz, der Incommensurabilität und der Kreismessung, ist nichts verschwiegen, verhüllt oder entstellt; nur hätte die sinnlose, hier überflüssige Behauptung wegleiben sollen, dass das Sehnen- und Tangentenvieleck durch Vermehrung der Seiten zum Zusammenfallen mit Kreise gelangte. Auch hätte der Verfasser besser getan, in der Benennung der Begriffe nicht dem in den Schulen aufgekommenen Misbrauch (Raumgrösse statt Raumgebilde, Figur statt begrenzte Fläche, Kreis statt Kreisfläche u. s. w., Wörter deren einige er nebenbei auch im richtigen Sinne zulässt) zu folgen. Abweichungen

vom Gewöhnlichen erlaubt man sich häufig genug in Punkten, wo nichts dadurch gebessert wird; warum sollte man sich scheuen, einem gewöhnlichen Mißbrauch gegenüber für das Richtige einzutreten? Der Inhalt des Buches ist genügend reichhaltig. Aus der neueren Geometrie ist ein Abschnitt über die Transversalen des Dreiecks, die harmonischen Punkte, die Polaren und die Potenzlinien in einem Anhang aufgenommen. Ganz besonders ist aber für die Anleitung zur Lösung von Aufgaben gesorgt, von denen ein eigenes Capitel handelt, und deren eine grosse Zahl den einzelnen Capiteln angehängt ist.

H.

Lehrbuch der analytischen Geometrie und der Kegelschnitte. Ein Leitfaden beim Unterricht an höheren Lehranstalten. Von Wilhelm Mink, Oberlehrer an der städtischen Realschule 1. Ordnung zu Crefeld. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Berlin 1878. Nicolai. 96 S.

Das Lehrbuch führt gleich anfangs beliebig geneigte ebene Coordinaten ein und unterscheidet dann recht- und schiefwinklige. Dies ist durch die Bestimmung für die Kegelschnitte vollkommen gerechtfertigt. In der That weist die Behandlungsweise der Elemente auf das Princip hin, die Allgemeinheit des Coordinatenwinkels festzuhalten, so weit es der Natur der Gegenstände entspricht, bei Normalabständen, beim Kreise u. s. w. hingegen auf das rechtwinklige System überzugehen. Doch dies Princip wird gerade bei den Kegelschnitten, den conjugirten Durchmesser, Tangenten, Polaren und der Ableitung aus dem Kegel, wo es sich erst fruchtbar erweisen soll, fallen gelassen. Die Definition der Kegelschnitte nimmt Bezug auf Normalabstände, aus ihr gehen zunächst die Focaleigenschaften hervor, wo also das schiefwinklige System keine Anwendung hat. Auch die anfänglich alle 3 Gestalten der Kegelschnitte umfassende Aufstellungsform wird nicht auf die dafür geeigneten Partien ausgedehnt, vielmehr Sätze, die mit der Unterscheidung nichts zu tun haben, für jede Gestalt einzeln hergeleitet. Bei der gegenwärtigen Behandlungsweise war gar kein Grund das schiefwinklige System zu erwähnen; der Schüler wird daraus sicher dessen Bedeutung nicht erkennen, und vielmehr zu der irrigen Meinung verleitet werden, als sei es das allgemeinere, während doch im Gegenteil das rechtwinklige System das allgemeine, für die ganze Mathematik geeignete, das schiefwinklige nur für specielle Zwecke angemessen zu wählen ist. Auf die Kegelschnitte folgen noch einige Anfänge einer Theorie der Raumcoordinaten, welche sich, wie nur zu billigen, auf das rechtwinklige System beschränken.

H.

Die Elementar-Mathematik für den Schulunterricht bearbeitet von Dr. Ludwig Kambly, Professor und Prorektor am Gymnasium zu St. Elisabet in Breslau. Zweiter Theil: Planimetrie. Sechszehnte Auflage. Mit vier Tafeln lithographirter Abbildungen. Breslau 1877. Ferdinand Hirt. 104 S.

Das Vorliegende lässt sich nur den mittelmässigen Erzeugnissen seiner Art an die Seite stellen, mit denen es die meisten, oft gerügten Mängel und Ungenauigkeiten gemein hat. Nur in einem Punkte macht es einen Ansatz zu grösserer Sorgfalt, indem es den Fall der Incommensurabilität, den andere auf gleicher Stufe stehende Lehrbücher verschweigen, im ersten Beweise, wo er Bedeutung hat, berücksichtigt und es unternimmt zu zeigen, wie man von der Gültigkeit für den Fall der Commensurabilität auf die allgemeine Gültigkeit schliessen könne. Der Beweis ist richtig angegriffen, am Schluss aber fehlt die Pointe, so dass ein exactes Ergebniss doch nicht gewonnen wird.

H.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Cours de calcul infinitésimal. Par J. Hoüel, Ancien Élève de l'École Normale, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Tome premier. Paris 1878. Gauthier-Villars.

Von diesem umfangreichen Werke ist jetzt nur das erste Buch (274 S.) des ersten Bandes nebst dem Anfang des 2. Buchs, mit dem die erste Lieferung abbricht, erschienen. Voraus geht eine Einleitung enthaltend eine ausführliche Behandlung gewisser Grundbegriffe und einiger zur Verwendung notwendiger Rechnungsweisen. Zuerst wird der Gegenstand der Mathematik, namentlich hinsichtlich ihrer Idealität gegenüber den concreten Fragen, besprochen. Dann folgen 4 Paragraphen über die Operationen, welche classificirt werden in uninforme, commutative, associative und distributive, dann ein Capitel über die successiven Verallgemeinerungen der Idee der Grösse, nebst einem Satze über die algebraischen Gleichungen, dann die Elemente der Determinantentheorie. Die Ueberschrift des ersten Buches, das nun folgt, ist: Grundprincipien der Infinitesimalrechnung. Es beginnt mit einem Capitel über die Functionen und die Stetigkeit, die unendlichen Grössen und Grenzwerte. Dann folgt die Differentiation, so gleich verbunden mit der Integration, womit das erste Buch schliesst. Der Lehrgang ist ein ziemlich ungebundener, ohne sichtliche Verkettung in systematischer wie in logischer Beziehung und ohne principielles gleichmässiges Festhalten der Methode; der Ausgangspunkt

wird ohne zwingenden Grund oft in der Geometrie genommen. Ein Nachweis in Betreff der strengen Bündigkeit des Ganzen würde daher positiv und negativ schwer zu führen sein. Auch in der Ausführlichkeit, welche meistens in den elementarsten Dingen am grössten ist, scheint sich der Verfasser kein Gesetz auferlegt zu haben. Im einzelnen zeigt die logische Sorgfalt, der man hier begegnet, einen unverkennbaren Fortschritt gegen ältere Lehrbücher. Ein solcher ist es entschieden, dass eine besondere Theorie der unendlichen Grössen überhaupt aufgestellt wird und dass diese auf richtiger Auffassung des Begriffs beruht, in Folge dessen auch die Definition des Grenzwerts auf die der Unendlichkleinen sich stützt, nicht umgekehrt. Freilich möchte die gegenwärtige Behandlungsweise weder die einfachste noch eine zur strengen Begründung aller gewöhnlichen Infinitesimalschlüsse ausreichende sein. — Der Anfang der Operationslehre ist zum mindesten sehr dunkel: der erste Satz, wenn er überhaupt zutreffend sein und nicht überdies einen Cirkel („gleich“ erklärt durch „gleich“) enthalten soll, ist nicht wol zu verstehen. — Auf jeden Abschnitt folgt eine Reihe von Uebungsaufgaben. II.

Principii elementari sulle probabilità esposti da G. B. Marsano, Professore di matematiche nella R. Università e nel R. Istituto tecnico di Genova. Genova 1876. R. Istituto Sordo-Muti. 153 S.

Hiermit werden die Vorlesungen des Verfassers am technischen Institut veröffentlicht. Die Schrift fasst die Wahrscheinlichkeitslehre nicht als ein Ganzes auf, begrenzt und disponirt den Lehrstoff nicht, sondern führt nur eine Reihe von Aufgaben mit Zahlenbeispielen und algebraischer Formulirung durch und stellt mitunter Lehrsätze der leichtesten Art auf. Ein Fortschritt ist in der That vorhanden, sofern die Aufgaben anfangs einfach, weiterhin complicirter sind; sämmtliche aber fallen in das Gebiet der zählbaren Möglichkeiten. H.

Lehrbuch der Determinanten-Theorie für Studierende. Von Dr. Siegmund Günther, k. bayr. Gymnasialprofessor, Mitglied der Leop. Karol. Akad. d. W. und (C.) d. k. böhm. Gesellsch. d. W. Zweite, durchaus umgearbeitete, vermehrte und durch eine Aufgabensammlung bereicherte Auflage. Erlangen 1877. Eduard Besold. 209 S.

Die erste Auflage ist im 228. litt. Ber. S. 35 besprochen. Die auf dem Titel genannte Umarbeitung in der neuen Auflage lässt sich nicht auf das Ganze, sondern nur auf einzelne Partien beziehen, die gerade nicht zahlreich sind. Die Anordnung ist in wenigen Punkten, wo es sich empfahl, geändert worden. Manches ist hinzugekommen. In der historischen Skizze sind 2 Bearbeiter aus neuerer Zeit, Reiss

und Grassmann den früheren angereicht. Im übrigen sind einige Angaben vervollständigt, und einige neue Themata in den Kreis der Erörterung gezogen. Neu sind ausserdem ein Anhang mit 66 Aufgaben und ein zweiter mit einem Litteraturverzeichnis. Trotz dieser Vermehrungen hat sich infolge kleinerer Lettern der Umfang des Buchs verringert.

H.

Vermischte Schriften, Zeitschriften.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel III. Amsterdam 1877. Weytingh en Brave.

Der Inhalt an Abhandlungen ist folgender:

C. L. Landré. Ueber die singulären Integrale der Differentialgleichungen 1. Ordnung mit 2 Variabeln.

D. Bierens de Haan. Einiges über die „Théorie des fonctions de variables imaginaires, par M. Maximilien Marie.“

B. P. Moors. Theorie der Bascule.

A. J. M. Brogtrop. Ueber die Ergänzung des Repetendums bei Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche.

D. J. Korteweg. Auflösung der Preisfrage 11. (Die Oberfläche eines kegelförmigen Keils mit elliptischer Grundfläche zu berechnen.) — Note über schiefe Flächen. — Auflösung der Preisfrage 12. (Ueber eine rotirende Scheibe, auf deren horizontalen oberen Fläche ein Kugelchen rollt.)

V. A. Julius. Ueber die Entwicklung einer Function in eine Reihe von Cosinus.

D. B. Wisselink. Merkwürdige Eigenschaft einer Determinante 3. Grades.

A. Benthem. Die Periodicität der Functionen.

N. L. W. A. Gravelaar. Ein Satz aus der Theorie der linearen Substitutionen.

W. Kapteyn. Einiges über die Summe der gleichhohen Potenzen der Wurzeln der allgemeinen Gleichung 2. Grades.

D. Bierens de Haan. Einiges über die Quadratwurzel aus einer viergliedrigen Wurzelgrösse.

H.

Nouvelle Correspondance mathématique. Rédigée par Eugène Catalan, Docteur ès sciences, Professeur à l'université de Liège; avec la collaboration de MM. Mansion, Laisant, Brocard, Neuberg et Édouard Lucas. Tome troisième. Liège 1877. E. Decq.

Der Inhalt der 2. Hälfte des Bandes an Abhandlungen ist folgender.

E. Lucas. Von der Anwendung der Systeme tricirculärer und tetrasphärischer Coordinaten auf die Untersuchung anallagmatischer Figuren.

H. Brocard. Note über die Kardioiden.

Reiss. Theorie des Solitärs, frei aus dem Deutschen übersetzt von Ch. Ruchonnet.

E. Catalan. Ueber die geometrische Darstellung der elliptischen Integrale.

H. Brocard. Grenzlage einer Punktreihe der Ebene.

E. Catalan. Ueber 2 Sätze von Sturm.

G. de Longchamps. Untersuchung einer Reihe von Kreisen, Geraden oder Punkten, die in der von n Geraden oder Punkten in einer Ebene gebildeten Figur auf recurrente Weise aus einander hervorgehen. Nebst geometrischer Anwendung.

Laisant. Schwerpunkt eines Kreisbogens.

E. Lucas. Ueber die Theorie der numerischen, einfach periodischen Functionen.

P. Mansion. Auflösung eines Systems von n Gleichungen mit n Unbekannten, deren eine 2. Grades, die übrigen linear sind.

E. Dubois. Note über die Kreise, welche 3 gegebene Kreise berühren.

Proth. Note über eine arithmologische Frage.

H.

Zeitschrift des Vereines deutscher Zeichenlehrer. Redacteur: Prof. Dr. H. Hertzner. IV. Jahrgang. Berlin 1877. Robert Oppenheim.

Diese Zeitschrift erscheint monatlich zweimal, mit Ausfall 1 Nummer im Halbjahr, jedesmal 1 Bogen stark. Sie giebt Nachweise von Lehrmitteln und andere Anzeigen, auch mitunter eine Kritik. Den grössten Teil aber nehmen die Vereinsangelegenheiten ein. H.

Annali di matematica pura ed applicata diretti dal prof. Francesco Brioschi in Milano colla cooperazione dei professori: Luigi Cremona in Roma, Enrico Betti in Pisa, Eugenio Beltrami in Pavia, Felice Casorati in Pavia. Serie II. Tomo VIII. Milano 1877. G. Bernardoni.

Der Inhalt ist folgender:

Christoffel. Ueber eine besondere Classe von ganzen Functionen und Kettenbrüchen.

Bertini. Ueber eine Classe eindeutiger involutorischer Transformationen. Berichtigung.

Brioschi. Ueber eine Classe binärer Formen.

Clebsch. Ueber die Theorie der binären Formen der 6. Ordnung und die Trisection der hyperelliptischen Functionen. (Forts. u. Schluss).

Lucas. Neue Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.

Christoffel. Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten.

Geiser. Ueber die quadratische Gleichung, von welcher die Hauptaxen eines Kegelschnitts im Raume abhängen.

Dini. Ueber einige Functionen, die in einem ganzen Intervall keine Derivate haben.

Betti. Ueber die dreifachen Systeme isothermer und orthogonaler Flächen.

Dini. Ueber die geographische Abbildung einer Fläche auf einer andern.

Lucas. Grundformeln tricircularer und tetrasphärischer Geometrie.

Christoffel. Ueber die Fortpflanzung von Stößen durch elastische feste Körper.

Bertini. Untersuchungen über eindeutige involutorische Transformationen in der Ebene.

Hirst. Note über die Correlation zweier Ebenen.

Betti. Ueber die Bewegung eines Systems von beliebig sich einander anziehenden oder abstossenden Punkten.

Jonquières. Note über einige Fundamentaltheoreme in der Theorie der algebraischen Curven und Flächen, und über ein allgemeines Gesetz, aus dem man sie ableiten kann.

H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXL.

Geschichte der Mathematik und Physik.

- Acten, die, des Galilei'schen Processes. Hrsg. v. K. v. Gebler.
8. Stuttgart, Cotta. 6 Mk.
Fortschritte, die, der Physik im J. 1873. 29. J. Red. v. B.
Schwalbe. 1. Abth. 8. Berlin, G. Reimer. 9 Mk.
Repertorium d. literar. Arbeiten aus d. Geb. d. reinen u. ange-
wandten Mathematik. Hrsg. v. L. Königsberger u. G. Zeuner.
2. Bd. 1. Hft. 8. Leipzig, Teubner. propl. 30 Mk.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

- Haller v. Hallerstein, C., Lehrb. d. Elementar-Mathematik.
8. Aufl., hrsg. v. Maier. 8. Berlin, Nauck & Co. 4 Mk. 20 Pf.
Heilermann, H., Lehrb. f. gewerbl. Fortbildungsschulen. 1. Thl.
Planimetrie. 2. Aufl. 8. Essen, Radke. 1 Mk. 25 Pf.
Heis, E., Sammlg. v. Beispielen u. Aufgaben aus d. allgemeinen
Arithmetik u. Algebra. 48—50. Aufl. 8. Köln, Du Mont-Schauberg.
3 Mk.
Hoüel, G. J., fünfstell. Logarithmentafeln der Zahlen u. d. tri-
gonometr. Functionen. 5. Ausg. 8. Berlin, Alb. Cohn. 2 Mk.
Lampe, E., geometr. Aufg. zu d. kubischen Gleichgn. 8. Ber-
lin. H. W. Müller. 2 Mk.
Meyerhofer, R., mathemat.-techn. Lehr- u. Handbuch. 1. Thl.
5. u. 6. Lfg. 8. Strassburg, Schneider. à 75 Pf.
Reidt, F., Sammlg. v. Aufg. u. Beispielen aus d. Trigonometrie
u. Stereometrie. 2. Thl. Stereometrie. 2. Aufl. 8. Leipzig, Teub-
ner. 3 Mk.
— Resultate d. Rechnungs-Aufgaben in d. Sammlg. v. Aufg. u.
Beispielen aus d. Trigonometrie u. Stereometrie. 1. u. 2. Thl. 2. Aufl.
Ebd. 2 Mk. 80 Pf.
Stehle, A., Aufgabensammlg. aus d. Geb. d. gesammten Mecha-
nik. I. Die Gesetze d. Bewegungslehre. 4. Leipzig, Knapp. 6 Mk.

Vogler, C. A., Anleitg. z. Entwerfen graph. Tafeln, u. deren Gebrauch z. Schnellrechnen, sowie beim Schnellquotiren m. Aneroid u. Tachymeter. 8. Berlin, Ernst & K. 10 Mk.

— 6 graph. Tafeln z. Schnellrechnen u. z. Schnellquotiren m. Aneroid u. Tachymeter. 8. Ebd. 4 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Droese, A., Arithmetik u. Algebra. 2. Aufl. 8. Langensalza, Schulbuchh. 1 Mk. 50 Pf.

Gegenbauer, L., üb. d. Functionen $C_n^r(x)$. 8. Wien, Gerold's S. 30 Pf.

Hattendorff, K., algebr. Analysis. 8. Hannover, Rümpler, 7 Mk. 20 Pf.

Hauck, A. F., u. H. Hauck, Lehrb. d. Arithmetik f. Real-, Gewerb- u. Handelsschulen. 1. Thl. Resultate. 8. Nürnberg, Korn, 1 Mk.

— dass. 2. Thl. 1. Abth. 3. Aufl. 8. Ebd. 2 Mk.

Kampe, J. F., d. abgekürzt. Rechnen m. vollst. u. unvollst. Decimalbrüchen. 8. Böhm. Leipa, Hamann. 1 Mk. 20 Pf.

Matzka, W., Grundzüge d. systemat. Einführung. u. Begründg. d. Lehre d. Determinanten, vermittelt geeigneter Auflösg. d. Gruppen allgem. linearer Gleichgn. 4. Prag, Calve. 3 Mk.

Pleibel, A. L., Handb. d. Elementar-Arithmetik. 7. Aufl. 8. Stuttgart, Schweizerbart. 6 Mk. 40 Pf.

Ruth, F., Theorie d. logarithm. Rechenschieber als Anleitg. f. d. Benutzg. d. 5. beigegebenen auf Carton lithogr. Maassstäbe. 8. Graz, Leuschner & L. 1 Mk.; Maassstäbe dazu baar 2 Mk.

Sickenberger, A., Leitf. d. Arithmetik nebst Uebungsbeispielen. 2. Aufl. 8. München, Th. Ackermann. 1 Mk. 60 Pf.

Suhle, H., Leitf. f. d. Unt. in d. Arithmetik. 2. Hft. 8. Cöthen, Schettler's V. 2 Mk.

Weierstrass, K., zur Theorie d. eindeut. analyt. Functionen. 4. Berlin, Dümmler. 3 Mk.

Zähringer, H., Leitf. f. d. Unt. in d. Arithmetik f. Sekundärschulen. 3. Aufl. 8. Zürich, Meyer & Z. 2 Mk.

Geometrie.

Adam, W., Lehr- u. Handb. d. Flächen- u. Körperberechnung. 5. Aufl. 8. Langensalza, Beyer & S. 1 Mk. 20 Pf.

Blum, L., Leitf. d. ebenen Geometrie f. mittlere Realklassen. 8. Stuttgart, Metzler. 1 Mk. 80 Pf.

Fort, O., u. O. Schömilch, Lehrb. d. analyt. Geometrie.
2. Thl. Analyt. Geometrie d. Raumes v. O. Schömilch. 4. Aufl. 8.
Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Gerlach, H., Lehrbuch d. Elemente der Planimetrie. 4. Aufl.
8. Dessau, Reissner. 1 Mk. 50 Pf.

Hechel, C., Compendium d. Stereometrie nach Legendre. 3. Aufl.

8. Reval, Kluge. 1 Mk. 50 Pf.

Keudel, H., prakt. Lehrs. d. Geometrie. 8. Duisburg, Mendelssohn. 70 Pf.

Koutny, E., die Normalenflächen d. Flächen 2. Ordnung längs ebener Schnitte derselben. 8. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 20 Pf.

Meyer, C., Lehrb. d. Geometrie f. Gymn. u. andere Lehranst.
2. Thl. Stereometrie. 6. Aufl. 8. Leipzig, Koch. 1 Mk. 50 Pf.

Mink, W., Lehrb. d. analyt. Geometrie d. Kegelschnitte. 8.
Berlin, Nicolai. 1 Mk. 50 Pf.

Oppel, J. J., Leitf. f. d. geometr. Unt. an Gymnasien u. ähnl.
Lehranst. 2. Aufl. 8. Frankfurt, Winter. 3 Mk. 50 Pf.

Peschka, G. A. V., freie schiefe Projection. 8. Wien, Gerold's S. 80 Pf.

Schreiber, G., d. Projectionslehre. 2. Aufl. 8. Leipzig, Spamer. 2 Mk.

Solin, J., üb. Curven dritter Ordng., welche e. unendlich ferne Rückkehrtangente haben, u. deren Auftreten in d. geometr. Statik.
4. Prag, Rziwnatz. 1 Mk. 60 Pf.

Spieker, Th., Lehrb. d. ebenen Geometrie. 13. Aufl. 8. Potsdam, Stein. 2 Mk. 50 Pf.

Trigonometrie.

Schumann, H., Lehrb. d. ebenen Trigonometrie f. Gymn. u. Realschulen. 2. Aufl. Bearb. v. R. Gantzer. 8. Berlin, Weidmann. 1 Mk. 20 Pf.

Geodäsie.

Jordan, W., Handb. d. Vermessungskunde. 2. Aufl. 3. Lfg. 8. Stuttgart, Metzler. 4 Mk.

Szczepaniak, J., Universal-Nivellir-Instrument als Tachnomet. 8. Wien, Hartleben. 1 Mk. 25 Pf.

Mechanik.

Clausius, C., d. Potentialfunction u. d. Potential. 3. Aufl. 8. Leipzig, Barth. 4 Mk.

Jgel, B., einige Sätze u. Beweise zur Theorie d. Resultante. 8. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Klein, H., Theorie d. Elasticität, Akustik u. Optik. 8. Leipzig, Quandt & H. 14 Mk.

Walberer, J. C., Anfangsgründe d. Mechanik fester Körper m. vielen Uebungsaufg. 3. Aufl. 8. München, Th. Ackermann. 2 Mk. 40 Pf.

Praktische Mechanik.

Weisbach's Ingenieur. 6. Aufl. Unter Mitwirkung v. F. Reuleaux, hrsg. v. C. Quersurth. 4. (Schluss-) Abth. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 2 Mk. 80 Pf.

Optik.

Fontaine, H., d. elektr. Beleuchtg. 8. Wien, Lehmann & W. 5 Mk.

Lorenz, L., die Lehre vom Licht. 8. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Astronomie und Meteorologie.

Beobachtungen, meteorolog., angestellt in Dorpat im J. 1875, red. v. A. von Oettingen u. K. Weihrauch. 10. J. 8. Leipzig, Köhler. 1 Mk. 50 Pf.

Fortschritte, die, auf d. Geb. d. Astronomie. Nr. 4. 1876. 8. Leipzig, Mayer. 2 Mk.

Fortschritte, die, auf d. Geb. d. Meteorologie. Nr. 4. 1876. 8. Leipzig, Mayer. 1 Mk. 60 Pf.

Führer, astronom., pro 1878 u. in d. Himmelskunde überhaupt Von G. Sternfreund. 3. J. 19. München, liter.-artist. Anstalt. 1 Mk.

Heis, E., Resultate d. in d. 43 Jahren 1833—1875 angestellte Sternschnuppen-Beobachtgn. 4. Cöln, Du Mont-Schauberg. 6 Mk.

Littrow, J. J. v., d. Wunder d. Himmels. 6. Aufl. 22—27. Lfg. Berlin, Hempel. à 50 Pf.

Möllinger's, O., neue grosse dritte Himmelskarte mit bewegl. Horizont. 3. Blatt. Imp.-Fol. Zürich, Schmidt. 8 Mk.; auf Leinwand 20 Mk.

Neumann, N. L., Lectures sur l'astronomie à l'usage des écoles chrétiennes. 8. Wien, Sittenis. 80 Pf.

Repertorium f. Meteorologie. Hrsg. v. d. kaiserl. Akademie d. Wiss. Red. v. H. Wild. 5. Bd. 2. Hft. 4. Leipzig, Voss. 10 Mk. 50 Pf.

Zinger, N., d. Zeitbestimmung aus correspondir. Höhen verschied. Sterne. 8. Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

Nautik.

- Almanach, nautischer, f. d. J. 1878. Hrsg. v. F. Raspe. 8. Rostock, Stiller. 1 Mk.
Preuss, W. H., nautische Aufg. 1. Hft. Breitenbestimmungen. 8. Oldenburg, Schulze. 1 Mk. 60 Pf.

Physik.

- Bohn, O., Ergebnisse physikal. Forschg. 2. Lfg. 8. Leipzig, Engelmann. 8 Mk.
Bruns, V. v., die galvanokaust. Apparate u. Instrumente, ihre Handhabg. u. Anwendg. 8. Tübingen, Laupp. 12 Mk.
Hoffmann, E., das Telephon. 8. Berlin, Springer. 60 Pf.
Hromádka, F., physikalische Wandtafeln. 12 Blatt. Fol. Mit Text: Bilder aus der Physik. 8. Tabor. Jansky. 15 Mk.
Koppe, K., Anfangsgründe d. Physik. 14. Aufl. Bearb. v. W. Dahl. 8. Essen, Bader. 4 Mk. 20 Pf.
Maxwell, J. C., Theorie d. Wärme. 8. Breslau, Maruschke & B. 6 Mk.
Repertorium d. Experimental-Physik, f. physikal. Technik, mathemat. u. astronom. Instrumentenkunde. 14. Bd. (6 Hefte). 1. Hft. 8. München, Oldenbourg. propl. 20 Mk.
Stewart, V., Physik. 2. Aufl. 16. Strassburg, Trübner. 80 Pf.
Teller, E., Physik in Bildern. 2 Thle. 8. Leipzig, Spamer. 6 Mk.
Vetter's, C., 16 Krystallnetze. 3. Aufl. 8. Dresden, Kämmerer. 75 Pf.

Vermischte Schriften.

- k Abhandlungen d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin. Aus d. J. 1876. Berlin, Dümmler. Mathemat. Abth. 4 Mk. 60 Pf. — Physikal. Abth. 28 Mk.
Annalen, mathemat. Hrsg. v. F. Klein u. A. Mayer. 13. Bd. (4 Hefte). 1. Hft. 8. Leipzig, Teubner. propl. 20 Mk.
Denkschriften d. k. Akad. d. Wiss. Mathemat.-naturwiss. Classe. 37. Bd. 4. Wien, Gerold's S. 55 Mk.
Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik. Hrsg. v. C. W. Borchardt. 84. Bd. (4 Hefte). 1. Heft. 4. Berlin, G. Reimer. propl. 12 Mk.
Sitzungsberichte d. mathemat.-physikal. Classe d. k. b. Akad. d. Wiss. zu München. 1877. 2. Heft. 8. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

- Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wiss. Mathemat.-naturwiss. Classe.
75. Bd. 2. Abth. 5. Heft. 8. Wien, Gerold's S. 4 Mk.
— dass. 75. Bd. 3. Abth. 1—5. Heft. 8. Ebd. 6 Mk. 40 Pf.
— dass. 75. Bd. 1. Abth. 4. Heft. 8. Ebd. 4 Mk. 40 Pf.
— dass. 76. Bd. 2. Abth. 1. Heft. 8. Ebd. 2 Mk. 40 Pf.
Völkers, J.; der Indicator. 2. Aufl. 8. Berlin, Gärtner. 5 Mk.
Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, hrsg. v. O. Schlömilch,
E. Kahl u. M. Cantor. 23. J. 1878. (6 Hefte). 1. Heft. 8.
Leipzig, Teubner. proplt. 18 Mk.
-

Fig. 8.

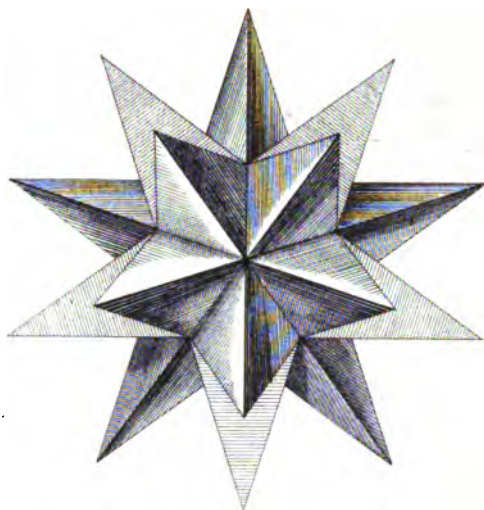


Fig. 10.

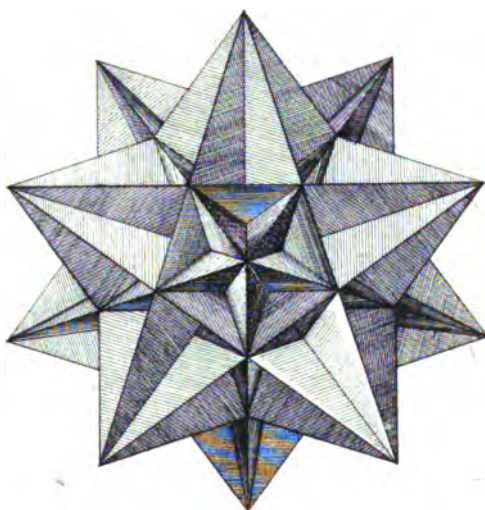


Fig.



polyèdres réguliers étoilés.

Verlagsbuchhandlung von QUANDT & HÄNDEL in Leipzig.

In unserm Verlage erscheint für 1878 im 13. Jahrgange die

Polytechnische Bibliothek.

Monatliches Verzeichniss

der in Deutschland und dem Auslande neu erschienenen Werke
aus den Fächern der

**Mathematik und Astronomie, der Physik und Chemie, der Mechanik
und des Maschinenbaues, der Baukunst und Ingenieurwissenschaft,
des Berg- und Hüttenwesens, der Mineralogie und Geologie.**

Mit Inhaltsangabe der wichtigsten Fachzeitschriften.

Monatlich 1 Bogen in 8. — Preis jährlich 3 Mark.

Bestellungen auf die Polytechnische Bibliothek
für 1878 werden von allen Buchhandlungen und Postanstalten
angenommen. — Direct unter Kreuzband bezogen beträgt der
jährliche Abonnementspreis: im deutsch-österreich. Postverein:
3 M. 40 Pf.; im Gebiete des Weltpostvereins: 3 M. 60 Pf.

LEIPZIG.

Quandt & Händel.

Von der Buchhandlung

dem Postamt

erbittet sich der Unterzeichnete:

- 1 Polytechnische Bibliothek f. 1878. Monatliches Verzeichniss der in Deutschland und im Auslande erschienenen Neuigkeiten der polytechnischen Literatur. (Verlag von QUANDT & HÄNDEL in LEIPZIG). Preis pro Jahrgang von 12 Nummern 3 Mark.

Unterschrift (Name, Stand u. Wohnort):

1

2

3



Verlag von Louis Nebert in Halle a/S.
Soeben erschien:

Dr. P. Langer,
Die
Grundprobleme der Mechanik.
Eine
kosmologische Skizze.
gr. 8. geh. Preis 1 Mk. 80 Pf.

Abonnements-Einladung
auf

L'Instructeur.

Wochenschrift zur
Belehrung und Unterhaltung in französischer Sprache.

 **Mit erklärenden Anmerkungen.** 

Herausgegeben unter Mitwirkung namhafter Fachmänner von

Dir. Dr. Ad. Bräutigam und Charles Brandon.

Wöchentlich 1 Nummer. — Vierteljährlicher Abonnementspreis M. 1,75.

und

The Instructor.

Wochenschrift zur
Belehrung und Unterhaltung in englischer Sprache.

 **Mit erklärenden Anmerkungen.** 

Herausgegeben unter Mitwirkung namhafter Fachmänner von

Dr. Eduard Tischer.

Wöchentlich 1 Nummer. — Vierteljährlicher Abonnementspreis M. 1,75.

Genannte Wochenschriften, vortreffliche Förderungsmittel beim Studium dieser Sprachen, schöpfen grösstentheils aus dem frischen Leben der Gegenwart und berichten von dem Besten, was auf geistigem und materiellem Gebiete geleistet worden, eignen sich daher auch vorzüglich zur Vorbereitung auf die Prüfungen (Cadetten, Einjährig-Freiwillige, Posteleven etc.). —

Wenn auch nach gleichem System, so sind beide Journale doch in jeder Beziehung selbstständig und dem Charakter der betreffenden Sprache angepasst.

Bestellungen nehmen alle Buchhandlungen und Postämter entgegen und werden Probe-Nummern in allen Buchhandlungen, sowie bei der Verlagshandlung gratis verabreicht. —

Inserate (25 Pf. pro Petitzeile) von bedeutender Wirkung.

Leipzig.

Diez & Gehrmann.

Verlagsbuchhandlung.

INHALT.

	Seite.
I. Die Sturm'schen Functionen zweiter Gattung. Von Herrn Dr. Heinrich Wendlandt	1
II. Les trois sphères des Polyèdres réguliers étoilés. Par Georges Dostor, Professeur à la Faculté des sciences de l'Université catholique de Paris	78
III. Inscription dans le cercle des polygones réguliers de 15, 30, 60, 120, etc. côtés. Calcul des Côtés. Par Georges Dostor . .	103
IV. Neue Eigenschaft der Kegelschnitte. Von K. Zahradnik . . .	111

Harvard

JUL 18 1878

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren
Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweiundsechzigster Teil. Zweites Heft.

(Mit 3 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1878.

Verlag von Modellen für den höheren math. Unterricht.

Bei **L. Brill** in Darmstadt sind erschienen:

Math. Gips-Modelle

mod. nach den im math. Institut der k. technischen Hochschule in München
unter Leitung der **Proff. Dr. Brill** und **Dr. Klein**
angefertigten Originalen.

Formen und Abgüsse von **J. Kreittmayr**, Formator des National-
museums in München.

Erste Serie.

1) Rotationsfl. der Tractrix mit geodät. u. Haupttangenten-Curven. 2) Centralfläche des ellipt. Paraboloids (3 Mod.). 3) Centralfläche des einschäl. Hyperboloids (3 Mod.). 4) Rotationsellipsoid mit geodät. Linien. 5) Drei-axiges Ellipsoid mit geodät. Linien durch die Nabelpunkte.

Preis der Serie (bestehend aus 9 Mod.) **60 Mark** excl. Emballage (10 Mk.) und Versandkosten.

Zweite Serie.

6) Drei Modelle der Kummer'schen Fläche (16, 8, 4 Knotenpunkte reell.) 7) Fläche 3ter Ordn. mit 4 reellen con. Knotenpunkten nebst Haupttangencurven. 8) Drei Rotationsflächen const. mittl. Krümmung nebst geodät. Linien. 9) Rotationsfläche von const. negat. Krümmungsmass (Kegel-Typus) nebst geodät. u. Asymptoten-Linien. 10) Desgl. (Hyperboloid-Typus) mit parallelen geodät. Linien u. geodät. Kreisen. 11) Bahncurve eines schweren Punktes auf einer Kugel.

Jedem Modell resp. jeder Gruppe von zusammengehörigen Modellen ist ein erläuternder Text beigelegt.

Preis der Serie **120 Mark** excl. Emballage (6 Mk.) und Versandkosten.

Mod. u. Prosp. sind durch jede Buchhandlung, ferner durch **Hrn. Kreittmayr** in München, sowie direct durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Carton-Modelle

von Flächen zweiter Ordnung, construirt nach Angabe von **Prof. Dr. A. Brill** in München. Dargestellt durch ineinandergefügte Kreise aus farbigem Cartonpapier nebst wissenschaftl. Erläuterung. Die Serie enthält: Zwei Ellipsoide verschied. Constr., ein- u. zweischäl. Hyperboloid, ellipt. u. hyperbol. Paraboloid u. Kegel. Ganze Serie **11 Mark**; ferner 3 Arten **Stative** zum Aufstecken resp. Aufstellen der Modelle.

Illustrirte Prospekte gratis durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig.
(Zu beziehen durch jede Buchhandlung.)

Die Schule der Physik.

Eine Anleitung zum ersten Unterricht in der Naturlehre.

Zum Schulgebrauch und zur Selbstbelehrung

von **Dr. Joh. Müller**,

weil. Professor zu Freiburg im Breisgau.

Zweite Auflage. Mit 293 in den Text eingedruckten Holzstichen.

gr. 8. geh. Preis **2 Mk. 40 Pf.**

V.

Inedita Copernicana.

Aus den Handschriften in Berlin, Frauenburg, Upsala und Wien

herausgegeben von

Maximilian Curtze.

Vorwort.

Es ist ein angenehmes Gefühl den Spuren eines grossen Mannes nachgehend auf völlig unbekannte, für die richtige Würdigung desselben jedoch höchst bedeutungsvolle Stellen geführt zu werden. Dieses Wohlgefühl ist mir jetzt zum dritten Male zu Teil geworden: Als ich in Prag für die Saecularausgabe des grossen Werkes *De revolutionibus* die Originalhandschrift verglich, und dadurch in den Stand gesetzt wurde, in die Werkstatt des schaffenden Genius einen Blick zu tun; als ich dann in den von mir 1875 in der Zeitschrift für Mathematik und Physik veröffentlichten *Reliquiae Copernicanae*¹⁾ aus upsalenser Handschriften weitere Beiträge zu dieser Frage herbeischaffen, aber auch in anderer Beziehung das Bild des Copernicus klarer stellen konnte; als ich endlich in diesem Jahre durch die Freigebigkeit des Mäcens unserer Wissenschaft, des Fürsten Don Balthasar Boncompagni in Rom, Upsala selbst besuchen durfte, dort eine ungeahnte Fülle von unbekannten Copernicanis fand²⁾,

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik. XIX. Jahrg. 1874, S. 76—82, 432—458; XX. Jahrg. 1875, S. 221—248. Auch separat gedruckt, Leipzig Teubner 1875, 66 S. 8°. und eine Tafel.

2) Einen vorläufigen Bericht erstattete ich an den Copernicus-Verein für Wissenschaft und Kunst zu Thorn am 4. Juni 1877. Derselbe ist mit mannigfachen Erweiterungen abgedruckt im Juli-Septemberheft 1877 der Altpreuussischen Monatsschrift S. 476—482 und im Märzheft 1878 des *Bullettino Boncompagni*, Roma 1878.

dort Kunde erhielt von zwei der wertvollsten Handschriften, welche, ohne dass eines Kenners Auge diese Schätze gesehen, unbeachtet in der wiener Hofbibliothek gelegen, trotzdem sie seit 1873 in dem gedruckten Kataloge derselben aufgeführt sind!

Dank der hohen Intervention des auswärtigen Amtes des deutschen Reiches, konnte ich diese Perlen — leider schlecht gefasste — mit Musse benutzen, und mit ihnen, dem Wichtigsten, was ausser dem grossen Werke von Copernicus auf uns gekommen ist, will ich diese Arbeit beginnen. Ihnen werden sich an zweiter Stelle die mathematisch-astronomischen Notizen aus upsalenser und frauenburger Handschriften, an dritter einige Gutachten anschliessen, welche man füglich der angewandten Mathematik zuteilen darf. An vierter Stelle werden endlich diejenigen upsalenser Excerpte mitgeteilt werden, die uns Copernicus von einer ganz andern Seite zeigen: als helfenden Arzt. Dieser Teil seiner Tätigkeit ist bis jetzt durch Documente fast gar nicht aufgeklärt; auch das, was wir bieten können, sind nicht sowohl dergleichen Documente als diätetische Regeln und ärztliche Recepte, welche er in die Bücher eingezeichnet hat, welche teils ihm selbst gehörten, teils zum Gebrauch des bischöflichen Leibarztes, der er ja war, angeschafft waren. Eine Art Anhang wird dann den kurzen Nachweis einiger bis jetzt für das Leben des Copernicus noch nicht verwerteter Documente bringen, bei denen Copernicus als Zeuge fungiert hat.

Ich kann nicht umhin hier die grossen Dienste, welche mir bei der Gestaltung des nachfolgenden Textes mein verehrter College, Herr Oberlehrer Boethke, geleistet hat, mit aufrichtigem Danke hier öffentlich anzuerkennen.

Thorn, im December 1877.

M. Curtze.

I. Der „Commentariolus“ des Copernicus über sein Buch „De revolutionibus.“

Die K. K. Hofbibliothek zu Wien besitzt einen Quartband mit der Ordnungsnummer „10530“. Derselbe besteht aus 45 mit Bleistift von 1—45 numerierten Blättern, die mit einem Vorblatte und einem Nachblatte zusammengebunden sind. Die Höhe der Blätter beträgt 215^{mm}, die Breite 170^{mm}. Eine ältere Numeration beginnt mit Blatt 4, das die Ziffer 26 trägt, und geht bis Bltt. 44, das mit 67 bezeichnet ist. Diese ältere Zählung erleidet eine Unterbrechung; das Blatt, welches mit 60 hätte bezeichnet sein müssen, fehlt. Da die mit Bleistift bewirkte Bezifferung diese Lücke nicht aufweist, so muss das Bltt. 60 sowohl als die Blätter 1—25, welche am Anfange fehlen, schon vor derselben nicht mehr vorhanden gewesen sein³⁾. In der Tat steht auch am Fussende des Blattes 37^b, dessen alte Bezifferung 59 ist, mit Bleistift geschrieben „(fol. 60. deest)“, jedenfalls von demjenigen hinzugefügt, der die Bleistiftfoliierung ausführte. Der Einband ist ein völlig moderner Pappband mit Pergament Rücken und grünmarmoriertem Papierüberzug. Die Schrift des Teiles

3) Einer freundlichen Nachricht des Herrn Dr. Joseph Haupt, Custos der K. K. Hofbibliothek, entnehme ich Folgendes: Die Handschrift 10570 ist in dem Handschriftenkatalog Tegnagels († 1636) nicht verzeichnet, dagegen hat Lambeck (Lambecius) dieselbe aufgeführt. Er bezeichnete die Blätter 1—33 (26—55 der alten Numeration) durch $\frac{\text{CCCLXII}}{362}$, die Blätter 34—45 (56—67 der alten Numeration) mit $\frac{\text{CCCLXIII}}{363}$, hatte also aus ihnen zwei

Handschriften gemacht. Schon zu seiner Zeit fehlten aber, wie hieraus hervorgeht, Bltt. 1—25 der Gesamthandschrift. Sie wurde später in dem Kataloge des Gentilotti von Engelsbrunn am Anfange des vorigen Jahrhunderts ebenfalls als zwei gesonderte Handschriften aufgeführt, aber gleichfalls unmittelbar neben einander gestellt, und haben in demselben die Nummern Philos. 370, 369. Auch er hat das dritte fehlende Stück nicht vorgefunden. Zusammengebunden sind beide Handschriften erst vor 6 oder 7 Jahren, aus welcher Zeit auch die Bleistiftfoliierung stammt. Auf Bltt. 4^a (früher 26^a) steht folgende Widmung: „Dñs M. Christiernus Seuerinus Longomontanus reliquit amico suo Iohanni Ericksen *μυμύσινον* (!) Benachia Bohemorum 18 Julii discedens Ao 1600.“ Es dürfte also die Handschrift aus dem Besitze Ericksen's in die Hände Tycho Brahe's gelangt sein, dessen gesamte Bibliothek in die Hofbibliothek zu Wien unter Lambecius überging.

der Handschrift 10530, welcher uns hier allein interessiert (Bltt. 34^a—43^a), stammt aus dem Ende des XVI. Jahrhunderts, kann also auch nicht Autograph des Copernicus sein⁴). Der Abschreiber kann von dem Inhalte dessen, was er abschrieb, nicht gerade viel verstanden haben, denn der Text ist vielfach sehr verderbt, und es lässt sich oft nur durch mehr oder weniger sichere Conjectur bestimmen, was der Verfasser gesagt hat oder hat sagen wollen. Ich lasse zunächst den Text folgen, in der Fassung, in welcher ich glaube, dass Copernicus ihn geschrieben hat. In Hinsicht auf die befolgte Orthographie verweise ich auf die Grundsätze, welche ich in den Prolegomenis der Säcularausgabe dargelegt habe⁵), die auch hier durchgehend zur Geltung gelangen. Unter dem Texte habe ich die Abweichungen der Handschrift von demselben verzeichnet; man wird aus ihnen das bestätigt finden, was ich oben über die Fähigkeit des Abschreibers gesagt habe. Erläuterungen zu dem Commentariolus, Vergleichungen seiner Angaben mit dem Texte der Revolutionen u. s. w. folgen dem Abdrucke des Textes. Jeder, der dieses hochinteressante Werk gelesen hat, wird die grosse Wichtigkeit desselben für die Beurteilung des Copernicus zugeben. Der Commentariolus ist das, was wir heute eine Selbstanzeige eines Buches zu nennen pflegen. Es scheint aus dem Wortlaute desselben hervorzugehen, dass derselbe geschrieben ist vor Vollendung des grossen Werkes, er dürfte also in den 30er Jahren des XVI. Jahrhunderts entstanden sein, also später als der Brief an Wapowski, den ich, zum ersten Male in lesbarer Gestalt, dem Commentariolus folgen lasse. An wen der Commentariolus gerichtet ist, ist mir bis jetzt zu erforschen unmöglich gewesen. Jedenfalls haben wir in ihm jenes „Prooemium, quod præmisit“ zu sehen, welches Gemma Frisius in einem Briefe an Iohannes Dantiscus d. d. „Lovanii, Decimotertio Kal. Augusti 1541“ als von Copernicus herrührend anführt, und das ich bei der ersten Herausgabe dieses Briefes auf die „Narratio Prima“ des Rheticus beziehen zu müssen glaubte⁶). Zur Stütze dieser Behauptung stehe

4) Der erste Teil (Bltt. 4^a—21^a, nach ursprünglicher Numeration 26^a—55^a) enthält eine Abhandlung des M. Christiernus Severinus Longomontanus über den Cometen von 1590.

5) Nicolai Copernici De Revolutionibus Orbium Cælestium Libri VI. Ex Auctoris Autographo Recudi Curavit Societas Copernicana Thorunensis. Thoruni 1873, S. XX: „De editionis nostræ ratione et norma.“

6) Fünf ungedruckte Briefe des Gemma Frisius. Nach den Originalen in der Universitätsbibliothek zu Upsala herausgegeben (Grunert's Archiv, T. LVI, S. 313—325) m. s. speciell S. 319, Z. 23 bis S. 320, Z. 16.

hier die Stelle aus jenem Briefe. Eine Vergleichung derselben mit dem Inhalte des Commentariolus wird meine Behauptung ohne Weiteres illustrieren.

„Atque, ut de aliis nunc taceam, ipsa sane Vrania sedes ibi finxit „novas, novosque suos excitavit cultores, qui novam nobis terram, „novum Phœbum, nova astra, immo totum alium apportabunt orbem. „Et quidni novum, cum hactenus ignotum prorsus et incertum depictum limitibus orbem, iam deinceps tanquam e cœlo asportatum „notissimum simus habituri? Quot enim erroribus, involucris, labyrinthis, quot denique enigmatibus plus quam Sphyncicis involutam „habuimus nostram Astrologiam! Ego sane multa possem enumerare „quæ nunquam mihi satisfacere potuerunt. Quale est, quod Martis „motum sæpe a calculo, vel exactissimo secundum tabulas, tribus „signiferi partibus abesse observaverim; quod Lunæ magnitudo non „tantum varietur ad nostrum conspectum, quantum notant gravissimi „huius artis authores; quod anni quantitas nunquam inventa sit exacte, conformis veritati. Nihil nunc dicam de motu firmamenti et „apogiorum, qui, ut ne umbram quidem habuit veritatis, ita omnibus „ridiculus approbatus; omitto etiam plura alia de omnium fere stellarum „longitudine et latitudine, ne D. T. R^m obstrepam incivisius. „Hæc si reddiderit author ille vester sarcta et tecta „(id quod maxime animus præagit ex eo procœmio, quod „præmisit), nonne hoc est novum dare terram, novum terram, „novum cœlum ac novum mundum? Neque ego nunc disputo de „hypothesibus, quibus ille utitur pro sua demonstratione, quales sint „aut quantum veritatis habeant. Mea enim non refert, terramne dicat „circumvolvi, an immotam consistere; modo syderum motus temporumque „intervalla habeamus ad amussim discreta et in exactissimum „calculus redacta. Sola me mora omnium pessima habet; cupio enim „iamiam videri huius negotii finem, et non pauci sunt passim viri „eruditi, quibus non minor inest animi cupiditas hæcce videndi, quam „mihi. Quapropter, Ornatissime Præsul, non parum mereberis gracie „apud posteros omnes, si (quod tibi arbitror neque grave esse neque „arduum) calcaribus tantum usus hoc opus promoveas. Non te latet „enim, qua ratione sæpe accidat a decessis authoribus, ut libri, opera, „supellex, denique tota diripiantur abeantque in oblivionem, quæ alioqui multis ex usu essent futura.

„Scis arbitrator, Dignissime Præsul, de quo loquar, nam et mihi „præsenti olim de hoc authore celebri fecisti mentionem, cum de terræ „cœlique motu inter nos conferremus.“

Es giebt noch eine ganze Reihe weiterer Tatsachen, welche sich unter der Voraussetzung, dass Copernicus seinen Commentariolus schon

geschrieben hatte, leicht erklären lassen. Im Jahre 1533 konnte Widmanstadt dem Papste Clemens VII. die copernicanische Theorie darlegen, wie aus Codex Graec. CLI der Hof- und Staatsbibliothek zu München hervorgeht, in welchem sich eine bezügliche eigenhändige Notiz Widmanstadts findet⁷⁾. 1536 schreibt Cardinal Nicolaus Schönberg an Copernicus und bittet um Abschrift des grossen Werkes; wenn er den Commentariolus gelesen, ist dieses Verlangen sehr natürlich⁸⁾. 1535 schreibt Erasmus Reinhold in der Vorrede zu seiner Ausgabe der *Theoricæ novæ planetarum* Peurbach's, Wittenbergæ 1535: *Tametsi video quendam recentiorem, præstantissimum Artificem (qui magnam de se apud omnes concitavit expectationem restituendæ Astronomiæ et iam adornat editionem suorum laborum) sicut in aliis Astronomiæ partibus, ita etiam in hac varietate motus Lunæ explicanda δὲ πασῶν dissentire a formâ Ptolemaica. Tribuit enim Lunæ epicyclum Epicycli etc.*, was sehr verständlich klingt, wenn der Commentariolus als vorhanden angesehen wird. Sollte nicht auch Rheticus durch dieses Schriftchen zuerst angeregt worden sein, seine Reise nach Frauenburg anzutreten?

Also würden die ersten Jahre des dritten Jahrzehnts des fünfzehnten Jahrhunderts als Entstehungszeit des Commentariolus festzuhalten sein.

Nach dieser Abschweifung gehe ich zur Mitteilung des Textes des Commentariolus über.

7) Die Worte Widmanstadt's lauten: „Clemens VII. Pontif. Maximus hunc Codicem mihi D. D. D. Anno MDXXXIII Romæ postquam ei presentibus Fr. Ursino, Ioh. Salviato cardd., Ioh. Petro epasco Viterbien. et Mathæo Curtio Medico physico in hortis Vaticanis Copernicanam de motu terræ sententiam explicavi. — Ioh. Albertus Widmanstadius cognito Lucretius Smi D. N. Secretarius domesticus et familiaris.“

8) Siehe die verschiedenen Ausgaben des Copernicus z. B. die Sæcularausgabe Thoruni 1873. S. XIII. Anm. 15.

Bltt. 56a
(34a)

Nicolai ²/₃ Copernici
de hypothesibus motuum cælestium
a se constitutis
commentariolus.

Bltt. 56b
(34b)

Multitudinem orbium cælestium maiores nostros eam maxime ob 5
causam posuisse video, ut apparentem in syderibus motum sub re-
gularitate salvarent. Valde enim absurdum videbatur cæleste corpus
in absolutissima rotunditate non semper æque moveri. Fieri autem
posse adverterant, ut etiam compositione atque concursu motuum re-
gularium diversimode ad aliquem situm moveri quippiam videretur. 10
Id quidem Callippus et Eudoxus per concentricos circulos deducere
laborantes non potuerunt et his omnium in motu sydereo reddere
rationem, non solum eorum quæ circa revolutiones syderum videntur,
verum etiam quod sydera modo scandere in sublime, modo descen-
dere nobis videntur, quod concentricitas minime sustinet. Itaque 15
potior sententia visa est per eccentricos et epicyclos id agi, in qua
demum maxima pars sapientum convenit. Attamen quæ a Ptolomæo
et plerisque aliis passim de his prodita fuerunt, quamquam ad nume-
rum responderent, non parvam quoque videbantur | habere dubitatio-
nem. Non enim sufficebant, nisi etiam æquantes quosdam circulos 20
imaginarentur, quibus apparebat neque in orbe suo deferente, neque

2. cælestium || cælestium und so immer. — 6. syderibus || sideribus. —
11. Callippus || Calypus. — 17. a Ptolomæo || ab Ptolomeo. —

2. hypothesibus. Es ist be-
achtenswert, dass hier Copernicus
selbst seine Darstellung des Weltge-
bändes als Hypothese hinstellt. — 11.
Callippus et Eudoxus. Der Name
des Callippus kommt in den Revolu-
tionen an 4 Stellen vor. Während an
dreien derselben (S. 159, 183, 213 der
Säcularausgabe) nur der kallippischen
Ära Erwähnung geschieht, führt Copper-
nicus in der vierten Stelle (S. 191 der

Säcularausgabe) die Beobachtung der
Länge des Jahres durch Kallippus an,
von einer Kenntniss der Theorie der
concentrischen Sphären, wie in dem
obigen Passus, ist in den Revolutionen
aber nirgends die Rede; Eudoxus wird
von Copernicus in dem grossem Werke
überhaupt nicht erwähnt. Um so wich-
tiger dürfte daher diese Stelle unseres
Commentariolus für die Beurteilung
der Studien des Copernicus sein.

in centro proprio æquali semper velocitate sydus moveri. Quapropter non satis absoluta videbatur huiusmodi speculatio, neque rationi satis concinna. Igitur cum hæc animadvertissem ego, sæpe cogitabam si forte rationabilior modus circulorum inveniri possit, e quibus omnis
 5 apparens diversitas dependeret, omnibus in seipsis æqualiter motis, quemadmodum ratio absoluti motus poscit. Rem sane difficilem aggressus ac pæne inexplicabilem obtulit se tandem, quomodo id paucioribus ac multo convenientioribus rebus, quam olim sit proditum, fieri possit, si nobis aliquæ petitiones, quas axiomata vocant, concedantur,
 10 quæ hoc ordine sequuntur.

Prima petitio.

Omnium orbium cælestium sive sphærarum unum centrum non esse.

Secunda petitio.

Centrum terræ non esse centrum mundi, sed tantum gravitatis et orbis
 15 Lunaris.

Tertia petitio.

Omnes orbes ambire Solem, tanquam in medio omnium existentem, ideoque circa Solem esse centrum mundi.

Quarta petitio.

Bitt. 5a
(35a)

20 Minorem esse comparisonem distantiarum Solis et terræ ad altitudinem firmamenti, quam semidimetientis terræ ad distantiam Solis, adeo ut sit ad summitatem firmamenti insensibilis.

Quinta petitio.

Quicquid ex motu apparet in firmamento, non esse ex parte ipsius,
 25 sed terræ. Terra igitur cum proximis elementis motu diurno tota convertitur in polis suis invariabilibus firmamento immobili permanente ac ultimo cælo.

Sexta petitio.

Quicquid nobis ex motibus circa solem apparet, non esse occasione
 30 ipsius, sed telluris et nostri orbis, cum quo circa Solem volvitur ceu aliquod aliud sydus, sicque terram pluribus motibus ferri.

6. poscit || possit. — 17. Omnes || Q'æ. — [Solem || solent. — 26. permanente || perueniente. — 30—31. ceu aliquod aliud sydus || seu aliquo alio sydere.—

11. Prima petitio. M. s. De rev. (S. 17—19). — 23. Quinta petitio. De Rev. Lib. I, Cap. V (S. 14—15). — 13. Secunda petitio. De rev. Lib. I, 15—17). — 28. Sexta petitio. Cap. VIII (S. 24—25). — 16. Tertia petitio. Ebenda. — 19. Quarta petitio. De rev. Lib. I, Cap. VI (S. 24—25). —

Septima petitio.

Quod apparet in erraticis retrocessio ac progressus, non esse ex parte ipsarum sed telluris. Huius igitur solius motus tot apparentibus in cælo diversitatibus sufficit.

His igitur sic præmissis conabor breuiter ostendere, quam ordinate æqualitas motuum servari possit. Hic autem brevitatis causa mathematicas demonstrationes ommittendas arbitratus sum maiori volumini destinatas. Quantitates tamen semidiametrorum orbium in circulorum ipsorum explanatione hic ponentur, e quibus mathematicæ artis non ignarus | facile percipiet, quam optime numeris et observationibus talis circulorum compositio conveniat.

St. 57b
(356)

Proinde ne quis temere mobilitatem telluris asseverasse cum Pythagoricis nos arbitretur, magnum quoque et hic argumentum accipiet in circulorum declaratione. Etenim quibus Physiologi stabilitatem eius astruere potissime conantur, apparentiis plerumque innituntur, quæ omnia hic in primis corruunt, cum etiam propter apparentiam versemus eandem.

De ordine orbium.

Orbes cælestes hoc ordine sese complectuntur. Summus est stellarum fixarum immobilis et omnia continens et locans; sub eo Saturnus; hunc sequitur [Iuppiter; hunc] Martius; subest huic orbis, in quo nos circumferimur: deinde Venerius; ultimus Mercurialis. Orbis autem Lunæ circa centrum terræ vertitur, et cum ea ceu epicyclus defertur. Eodem quoque ordine alius alium revolutionis velocitate superat; secundum quod maiora minorave circulorum spatia emetuntur. Sic quidem Saturnus anno trigesimo, Iuppiter duodecimo, Mars [tertio], tellus annua revolutione restituitur. Venus nono mense, Mercurius tertio revolutionem peragit.

12. Pythagoricis || Pythagoricis. — 14. Physiologi || Physiologi. — 19. complectuntur || complectunt. — 21. sequitur Iuppiter, hunc Martius || sequitur Martius. — 23. epicyclus || Epicyclus und so immer. — 26—27. Mars tertio, tellus || Mars tellus. —

1. Septima petitio. Ebenda. — 12. cum Pythagoricis. In seinen Vorläufern des Copernicus hat Schiaparelli nachgewiesen, dass Copernicus sein System nicht, wie vielfach geglaubt wurde, für das pythagorische hielt. Auch hier ist nur von der Beweglichkeit der Erde die Rede, keineswegs von der Uebereinstimmung seines Systemes mit dem des Philolaos. — 18—28. De ordine orbium. Siehe de rev. Lib. I, Cap. X, speciell Seite 28, Z. 30 — Seite 30, Z. 32.

De motibus, qui circa Solem appareant.

Bl. 11. 5a
(36)

Terra triplici motu circumfertur, uno quidem in | orbe magno, quo Solem ambiens secundum signorum successionem anno revoluitur, in temporibus æqualibus semper æquales arcus describens, cuius quidem centrum a centro Solis 25^a parte semidiametri sui distat. Cum igitur supponatur semidiametrum huius orbis ad altitudinem firmamenti imperceptibilem habere quantitatem, consequens est, ut hoc motu Sol circumferri videatur, perinde ac si terra in centro mundi subiacceat, cum tamen id non Solis sed terræ potius motione contingit, ut exempli causa, dum hæc sit sub Capricorno, Sol e directo per diametrum in Cancro cernatur, et sic deinceps. Videbitur etiam Sol eo motu inæqualiter moveri secundum distantiam eius a centro orbis, ut iam dictum est. Ex quo maxima diversitas duobus gradibus et sextante unius contingit. Declinat autem ab ipso centro Sol ad punctum. 15 firmamenti, quod distat a stella lucida, quæ est in capite Gemelli splendidior, gradibus fere X versus occidentem, invariabiliter. Tunc igitur Sol in summa eius altitudine cernitur, quando terra in loco huic opposito versatur, centro orbis inter eos mediante, et per hunc quidem orbem non terra solum, sed quicquid simul cum orbe lunari 20 comprehensum est, circumducitur.

| Alius telluris motus est quotidianæ revolutionis et hic sibi maxime proprius in polis suis secundum ordinem signorum, hoc est ad orientem, labilis per quem totus mundus præcipiti voragine circumagi videtur. Sic quidem terra cum circumfluis aqua et vicino aëre 25 volvitur.

Bl. 11. 5a
(36)

Tertius est motus declinationis. Axis enim quotidianæ revolutionis non æquidistat axi magni orbis, sed obliquatur secundum circumferentiæ partem, nostro quidem circulo XXIII gradibus et medio fere.

3. Solem || Sol. — 4. temporibus || tribus. — 17. loco || toto. — 23. mundus || motus. — circumagi || circumuagi. — 24. circumfluis dürfte des folgenden vicino halber wohl in circumflua zu ändern sein. —

1—20. De motibus, qui circa Solem appareant. Für die hier als erste Bewegung aufgestellte Revolution um die Sonne sehe man im Cap. XI. der Revolutionen: De triplici motu telluris demonstratio die als secundus motus aufgeführte Bewegung (S. 31. Z. 10 u. ff.) Interessant ist es, dass Copernicus hier genau dasselbe Beispiel des Steinbocks und Krebses als Orte der Erde resp. der Sonne aufführt wie in der Revolutionibus. — 21. Alius telluris motus. Für die hier als zweite Bewegung aufgeführte Rotation sehe man ebendasselbe Zeile 2—10. — 26. Tertius est motus declinationis. Die Darlegung der von Copernicus fälschlich eingeführten Bewegung siehe des weiteren in demselben Cap. XI,

Igitur centro terræ in superficie ecclipticæ semper manente, hoc est in circumferentia circuli magni orbis, poli eius circumvagantur, circulos utrobique parvos describentes in centrīs ab axe orbis magni æquidistantibus. Et hic quoque motus annuas fere complent revolutiones et cum orbe magno pene compares. At vero axis magni orbis ad firmamentum immutabilem servat compositionem ad eos, quos vocant ecclipticæ polos. Motus item declinationis cum motu orbis complexus polos quotidianæ revolutionis ad eadem cæli momenta semper retineret, si paribus omnino revolutionibus cum illo constaret. Nunc longo temporis tractu deprehensum est talem telluris positionem ad faciem firmamenti mutari, propter quod ipsum | firmamentum ali- quibus motibus ferri plerisque visum est, lege nondum satis deprehensa. Posse autem hæc omnia fieri mutabilitate telluris minus mirum est. Quibus autem poli inhæreant, ad me non attinet dicere. Video equidem in vilioribus rebus, quod virgula ferrea magneto at- trita in unum semper mundi situm nitatur. Potior tamen sententia visa est, secundum orbem aliquem fieri, ad cuius motum ipsi poli moveantur, quem procul dubio sub Luna esse oportebit.

Quod æqualitas motuum non ad æquinoclia,
sed stellas fixas referatur.

20

Cum igitur æquinocetialia puncta ceterique mundi cardines plurimum commutentur, falli eum necesse est, quicumque ab his æqualitatem annuæ revolutionis deducere conatur, quæ etiam sub diversis

1. semper manente || supmanente. — 10. tractu || tractū. — 12. lege nondum || lege nedum. — 15. magneto || magnetē. —

von Seite 31, Zeile 22 bis zum Schluss des Cap. — 15—16. Video equidem ... situm nitatur. Es ist diese Stelle bestimmt eine Anspielung auf die Epistola de Magnete des Petrus Peregrinus de Maricourt. Copernicus hatte dieselbe, wenn nicht früher, jedenfalls durch Rheticus kennen gelernt, wie wir aus der unter Copernicus Augen von Rheticus geschriebenen Chorographie entnehmen können, in welcher dieser Brief erwähnt wird. (M. s. Hipler, Die Chorographie des Joachim Rheticus, Zeitschrift

für Mathematik und Physik Jahrg. XXI. Lit. hist. Abth. S. 149). Es könnte aus dieser Erwähnung sogar eine wahrscheinliche Zeitbestimmung für die Entstehung des Commentariolus gezogen werden. In Verbindung mit dem Briefe Gemma's, den ich in der Einleitung erwähnte, würde dieselbe sich wohl auf die letzten 30er Jahre festsetzen lassen. — Weitere Ausführung dieses Capitels ist das ganze 2te u. 3te Buch der Revolutionen. — 20 u. ff. Die hier niedergelegten Daten finden sich im 3. Buche der Revolutionen. —

ætatibus multis experimentis observationum diversa reperta est. Hanc Hipparchus 365 diebus cum quadrante unius diei, Albategni vero Chaldæus reperit talem annum ex 365 diebus, 5 horis, 46 minutis, hoc [est] 13 minutis et 3 quintis sive triente unius minuti Ptolomaico 5 brevior. Rursus autem Hispalensis huic longiorem vigesima parte unius horæ, siquidem ex 365 diebus, 5 horis et 49 minutis annum vertentem constituit.

| Ne autem diversitatem ex observationum errore processisse videatur, si quis singula accuratius animadvertet, inveniet eam cum mutabilitate æquinotialium punctorum semper correspondisse. Dum enim ipsi mundi cardines in centenis annis uno gradu mutabant, quemadmodum Ptolomæi ævo repertum est, erat tunc anni quantitas, quæ ab ipso Ptolomæo tradita est. Quando autem subsequentibus sæculis potiori mutabilitate moverentur motibus inferioribus obviantes, tanto 15 brevior annus factus est, quanto translatio cardinum esset maior. Nam occursu velociori breviori tempore annum excipiebant motum. Rectius igitur agit, quicumque annum æqualitatem ad stellas fixas referet. Quemadmodum circa Virginis Spicam fecimus invenimusque annum 365 dierum et sex horarum et sextantis fere unius horæ 20 semper fuisse, qualis etiam in Ægyptiaca antiquitate reperitur. Eadem ratio in aliis etiam motibus syderum habenda est, quod absides eorum et statæ sub firmamento motuum leges docent, ac cælum ipsum veraci testimonio.

De Luna.

25 Luna vero præter annalem, ut dictum est, circuitum quatuor motibus nobis videtur pervagari. Nam in orbe suo deferente circa telluris centrum secundum ordinem signorum menstruas complet revolutio | nes
30
.

2. Hipparchus || Hypparchus. — 3. 46 minutis || 16 minutis. — 4. hoc est || hoc. — Ptolomaico || ab Ptolomaico. — 22. Ægyptiaca || Egiptiaca. — 25. præter || prefer. — 28—31. Hier fehlt in der Handschrift ein Blatt, das 60. nach der alten Numerierung. —

5. Hispalensis. Es ist gemeint Isidorus Hispalensis, von dem in dem grossen Werke nirgends Erwähnung getan wird. — 19. annum 365 dierum et sex horarum et sextantis fore. In Cap. XIII des III. Buches giebt Copernicus die von ihm gefundene Länge des siderischen Jahres an als 365 Tage 6 Stund. 8 Min. 40 Sec. Ein sextans horæ würde 10 Min. ergeben. — 24 u. ff. Der Abschnitt De Luna ist leider durch die Lücke sehr verstümmelt. Er hatte seine Parallelstelle in de revol. Lib. III. Der Teil auf der folgenden Seite entspricht dem Cap. VIII des Buches III.

Ht. 61a | axes quidem epicyclorum æquidistant axi orbis, propter quod nullum
(38a) ab eo^regressionem facit.

Sed hic orbis axem suum declinem habet axi magni orbis sive ecclipticæ, quapropter Lunam a superficie ecclipticæ digredi facit. Declinat igitur secundum quantitatem anguli, cui de circumferentia 5 circuli quinque gradus superadduntur, cuius poli circumferantur in æquidistantia axis ecclipticæ, propemodum sicut in declinatione dictum est. Sed hic contra signorum ordinem et longe tardiori motu, ut ad unam revolutionem decimum nonum annum expectet, et hoc in orbe quidem eminentiori fieri plerisque videtur, cui poli inhærentes ad hunc 10 modum ferantur. Tandem igitur videtur haberi Lunæ motuum fabrica.

De tribus superioribus, Saturno, Iove et Marte.

Saturnus, Iuppiter et Mars similem habent motuum rationem, si-
quidem orbes eorum annalem illum magnum penitus includentes in 15
centro communi ipsius magni orbis ad ordinem signorum volvuntur.
Sed orbis quidem Saturnius trigesimo anno reducitur, Iovianus duo-
decimo, Martius autem vigesimo nono mense, perinde ac si tales re-
volutiones magnitudo orbium remoretur. Nam semidiametro magni
orbis ex 25 partibus constituto, semidiametros orbis Martii 30 partes 20
obtimebit, Iovis 130 et unius particulæ quincuncem, Saturni 236 et
Ht. 61b | sextantem unius. Dico autem semidiametrum a centro | orbis ad
(38b) centrum primi epicycli distantiam. Habet enim quisque duos epicy-
clos, quorum alter alterum defert, propemodum sicut in Luna dictum
est, sed lege diversa. Primus enim epicyclus contra motum orbis 25
reflexus pares facit cum eo revolutiones, alter vero obvians primi

1. axi || ac si. — 6. superadduntur || supatenduntur. — 11. Tandem igitur vide-
tur haberi Lunæ motuum fabrica || Tandē igr uidetur haberi Luna motum fabrica.
Vielleicht hatte Copernicus geschrieben Talem igitur videtur habere
Luna motuum fabricam. — 14. similem || similen. — 20. semidiametros ||
semidiametro. — 21. quincuncem || quincuntem. —

11. Tandem — fabrica. Ich habe
dieses in den Text recipiert, da es nur
durch die Aenderung Lunæ für Luna
und motuum für motum hergestellt
werden konnte. Trotzdem halte ich die
Lesung Talem igitur videtur
habere Luna motuum fabricam
für die richtigere. In der anderen
liegt eine Art Ueberhebung des Copper-
nicus, die sich sonst nirgends findet,
da er überall in grösster Bescheiden-
heit seine Untersuchungen darlegt. —
12 u. ff. Die Theorie der drei obern
Planeten muss man aus dem V. und
VI. Buche der Revolutionen heraus-
suchen. Es sind die Cap. I—XVIII
des fünften und Cap. I—III des sech-
sten Buches.

motum revolutionibus duplicatis circumagit sydus, adeo ut, quando-
cumque sit in summa a centro orbis distantia vel rursus in maxima
vicinitate, tunc sydus sit centro epicycli quam proximum, in qua-
drantibus autem mediantibus remotissimum. Igitur ex talium motuum
5 compositione orbis et epicyclorum et revolutionum paritate contingit,
ut huiusmodi elongationes et accessiones maxime statas sibi sub fir-
mamento sedes obtineant. Ac deinceps ubique certas observent mo-
tum conditiones, itaque absides suas invariabiles [habent] Saturnus
quidem circa stellam quæ super cubitum esse dicitur Sagittatoris,
10 Iuppiter gradibus VIII post stellam, quæ extremitas caudæ Leonis appel-
latur, Mars vero gradibus VI et medio ante cor Leonis.

Magnitudines autem epicyclorum hæ sunt. In Saturno quidem
primi semidiameter constat ex partibus 19 et 41 minutis, qualium
semidiameter orbis magni ex 25 supponebatur; secundus autem epi-
15 cyclus partium 6 et minorum 34 semidiametrum habet. Sic quoque
in Iove primus partium 10 et minorum 6, secundus partium 3,
minorum 22 semidiametros continent. In Marte autem primus par-
tium 5, minorum 34, secundus [partis 1,] minorum 51. Sic igitur
ubique ad primum semidiameter triplo maior est secundo. Hanc
20 autem diversitatem, quam epicyclorum motus inducit super motum
orbis, primam appellare placuit, quæ ubique sub firmamento certos,
ut dictum est, observant limites. Alia siquidem est diversitas, se-
cundum quam sydus interdum regredi, sepe etiam subsistere cerni-

Bibl.
(126)

3—4. quadrantibus || quadrantis. — 8. invariabiles habent || invariabiles. —
13. primi || primum. — 18. secundus partis 1, || secundus. — 20. motus || motu. —

12 u. ff. Die hier gegebenen Werte
der Durchmesser der Epicyclen stim-
men völlig mit denen überein, welche ich
in den Reliquiæ Copernicanæ
(S. 465 des XIX. Jahrg. der Zeitschr.
für Math. u. Physik, S. 30 der Sepa-
ratausg.) gegeben habe. Dort steht
aus den Bemerkungen zu den Tabule
Alfonsi regis entnommen: „Pro-
portio orbium cælestium ad
„eccentrotetem 25 partium.
„Martis semidiameter orbis 38
„fere, epicyclus a. 5. M. 34½,
„epicyclus b. M. 51. Iovis se-
midiameter 30. M. 25, epi-
cyclus a. 10½, b. 3½; Saturni

„diametrus 230½, epicyclus a.
„19½, b. 6½.“ Diese Werte stimmen
sogar so genau, dass der Rechenfehler
beim zweiten Epicyclus des Mars im
Commentariolus genau ebenso auf-
tritt, wie in den Reliquiæ. Der
zweite Epicyclus soll, wie weiter unten
gesagt wird, jedesmal den 5ten Teil
des ersten betragen, es muss also
heissen: partis 1, minorum 51.
Dies geht auch aus der kurz vorher-
gehenden Stelle der Reliquiæ her-
vor, wo dieselben Durchmesser mit
anderem Masse gemessen bezüglich zu
1482 und 494 angegeben sind, wo also
in der Tat der zweite Wert der
dritte Teil des ersten ist.

tur, quæ non ex motu syderis contingit, sed telluris in orbe magno aspectum variantis. Hæc enim motum syderis velocitate superans radio visuali ad firmamenti aspectum obviante motum syderis vincit. Quod tunc maxime fit, quando proxima fuerit syderis terra, dum videlicet inter Solem et sydus mediat vespertini syderis ortu. E contrario autem circa vespertinum occasum ortumve matutinum præventionem antefert visum. Vbi vero visus contra motum æquali cursu obviat stare videntur adversis motibus invicem sic se perimentibus, quod plerumque circa triquetrum Solis radium contingit. In his autem omnibus tanto maior contingit talis diversitas, quanto inferiori orbe sydus movetur, unde minor in Saturno quam Iove, et rursus in Marte maxima, secundum proportionem semidiametri magni orbis ad illorum semidiametros. Fit autem tunc uniuscuiusque maxima, quando sydus per radium aspicitur circumferentiam magni orbis contingentem Equidem tria hæc sydera nobis pererrant. In latitudine vero duplicem digressionem faciunt; circumferentiis quidem epicyclorum in una superficie permanentibus cum orbe suo ab ecliptica declinant secundum axium deflexiones non sicut in Luna circumducibilem, sed in eundem cæli tractum semper vergentem. Igitur et sectiones circulorum orbis et eclipticæ, quos nodos vocant, æternas in firmamento sedes occupant. Sic quidem Saturnus nodum suum habet, unde ad septemtriones scandere incipit, partibus 8 et media post stellam quæ in capite Geminorum orientalis dicitur; Iuppiter ante eam ipsam stellam partibus quatuor; Mars autem Vergilias antecedentem partibus 6 et medio. In his igitur ac o diametro positus sydus existens nullam habet latitudinem. Maximam vero, quæ in his in quadraturis contingit, valde diversam. Nam axium circulorumque inclinatio, tamquam nodis illis pensilis, instare videtur, tunc equidem maxima fit, quando tellus syderi proxima est, hoc est in ortu syderis vespertino. Tunc enim in Saturno partibus duabus et besse axis inclinatur; in Iove partibus duabus dempto triente; in Marte vero parte una et sextante. E contrario autem circa vespertinum occasum ortumque matutinum, plurimum tunc absistente terra Saturno quidem et Iovi quincunce unius partis minor est huiusmodi inclinatio; Marti vero parte una et besse. Sic quidem diversitas hæc in maximis latitudinibus apprime percipitur, ac alicui tanto minor, quanto minus a nodo sydus dista-

H. 62b
(39b)H. 63a
(40a)

11. rursus || versus. — 18. circumducibilem || circumducibile. — 26. Maximam || Maximum. — 27. diversam || diversum. — inclinatio || inclinatio. — 33. quincunce || quincunte.

36. ac alicui. Man würde cuicunque niss des Schreibers aus Folge der Un-
erwarten. Diese Aenderung schien hier, wissenheit handeln kann, etwas hart,
wo es sich nicht um ein Missverständ- es ist also das wunderliche alicui

pariter cum latitudine crescens et deficiens. Accidit et motu telluris in orbe magno latitudines visibus nostris variari, ita sane propinquitate vel distantia visibilis latitudinis angulos augente vel minnente, sicut mathematica ratio exposcit, siquidem hic motus librationis secundum lineam rectam contingit. Fieri autem potest, ut ex duobus orbibus huiusmodi motus componatur, qui cum sint concentrici alter alterius deflexos circumducit polos et inferior contra superiorem duplici velocitate polos orbis epicyclos deferentis revolvat, et hi quoque poli tantam habeant deflexionem a polis orbis immediate superioris, quantum huius a polis supremi orbis. Et hæc de Saturno, Iove et Marte ac orbibus terram ambientibus.

De Venere.

Reliquum est eorum speculationem aperire, quæ magni orbis ambitu includuntur, hoc est de motibus Veneris et Mercurii. Venus quidem persimilem habet circulorum compaginem quales illi superiores, sed alia modo tuum observantia. Orbis quidem cum epicyclo suo majori pares facit revolutiones nono mense, ut prædictum est, eoque motu composito minorem epicyclum certa ubique habitudine firmamento restituit summam eius absidem ad punctum, quo Solem vergere diximus, constituens. Minor autem epicyclus impares cum illis revolutiones habens, motui orbis magni imparitatem reservavit. Ad huius quidem revolutionem duos omnino circuitus perficit, ut, quandocumque tellus in linea ad absidem diametro porrecta fuerit, sydus tunc centro maioris epicycli proximum sit, et in transverso quadrantum remotissimum simili fere modo, quemadmodum in Luna minor epicyclus Solem respicit observans. Est autem proportio semidiametrorum orbis magni et Veneris sicut 25 ad 18, et maior epicyclus dodrantem suscipit

4. librationis || liberationis. — 11. immediate || mediale. — 26 — 1 a. f. S. Zu diesen Zeilen ist auf dem äußern Rande des Msc. von anderer Hand hinzugefügt: Maior epicyclus l. 48, minor 0. 36, qualium semidiametrus l. 60. —

stehen geblieben. Vielleicht steckt ein Germanismus dahinter. — 5. Fieri autem potest. Siehe die Darstellung der revolutionibus Lib. III, Cap. IIII (Seite 165 — 167 der Sæcularausgabe). — 12 u. ff. Den Abschnitt De Venere vergleiche man mit De revol. Lib. V, Cap. I—III.

XX—XXIII und Lib. VI, Cap. I, II, V—VIII. — 26—1 a. f. S. Est autem proportio ... quadrantem stimmt genau mit der Angabe Reliquis Copernicanæ a. a. O., wo es heisst: „Veneris semidiametrus 18, epicyclus a. $\frac{2}{3}$, b. $\frac{1}{2}$ “

unius particulæ, minor vero quadrantem. Retrocedere quandoque et hæc cernitur, tunc maxime, quando sydus terræ proximum est, simili quodammodo ratione ut in superioribus, sed conversa. In illis enim accidit motu terræ superante, hic autem superato, ac illic orbe telluris contento, hic vero continente. Quapropter nec unquam Soli opponitur, cum tellus intermediari non possit, sed ex certis ab Sole distantiis, quæ sunt in contactibus circumferentiæ lineis a | centro telluris prodeuntibus, utrobique revertitur 48 gradibus numquam excedens ad nostrum aspectum. Et hæc est Venerei motus summa, qua in longitudinem circumducitur. Latitudinem quoque duplici causa scandit. Habet enim et hæc axem orbis inclinatum quantitate anguli graduum duorum .s., et nodum suum, unde septemtriones petit, in abside sua habet. Digressio autem, quæ ex tali inclinatione procedit, quamquam eadem in se ipsa sit, duplex non ostenditur. Nam in alterutro nodorum Veneris incidente terra transversis sursum et deorsum aspiuntur, has reflexiones vocant; naturales apparent orbis obliquitates, et has vocant declinationes, eædem vero in quadrantibus. Ceteris autem locis ambæ latitudines permixtæ confunduntur, ac alia aliam superans vincit ac similitudine et dissimilitudine mutuo se augent et perimunt. Hæc vero axis inclinatio est; habet librationem mobilem, non autem sicut in superioribus illis ad nodos pendentem, sed in aliis quibusdam volubilibus punctis, quæ revolutiones suas ad sydus annuas faciunt, unde, quandocumque tellus contra absidem Veneris steterit, maxima tunc fit librationis inflexio et hæc in ipso sydere, in quacumque tunc parte sui orbis fuerit. Quapropter, si tunc sydus in abside sit vel ei e diametro opposito, latitudine non penitus carebit, tametsi in nodis tunc versetur. | Hinc vero decrescente hac inflexione quoadusque tellus per quadrantem circuli dicto loco amoveatur et similitudine motuum maxime illius deviationis punctus a sydere tantumdem destiterit, nullum prorsus huiusce deviationis vestigium usque reperitur. Et deinceps deviationum libramento continuato, et illo principio a septemtrionibus ad austrum declinante ac identidem a sydere sese clongante secundum telluris ab abside re-

20. librationem || librationem. — 23. librationis || liberationis. — 26. e diametro || diameter.

Die Randbemerkung des Wiener Msc. „Maior epicyclus l. 48, minor „0. 36, qualium semidiametrus „1. 60“ ist in Bezug auf die letzte Angabe falsch; es muss heißen „qualium semidiametrus 60“ zu semidiametrus hinzugedacht magni

orbis, denn wir haben die richtigen Proportionen:

$$60:25 = 1\frac{1}{2}:\frac{5}{4} = \frac{3}{2}:\frac{5}{4}.$$

10 u ff. Latitudinem quoque duplici causa scandit. Siehe hierzu speciell die Darstellung de revol. Lib. VI, Cap. V—VI (S. 424—429 der Sâcularausgabe).

motionem sydus ad eam perducitur partem, quæ prius australis fuerat. Nunc autem oppositionis lego septemtrionalis facta, donec iterum ad summam perveniat librationis circulo peracto, ubi rursum maxima fit deviatio et primæ simul et æqualis. Sic demum pari modo per
 5 reliquum semicirculum pergit. Quapropter numquam fit meridiana hæc latitudo, quam plerumque deviationem vocant, et hæc duobus orbibus fieri concentricis et axibus obliquis, sicut in superioribus dicebamus, hic quoque consentaneum esse videtur.

De Mercurio.

- 10 Sed omnium in cælo mirabilissimus est Mercurii cursus, qui pene investigabiles permeat vias, uti perscrutari non facile queat. Addit præterea difficultatem quod sub radiis solis invisibiles plerumque
 15 meatus occupat et paucis admodum diebus visibilem se exhibet, at | ta-
 men comprehendetur et ipse, modo altiori ingenio quispiam incumbat.
- 20 Convenient et huic epicycli duo, ut in Venere, in orbe suo revolubiles. Nam maior epicyclus pariter cum orbe suo facit revolutiones, u' illic, absidis eius sedem gradibus 14 et medio post Virginis Spicam constituens. Minor autem epicyclus contraria illius lege duplici vero
 25 revolutione reflectitur, ut in omni situ telluris, quo absidem huius
 20 supervenit vel ex adverso respicit, sydus a centro maioris epicycli remotissimum sit atque in quadrantibus proximum. Et huius quidem orbem tertio mense diximus reverti, hoc est 88 diebus, cuius semidimetiens partes capit 9 et duas quintas unius partis, quarum semidiametrum magni orbis 25 posuimus. Ex his autem primus epicyclus
 25 accipit unam et 41 minuta; secundus autem tertiam eius partem, hoc est minutias 34 fero. Sed is quidem circulorum concursus hic non sufficit ut in ceteris. Terra siquidem in supradictis absidis respectibus permeante longe minori apparet ambitu sydus moveri, quam ratio circulorum iam dicta sustinet; ac rursus in quadraturis longe etiam

[Bibl. 6a
(43a)]

15. huic || hinc. —

9. bis zu Ende des Ganzen. Ueber den Abschnitt De Mercurio siehe De rev. Lib. V, Cap. I—III, Lib. VI, Cap. I, II, V—VIII. — 21—26. Et huius quidem orbem — 34 fere. Auch diese Angaben stimmen genau mit den Reliquiæ Copernicanæ a. a. O. Dort heisst es: „Mercurii orbis 9.24, Epicyclus „a. 1. 41½, b. 0. 33½; colligunt

„1.7½ (diversitas diametri 0.29)“ 26 — S. 131., Z. 19. Sed is quidem circulorum — sic se habet. Specielle Darlegung dieser Erklärungsweise sehe man De Revol. Lib. V, Cap. XXVIII und Cap. XXXII, in denen diese Bewegung von zwei verschiedenen Gesichtspunkten aus dargelegt wird. —

maiore. Cum vero nullam aliam in longitudine diversitatem ex hoc
 fieri percipias, consentaneum est per accessum quendam et recessum
 centri orbis secundum lineam rectam | contingere, quod quidem fieri
 oportet duobus orbiculis circumdatis habentibus axes æquidistantes
 axi orbis, dum centrum epicycli maioris sive totius illius axe tantum 5
 distet a centro orbiculi immediate continentis, quantum centrum huius
 a centro extremi. Id quidem repertum est minutibus 24 et medio
 unius partis de 25, quibus omnium contextum mensi sumus, quodque
 motus extremi orbiculi binas in anno vertente revolutiones faciat,
 interior autem motu reflexo duplo recursu quater interim revertatur. 10
 Preferuntur enim hoc motu composito centra maioris epicycli secun-
 dum lineam rectam, quemadmodum circa latitudines libratas diximus.
 Sic igitur in memoratis ad absidem telluris sitibus centrum epicycli
 maioris centro orbis proximus est, in quadraturis autem remotissimus.
 In locis autem mediantibus, id est 45 gradus ab his, centrum maioris 15
 epicycli centro exterioris orbiculi applicat amboque in unum concur-
 runt. Quantitas autem huiusce recessus et accessus constat minutis
 29 unius prædictarum partium, et hactenus motus Mercurii longitudi-
 nalis sic se habet. Latitudinem vero haud secus facit quam Venus,
 sed tractu semper contrario. Ubi | enim illa septemtrionalis fit, hic 20
 austros petit. Declinat autem orbis eius ab ecliptica quantitate au-
 guli partium septem. Deviatio autem hic quoque semper australis
 dodrantem unius gradus numquam excedit. Cæterum quæ circa lati-
 tudines Veneris dicta sunt, hic quoque commemorasse conveniet, ne
 eadem sepe repetantur. 25

Sicque septem omnino circulis Mercurius currit, Venus quinque,
 tellus tribus et circa eam Luna quatuor, Mars demum, Iuppiter et
 Saturnus singuli quinque. Sic igitur in universum 34 circuli sufficiunt,
 quibus tota mundi fabrica totaque syderum chorea explicata sit.

2. percipias || percipiant. — 4. circumdatis || circumdata. — 5. axe || asse.
 9. motus || motur. — 11. centra || centro. — 27. eam || eum.

19—25. Latitudinem vero ... tudo Veneris angegebenen Cap. von
 repetatur. Siehe die bei der Lati- Lib. VI.

II. Der Brief des Copernicus an den Domherrn Wapowski¹⁾ zu Krakau über das Buch des Iohannes Werner²⁾ de motu octavæ sphæræ³⁾.

Der fragliche Brief ist zum ersten male in der Warschaner Prachtausgabe der Werke des Copernicus veröffentlicht worden⁴⁾.

1) Bernhard Wapowski stammte aus der Diöcese Leslau und starb am 21. November 1535. Er ist besonders als Geschichtsforscher und Geograph bekannt. Man vergleiche über denselben Hipler, *Spicilegium Copernicanum*, Braunsberg 1872, S. 172, Anm. 1, und desselben Nikolaus Kopernikus und Martin Luther, daselbst 1868, S. 35, 36.

2) Iohannes Werner, geb. 14. Februar 1468 zu Nürnberg, studierte von 1493 bis 1498 zu Rom, lebte dann als Geistlicher in seiner Vaterstadt, wo er 1528 starb. Sein Hauptverdienst besteht in der Herausgabe vieler Regiomontana. Er war ein tüchtiger Geometer und guter Himmelsbeobachter, wie Tycho von ihm rühmt. Genauer über sein Leben und seine Werke sehe man in Doppelmayr, *Historische Nachrichten von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern*, Nürnberg 1730. S. 31—35.

3) Die Schrift *de motu octavæ sphæræ* findet sich in einem Bande der schon zu Tycho's Zeiten zu den Seltenheiten zählte. Dieselbe ist betitelt: „*In hoc opere hæc continentur. || LIBELLVS IOANNIS VERNERI || NVREBERGEN. SVPER VI= || GINTIDVOBVS ELEMEN= || TIS CONICIS. || EIVSDEM. Commentarius seu paraprastica enar= || ratio in vndecim modos conficiendi eius Problema= || tis quod Cubi duplicatio dicitur. || EIVSDEM. Comentatio in Dionysodori proble= || ma quo data sphæra plano sub data secatur ratione, || ALIVS modus idem problema conficiendi ab eodẽ || Ioanne Verno nouissimo copertus demonstratusq;. || EIVSDEM Ioannis de motu octavæ Sphæræ, || Tractatus duo || EIVSDEM. Summaria enarratio Theoricæ mo= || tus octavæ Sphæræ. || ¶ Cum Gratia & Privilegio Imperiali.*“ Sie besteht aus 100 Blatt in 4°, deren letztes leer ist. Auf Blatt 99^b steht der Druckvermerk: „*IMPRESSVM NVREMBERGAE || per Fridericum Peypus, Impensis Lucæ || Alantsee Ciuis & Bibliopolæ Vi= || ennen. Anno M. D. XXII. || Hromanis imperante iniquitissimo Carolo Hispaniarũ rege. || Cum Gratia & Privilegio Imperiali.*“ Die Schrift *de motu octavæ sphæræ* umfasst Blatt 45^a bis Blatt 96^b. Der erste Tractat ist überschrieben (Blatt 45^a, Z. 13—17): „*IOANNIS VERNERI NVREMBERGEN. || De motu octavæ sphæræ tractatus primus, qui triginta || quattuor cum theorematibus tũ problematibus || quæ propositiones libuit appellare con= || summat.*“ Der zweite Tractat beginnt Blatt 88, Z. 6—9 mit der Überschrift: „*IOANNIS VERNERI NVREMBERGEN= || sis de Motu Octavæ sphæræ Tractatus secundus in || quo Alfonsinæ tabulæ de eodem motu ostent= || dunt iustis repræhensionibus non carere.*“ Der Titel ist von einer Holzschnittbordüre eingefasst.

4) Nicolai Copernici Torunensis *De Revolutionibus Orbium Coelestium Libri Sex. Accedit G. Joachimi Rhetici Narratio Prima Cum Copernici Non-*

Der dortige Abdruck ist nach der Handschrift „Ms. lat. Fol. 83“ der Königl. Bibliothek zu Berlin gemacht, wimmelt aber von Lese- und Druckfehlern. Da erst im Jahre 1873 durch das Leben des Copernicus von Polkowski⁵⁾ bekannt wurde, wo das Msc. des Briefes zu finden sei, weil die citierte Ausgabe jede Angabe ihrer Quellen geflissentlich verschwiegen hat, so waren bis dahin selbst polnische Gelehrte über den Aufbewahrungsort im Unklaren, und die beiden neueren Herausgeber des Briefes, Prowe und Hipler, waren daher genötigt, den unverständlichen Text der warschauer Ausgabe abdrucken zu lassen. Durch die Güte des Herrn Geheimenrath Lepsius war ich in der Lage das berliner Manuscript selbst einsehen und collationieren zu können, und sah mit immer wachsendem Erstaunen, was man als Text dieser Handschrift bis jetzt geboten hat. Eine zweite Handschrift soll mit der strassburger Bibliothek verbrannt sein⁶⁾, eine dritte besitzt, wie ich schon oben bemerkte, die K. K. Hofbibliothek zu Wien. Von ihr habe ich ebenfalls genaue Collation genommen. Die beiden Lesarten des berliner und wiener Msc., die keineswegs durchweg in Uebereinstimmung sind, lassen mit annähernder Gewissheit die Form wiederherstellen, in der Copernicus den Brief geschrieben hat. In dieser Form lasse ich denselben weiter unten abdrucken, zum ersten male in einer Gestalt, welche nicht offenbaren Unsinn bietet.

Die Handschrift der Königl. Bibliothek zu Berlin „Msc. lat. fol. 83“ besteht aus 24 Blatt, von denen Blatt 1–10, 12–23 bezüglich mit den Zahlen 1–10, 11–22 mit Tinte numeriert sind. Blatt 11 ist leer und deshalb nicht mitgezählt. Diese 24 Bltt. von sehr verschiedener Grösse sind mit einem Vor- und einem Nachblatte in Pappe gebunden mit schwarz-marmoriertem Papierüberzuge und

nullis Scriptis Minoribus Nunc Primum Collectis, Eiusque Vita. Varsoviae, Typis Stanislai Strabski Anno MDCCCLIV. S. 575–582. Diese Ausgabe ist in der *Varia lectio* durch *V* bezeichnet worden.

5) *Zywot Mikołaja Kopernika*. Przez Ks. Ignacego Polkowskiego. Gniezno MDCCCLXXIII. S. 214, Anm. 1. Nach ihm hat ein Schreiber, welcher gewöhnlich die Abschriften für die *Monumenta Germaniae* besorgte, die Abschrift für die Ausgabe geliefert; sie ist dann von Professor Hirsch mit dem Originale verglichen worden. Jedenfalls haben sich beide durch dieselbe kein glänzendes Zeugnis erteilt. Wer für *e contrario* lesen kann *est contraria*, wer „qn“ mit *quoniam* statt *quando*, *qm* mit *quem* oder *quam* statt durch *quemadmodum*, wer *qn* durch *quoniam* für *quin*, ebenso *q* durch *quoniam* auflösen kann, wer *n.* durch *non* übersetzt, kann kaum mit der nötigen Akribie zu Werke gegangen sein.

6) Briefliche Mitteilung des Herrn Prof. Hipler zu Braunsberg.

weisser Innenseite. Auf einem auf dem obern Teile des Rückens aufgeklebten Etiquette liest man die Worte: „*Astronomica varia.*“ Auf dem obern Rande von Blatt 1^a steht die Bibliotheksbezeichnung „ms. lat. Fol. 83.“ Blatt 8^a—10^a enthalten den Brief des Copernicus; das 11. leere und unbezeichnete Blatt bildet das vierte Blatt zweier zu der Abschrift verwendeten Bogen. Auf dem rechten Rande der ersten Seite des Briefes stehen von späterer Hand (XVII. Jahrh.) die Worte: „*Hæc epistola adnexa erat ad opus Copernici de Revolutionibus orbium cœlestium*“; nun befindet sich der Brief zusammengebunden mit Schriftstücken und Drucksachen, welche von dem Astronomen J. G. Rabener zu Cleve herrühren und zum Teil in holländischer Sprache verfasst sind, er dürfte also wohl ebenfalls aus jener Gegend stammen⁷⁾. Die Handschrift ist in manchen Eigenheiten der Schrift des Rheticus ähnlich. Jedenfalls stammt sie aus dem XVI. Jahrhundert und ist älter als die des wiener Manuscripts⁸⁾. Von der Hand des Schreibers sind in den Text selbst

7) Die andern in der Handschrift gesammelten Stücke sind: 1. Blatt 1^a—7 „*De Cometâ illa singulari & raro qui apparuit Anno 1680 sub finem Novembris ad Orientem, & postquam disparuerat Aurora tectus ad occidentem conspicuus factus fuit, dum sub medium Februarij 1681 dispareret.*“ Von der Hand J. G. Rabenera. — 2. Blatt 12^a „*Observatio Cometæ Anno æræ Christ. 1661. die 3 Febr. St. n. horâ matut. 6 Gedani habita à Johanne Hevelio.*“ Zeichnung von Hevelius Hand; die Schrift stimmt mit der eigenhändigen Widmungsschrift eines Bandes der thorner Bibliothek völlig überein. — 3. Blatt 13^a u. b „*Observationis cuiusdam Phœnomeni Typus factæ Cliviz, sub elevat. poli 51° 54'. Calend. Febr. St. V. inter quartam et matutinam quintam à Rabenero.*“ (1661). Rabeners Hand. — 4. u. 5. 2 Blatt Kupferstiche, Beobachtungen der Mondfinsterniss vom 16. Juni 1666 und der Sonnenfinsterniss vom 2. Juli 1666 zu Dantzig von Hevelius gemacht. — 6. Blatt 16^a „*Observationes Cometæ habitæ in Observatorio Regio Parisiensi (1681).*“ Am obern Rande steht: „*Mittente Hevelio ad Rabenerum.*“ Hevelius Hand. — 7. Blatt 17^b—18^a „*Orbita Cometæ qui illuxit XVI Augusti St. v. Anno 1682.*“ Auf Blatt 17^a dazu eine Erläuterung, betitelt: „*Som gebrouch Dieſer taffel.*“ — 8. Blatt 19^b—20^a „*Cometes Cuius Typus heic datur contemplandus Apparuit AÛ CIO.IQO.LXI Mense Ian. Observatio sic facta Cliviz sub elevat. poli 51° 56' Calendis Febr. 4^{ta} mat. à JGEabenero.*“ Zu vergleichen mit n^o. 3, welches denselben Cometen behandelt. — 9. Blatt 21^b—22^a. Der nördliche gestirnte Himmel. — 10. Blatt 23^b—24^a. Sternkarte von 40° nördlicher bis 40° südlicher Breite in holländischer Sprache. Keines der obigen hevelius'schen Stücke ist in der trefflichen Monographie von Béziat (*Bullettino Boncompagni* 1875 October-December) erwähnt.

8) Aus einer Randbemerkung, welche gleichzeitig mit der Abschrift ist,

übernommene in Parenthesen eingeschlossene Glossen vorhanden, an zwei Stellen auch grössere Randbemerkungen, welche diese ihre Eigenschaft als Einschießel des Schreibers durch bedeutend kleinere Schrift als die des Textes ist, documentieren; sie sind sämtlich in der wiener Handschrift nicht enthalten. Ausserdem ist die Handschrift von einem kundigen Manne revidiert, von welchem auch einige Randglossen hinzugefügt sind. Der Brief hat in der Handschrift die Ueberschrift: „Epistola Copernici contra Wernerum“ und trägt die Zurschrift: „Reverendo Domino Bernhardo Vapuský (!) Cantori et Canonico ¶ Ecclesiæ Cracoviensis et S. R. Maiestatis poloniæ ¶ Secretario, Nicolaus Copernicus.“ Datirt ist derselbe: „Ex Varmia, 3. Iunii 1524 ¶ Nicolaus Copernicus.“ In der vario lectio ist diese Handschrift durch *B*, die Verbesserungen zweiter Hand durch *B*₂ bezeichnet, während dann die erste Hand durch *B*₁ kenntlich gemacht ist.

Die Handschrift der K. K. Hofbibliothek zu Wien hat die Ordnungsnummer „9737⁸⁶“. Sie besteht aus 10 mit Bleistift auf den Vorderseiten von 1—10 numerierten Blättern von 200^{mm} Höhe und 160^{mm} Breite. Dieselben sind mit einem Vor- und einem Nachblatte in einen Band in Pappe gebunden mit Rücken von weissem Papier und grünmarmoriertem Papierüberzug. Blatt 1^a—9^b enthält den Brief des Copernicus an Wapowski mit der Ueberschrift: „R^{do} Dñ^o Bernardo Vapoushy (!) Cantori et Canonico ¶ Ecclesiæ Cracoviens: et S. R. Mat^{is} Polonicæ Sec^{re} ¶ cretario, Dñ^o et fautori suo plurimum observando ¶“ und ist datirt: „Ex Varmia ¶ iij Junij, anno MDXXIIII ¶ Nic^o Copphornic⁴.“ Am Fussende von Blatt 9^b findet sich folgende Bemerkung: „Ex primis post ἀντογραφον (!) ¶ lituris 30 Martij 1575“, aus welcher hervorgeht, dass die Handschrift im Jahre 1575 gefertigt ist. Die Orthographie des Copernicus ist hier sehr verändert, (was bei der berliner in diesem Maasse nicht der Fall ist), sie hat aber den Wortlaut an vielen Stellen treuer bewahrt, als die andere Handschrift dieses tut. In der varia lectio ist sie durch *W* bezeichnet.

Der Brief war zur Zeit des Copernicus und der darauf folgenden viel verbreitet, wie dies schon die Unterschrift der wiener Handschrift lehrt. Tycho Brahe erwähnt desselben in seinen *Progymnasmata* P. II, lib. 2. de Cometa anni 1577. p. 362—363. Starawolski

und Reinholdus Tabulæ Pruthenicæ und Peuceri Hypotheses Astronomicæ citirt, geht hervor, da das letztere Werk erst 1571 erschien, dass auch diese Handschrift nicht vor dem Anfang der siebziger Jahre geschrieben sein kann.

führt ihn an in seiner *Vita Copernici* (Ausgabe von 1627)⁹⁾, endlich erwähnt ihn Doppelmayr in seinen *Historischen Nachrichten von den Nürnberger Math.*¹⁰⁾ in der Lebensbeschreibung des Iohannes Werner. Dann aber ist derselbe verschollen, bis ihn die warschauer Ausgabe wieder abdruckt. Nach dieser editio princeps gaben ihn mit allen Fehlern wieder heraus Hipler im *Spicilegium Copernicanum*¹¹⁾ und Prowe in den *Monumenta Copernicana*¹²⁾. Nur in polnischer Uebersetzung liess ihn Polkowsky in seinen *Kopernikijana*¹³⁾ abdrucken. Die Lesarten der warschauer Ausgabe, also indirect auch die von Hipler und Prowe, habe ich ebenfalls unter dem Texte notiert; sie stehen unter der Chiffre V.

Die berliner Handschrift hat uns nur die Ueberschrift des Briefes aufbewahrt, die wiener giebt an deren Stelle die Adresse des Briefes wie sie auf dem Umschlage zu lesen war. Auch in dieser Hinsicht ergänzen sich beide Handschriften in glücklicher Weise.

Der nun folgende Text bildet mit den Revolutionen und dem Commentariolus zusammen das Wichtigste, was wir in astronomischer Beziehung von Copernicus besitzen.

9) „Vita incolumi solitudinem amavit, nec iungebatur amicitia nisi viris doctis, inter quos familiares habuit . . . Vapovium Cantorem Cracoviensem, ad quem scripsit Epistolam de motu octavæ sphæræ . . .“

10) Doppelmayr, a. a. O. S. 35, Anm. (II).

11) Hipler, *Spicilegium Copernicanum*, Braunsberg 1873, S. 172—179.

12) Prowe, *Monumenta Copernicana*, Berlin 1873, S. 141—149.

13) X. Ignac Polkowski, *Kopernikijana czyli Materrały do pism i życia Mikołaja Kopernika*. Tom I. Gniezno 1873, S. 69—74.

B. Bitt. 9a
F. S. 566

[Epistola Copernici contra Vernerum.

W. Bitt. 1a

| Reverendo Domino Bernhardo Vapovsky, Cantori et Canonico
Ecclesiæ Cracoviensis et S. R. Maiestatis Poloniæ Secretario
Nicolaus Copphernicus.

Cum pridem ad me mitteres, optime Bernharde, Iohannis Vneri 5
Nurembergensis editum de motu octavæ sphaeræ opusculum, quod a
multis laudari dicebas, petiit ex me Venerabilitas tua, ut ei meam
quoque sententiam de illo significarem. Quod certe tanto libentius
fecissem, quanto honestius et re vera a me quoque commendari po-
tuisset, nisi quod studium hominis et conatum laudem, et quod ad- 10
monuit Aristoteles: „Non solum iis, qui bene locuti sunt,
„gratificandum esse philosophis, sed etiam non recte
„locutis, quandoquidem non parum sepe contulit etiam
„devia notasse viam rectam sequi volentibus.“ Ceterum
ad modicum utilis est reprehensio confertque parum, quia et impu- 15
dentis ingenii est, Momum potius agere velle quam poetam. Proinde
etiam vereor, ne mihi succenseat aliquis, si alium reprehendam, quam-
diu ipse non profero meliora. Itaque volebam illa, ut sunt, dimittere
curæ aliorum, | atque sic Venerabilitati tuæ, ut libenter nostra acci-
peret, in summa responsurus fuisset. Verum cum animadvertam 20
aliud esse mordere et lacerare quemquam, aliud castigare et revo-

1. Diese Zeile fehlt in W, V setzt dafür De Octava Sphaera, contra Wernerum. — 2. Vnpovsky || Vpusky B, Vapoushy W, Wapowski V. — 3. Poloniæ || poloniæ BV. — 4. Nicolaus Copphernicus fehlt in W u. V, Copernicus B. — 5. Vneri || Wneri BV. — 6. editum || æditum W. — 7. dicebas || ducebas BV. — meam || nostram BV. — 8. significarem || significarem V. — certe || certo V. — 10. laudem || laudarem V. — 15. ad modicum || admodum B₁. — reprehensio || repræhensio B und so immer. — impudentis || prudentis W. — 19. sic Venerabilitati tuæ, ut libenter nostra B, sic Venerabilitatis tuæ ut libenter nostra V, sic Venerabilitas tua et mentem meam W. — 20. responsurus fuisset || responsum fuisse BWV. —

11. Aristoteles. Es ist mir nicht libenter nostra acciperet in möglich gewesen die Stelle zu verifi- summa responsum fuisse ist cieren, auf welche Copernicus hier an- offenbar Unsinn, während der Sinn spielt. — 19—20. atque sic... fu- der von uns aus Coniectur aufgenom- issem. Die bisherige Lesart atque menen Lesart ganz klar ist.
sic Venerabilitatis tuæ ut

care errantem, quemadmodum vicissim laudare aliud est quam adulari et agere parasitum, non invenio, cur desiderio tuo obsequi non deberem, aut quod harum rerum studio et diligētia, qua praecepta polles, derogare viderer. Ac proinde, ne etiam temere videar reprehendere hominem, conabor quam apertissime ostendere, in quibus ille de motu sphaerae stellarum fixarum erraverit, neque conveniat eius traditio, quod forsitan ad certiores eius rei capessendam rationem non parum etiam conducet.

Primum igitur fefellit ipsum supputatio temporum, quod existimaverit annum secundum Antonini Pii Augusti, quo Cl. Ptolomaeus observata a se fixa sydera in ordinem constituit, fuisse a nativitate Christi anno centesimo quinquagesimo, cum fuerit secundum veritatem annus CXXXIX. Ptolomaeus enim libro tertio Magnae Constructionis capite primo observatum autumnii aequinoctium ab Alexandri Magni morte anno CCCCLXIII ait fuisse Antonini anno III. A morte vero Alexandri ad Christi nativitatem numerantur anni pariles Aegyptii CCCCXXXIII et CXXX dies. Nam a principio regni Nabonassar ad Christi nativitatem supputant annos pariles DCCXLVII et dies CXXX, de quo non video dubitare neque autorem hunc, ut apparet propositione XXII, nisi quod additur dies unus secundum Canones Alfonsinos. Idque ideo, quod Ptolomaeus incipit a meridie primi diei primi mensis Thot apud Aegyptios annos Nabonassarios et Alexandri Magni, Alfonsus autem a meridie ultimi diei anni praecedentis, quemadmodum nos a meridie ultimi diei mensis Decembris annos Christi supputamus. A Nabonassaro autem ad excessum Alexandri Magni Ptolomaeus eo-

3. diligentia || diligentiae V. — praecepta || praeceptae W. — 4. proinde || perinde V. — 5. apertissime so liest B₂, die andern haben sämtlich aptissime. — 8. conducet || conduceret W, conducat V. — 9. ipsum || eum BV. — 10. Augusti fehlt in BV. — Ptolomaeus || Ptolemæus BV und so immer. — 17. Nabonassar || Nabonassari V. — 19. dubitare || dubitari W. — autorem || auctorem V, authorem W, und so immer. — apparet || adparet W und so immer. — 20. Alfonsinos || Alphonsinos BWV. — 22. Zwischen den Worten diei primi findet sich in B die Glosse (Calendis non pridie Cal.), welche V in den Text aufgenommen hat. — 23. Zu dem Passus, in welchem Alfonsus erwähnt wird, findet sich in B von zweiter Hand die Randnote: Alphonsinos Copernicus totis revolutionibus nunquam appellandos putavit. BWV lesen Alphonsus. — 45. anni fehlt in V. — 24. meridie fehlt in W.

5. apertissime ist offenbar sehr gute Verbesserung von B₂, statt des gewöhnlichen aptissime. — 9. Primum igitur fefellit. Die Darstellung Werners, gegen welche sich Copernicus hier wendet, findet sich in der Propositio IIII des citierten Buches.

dem libro capite octavo numerat annos CCCCXXIII pariles. Cui astipulatur Censorinus de die natali ad C. Cerilium scribens, auctoritate M. Varronis. Relinquuntur ergo ex annis DCCXLVII et CXXX diebus CCCCXXIII anni et CXXX dies, videlicet ab Alexandri morte ad Christi nativitatem, atque hinc ad Ptolomæi observationem iam dictam anni pariles CXXXIX et dies CCCIII. Ergo observatum a Ptolomæo æquinotium hoc autumnii constat fuisse a nativitate Domini annorum parilium CXL, nona die mensis Athyr; Romanorum vero annorum CXXXIX, die XXV septembris, Antonini tertio.

Rursus idem Ptolomæus libro quinto Magnæ Constructionis, capite tertio in observatione Solis | et Lunæ anno secundo Antonini supputat annos Nabonassarios DCCCLXXXV et CCIII dies. Fuissent ergo a Christi nativitate anni transacti pariles CXXXVIII et LXXIII dies. Exinde post dies XIV, nempe Pharmuti nono, quo Ptolomæus Leonis | Basi || liscum observavit, erat a nativitate Christi Romanorum annus CXXXIX, XXII dies Februarii, atque hic Antonini annus secundus, quem putat autor iste CL fuisse. Fefellit igitur ipsum supra annos XI.

Adhuc autem si quis dubitet et his non contentus cupiat etiam huius rei capere experimentum, meminisse debet tempus esse numerum sive mensuram motus cæli secundum prius et posterius. Hinc etenim anni, menses, dies et horæ nobis constant. Mensura autem et mensum vicissim se habent, relativa enim sunt. Porro Canones Ptolomæi cum essent adhuc ex recentioribus a se observatis conditi, credibile non est errorem aliquem ab his sensu perceptibilem vel discre-

1. numerat || monerat *B*₁. — pariles fehlt in *BV*. — 2. astipulatur || adstipulatur *W* und so immer. — Cerilium || Cornelium *BV*. — 6. et dies || dies *BN*. — 9. CXXXIX || CXXX (de est) *B*, CXXX, id est *V*. — 14. dies XIV || *B* hat über der Zeile als Glosse stehen fortassis 54, was *V* hinter dies in den Text gesetzt hat. — nono || nouo *W*. — 15. Leonis || Ω *BW*, sidus *V*. — 16. annus || anno *B*. — 17. Hinter secundus fügt *B* als Glosse ein (Antea de tertio egit). — 18. annos XI || XI annos *B*, II annos *V*. — 21. cæli || coeli *BV*. — 25. errorem || morem *B*₁. — aliquem fehlt in *BV*.

2. ad C. Cerilium. Der Adressat des Briefes de die natali von Censorinus heisst nach neuern Angaben Cærellus. In den bis zu des Copernicus Zeiten erschienenen Ausgaben ist stets Cerillius gedruckt, Copernicus konnte also auch nur diese Form gebrauchen, wie sie in dem

wiener Msc. sich auch wirklich findet. Die frühern Ausgaben haben *B* folgend Cornelium. — 15. Leonis Basiliscum. Aus Missverständniss des Zeichens des Löwen Ω seitens der warschauer Herausgeber lesen diese sidus Basiliscum.

pantiam aliquam eos continere, quo minus suis principiis, quibus incumbunt, non congruerent. Quæ cum ita sint, si loca Solis et Lunæ circa Basiliscum organis astrolabicus inventa a Ptolomæo anno secundo Antonini novem diebus Pharmuti | mensis quinque horis et dimidia
 5 a moridie transactis per tabulas ipsius inquirendo numeret, non inveniet ea post annos Christi CXLIX, sed post CXXXVIII annos, LXXXVIII dies et horas quinque et dimidiam, qui sunt Nabonassari DCCCLXXXV anni, dies CCXVIII et horæ quinque et dimidia. Ita iam error iste manifestus est, qui illius inquisitionem de motu octavæ
 10 sphæræ plerumquo infecit, ubi temporum facit mentionem.

Alius error non minor præcedenti est in ipsa eius hypothesi, in qua existimat CCC annis ante Ptolomæum æquali tantummodo motu non errantia sydera mutata fuisse. Quæ ut apertius [appareant, utque], quæ inferius dicentur, magis perspicua fiant, animadvertendum puto,
 15 scientiam stellarum ex eorum esse numero, quæ præpostere cognoscuntur a nobis, quam secundum naturam. Quemadmodum, verbi gratia, prius natura novit viciniore esse terræ planetas quam fixa sydera, deinde quod sequitur, ut minus vibrantes appare | ant. Nobis
 20 pinquiores esse terræ. Ita pariformiter prius depræhensum est a no-

1. quo minus || quominus V. — 2. sint || sunt W. — 7. qui || Q B, quæ V. — 8. dies CCXVIII fehlt in V. — 11. præcedenti || præcedente BV. — 13. sydera || sidera BV und so immer. — mutata fuisse || fuisse mutata BV. — 13—15. Quæ ut apertius . . . numero || Quæ ut apertius . . . animadvertenda puto. (Absatz) Scientiam . . . esse ex eorum numero B, quæ ut apertiora magisque perspicua fiant, quæ inferius dicentur, animadvertenda puto. (Absatz) Scientia stellarum est ex eorum numero V. — appareant, utque ist Coniectur. — 18—19. appareant. Nobis e contrario antea || appareant nobis, est contraria; antea V.

11. Alius error. Die Stelle, auf welche Copernicus anspielt, findet sich in der Propositio VI. und lautet: Si itaque fixorum siderum motus per quadringentos annos in singulis annorum centenarios singulos perfecerint gradus, consequens itaque est eundem fixorum siderum motum ante Ptolomæum per quadringentos annos fere uniformem et æqualem exstitisse. — 13. Quæ ut apertius. Dass der

Satz in den Lesarten der Handschriften nicht correct ist, haben die warschauer Herausgeber wohl gefühlt, jedenfalls haben sie durch das Zerreißen der zusammengehörigen Sätze, indem sie hinter puto ein Punctum und sogar Absatz setzten, mehr geschadet als genützt. Ob unsere Coniectur wirklich das liefert, was Copernicus geschrieben, dürfte ebenfalls fraglich sein, sie bringt aber wenigstens nichts neues und dem Sinne widersprechendes.

bis inæquales videri stellarum motus, postea epicyclia esse, excentros aliosve circulos, quibus ita ferantur, ratiocinamur. Atque ideo dictum id esse velim, quod oportuerit priscos illos philosophos primum loca stellarum instrumentorum artificio notare cum temporum intervallis
 1. S. 578 et ea tamquam manuactione quadam, ne infirmitas quæstio de motu
 cæli remaneret, rationem aliquam de eis certam percunctari, quam
 tum visi sunt invenisse, quando consideratis visisque omnibus stella-
 rum locis astipulatione quadam omnibus conveniret. Ita etiam de
 motu octavæ sphaeræ se habet, quem prisci mathematici ob nimiam
 eius tarditatem nobis ad plenum tradere non potuerunt. Sed vestigia
 10 eorum sequenda sunt investigare cum volentibus et eorum observatio-
 nibus tamquam testamento relictis inhærendum. Quod si secus ali-
 quis putarit illis non credendum, in hoc certe huic clausa est ianua
 huius artis, et ante ostium recubans ægrotantium somnia de motu
 octavæ sphaeræ somniabit, et merito, utpote qui per illorum calum-
 15 niam existimaverit suæ hallucinationi subveniendum. Constat autem
 illos summa diligentia et solerti ingenio illa omnia observasse, qui
 multa et præclara inventa et admiratione digna nobis reliquerunt.
 Quamobrem persuadere mihi haudquaquam possim in accipiendis
 stellarum locis errasse vel in quarta vel quinta sive etiam sexta parte
 20 minus gradus, ut hic autor existimat, de quo postea latius.

Illud quoque prætereundum non est in omni motu sydereo, cui
 diversitas inest, totam revolutionem ante omnia desiderari, in qua
 intelligatur omnes motus apparentis differentias pertransivisse. Diver-
 sitas enim apparens in motu est, quæ impedit, ut per partes tota
 25 revolutio et æqualitas motus metiri non possit. Sed sicut in iniqui-

1. epicyclia || epicyclos *BV*. — excentros || excentricos *BV*. — 7. tum ||
 tunc *BV*. — quando || quoniam *V*. — visisque omnibus || visisque *B*,
 visis quæ *V*. — 11. eorum || rerum *W*. — et eorum || et rerum *W*. — obser-
 vationibus || considerationibus *BV*, observationibus *W*. — 12. secus aliquis ||
 sensui inhærens *BV*. — 15. illorum || eorum *V*. — 18. admiratione || admira-
 tionem *W*. — 19. possim || possum *BV*. — 24. apparentis || apparentes *V*. —
 25. enim || n. *B*, nempe *V*. — 26. non possit || possit *V*. — 24–26. Zu die-
 sem Passus giebt *B* folgende Randbemerkung (Copernicus fol. 89.
 Medius æqualisque motus eo certioribus redditur numeris, quo magis fuerit ab
 æqualitatis differentiis separatus).

11. observationibus. Diese Les-
 art des Handschrift *W* ist jedenfalls
 die vorzüglichere; den Beobachtungen
 der Alten sollen wir vertrauen, nicht
 ihren sonstigen Betrachtungen. —
 24. Diversitas enim. Die von *B*
 hinzugefügte Randnote ist völlig exact.

Auf Blt. 89 der editio princeps
 des Copernicus findet sich das Cap.
 XVIII. des dritten Buches mit der
 Ueberschrift: De examinatione mo-
 tus æqualis secundum longitu-
 dinem, und in diesem wird das ausein-
 andergesetzt, was d. Randnote ausspricht.

sitione cursus Lunar^{is} Ptolomæus et ante eum Hipparchus Rhodius magna ingenii sagacitate considerarunt, oportet esse quatuor momenta in revolutione diversita^{ti} sibi opposita sibi invicem per diametros, ut puta extremæ velocitatis et tarditatis, ac utrobique per transversum
 5 amborum æqualitatum mediantium quadrifariam secantia circulum, fitque, ut in primo quadrante velocissimus decrescat motus, in altero diminuatur medius, ac rursum crescat tardissimus in tertio quadrante, æqualis in quarto. Qua industria scire potuerunt ex observatis inspectisque Lunæ motibus, in qua circuli portione quolibet tempore
 10 verteretur, ac proinde, cum similis motus rediisset, intellexerunt iam factam inæqualitatis circuiti^{onem}, quemadmodum hoc latius Magnæ Constructionis libro quarto Ptolomæus explicavit. Quod etiam in inquisitione motus octavæ sphaeræ erat observandum. Sed nimia eius, ut dixi, tarditas, qua in annorum millibus nondum in sese
 15 inæqualitatis motus satis constat, non sinit id statim absolvere, quæ multas hominum ætates excedit. Possibile tamen est coniectura rationabili ad id perveniri posse adiutos etiam nunc aliquibus observationibus post Ptolomæum adauctis, quæ in eandem congruerint rationem. Nam quæ determinata sunt, infinitam rationem habere non
 20 possunt, quemadmodum, si per tria puncta non secundum lineam rectam data circumferentia ducatur, non licebit aliam superinducere, quæ maior vel minor fuerit prius transmissæ. Sed de his alias, ut revertar ad id, unde digressus sum.

Videndum igitur nobis nunc est, an recte se habeat, quod dicit,
 25 non errantia sydera CCCC ante Ptolomæum annis æquali solummodo motu fuisse mutata. Porro, ne verborum significatione fallamur, æqualem accipio motum, quem et mediocre dicere solemus, qui sit inter tardissimum et concitatissimum medius. Ne circumveniat nos, quod in corollario primo septimæ propositionis dicit „tardiores
 30 esse motum fixorum syderum“, ubi penes suam hypothesin

1. Hipparchus || Hypparchus W. — 2. considerarunt || consideraverunt BV. — oportet || oportere BV. — 3. sibi invicem || sibi BV. — 6. decrescat || decrescit B. — 11. Quemadmodum || qm B, quam V. — 11—12. Magnæ... Ptolomæus || lib. 4. Magnæ Constructionis BV. — 14. sese || se BV. — 16. tamen est || est tamen BV. — 17. etiam nunc || etiamnunc B. — 20. quemadmodum || qm B, quoniam V. — 21. Nach lineam rectam giebt B folgende Glosse (ut tres lunæ eclipses, tres acronychii), was V in den Text aufgenommen hat. — licebit || licet W. — 22. transmissæ || transmissa BV. — 24. Der Absatz fehlt in B. — dicit || dicit autor BV. — 27. qui || quod BV. — 28. Nach medius fagt B als Glosse ein (Arithmetica medietate), was V in den Text aufgenommen hat. — 29. primo || primæ W. — 30. fixorum || fixarum WV.

29—30. tardiores esse. Diese Stelle Werners findet sich in der Pro-

v. Blitt. 6a æqualem ponit, ceterum | velociorem, perinde ac si numquam futurus
 sit tardior. In quibus haud scio, an sibi ipsi constet, multo tardio-
 rem postea adducens. Assumit autem æqualitatis argumentum ex unifor-
 mitate, qua fixa sydera tantisper a primis stellarum fixarum obser-
 vatoribus, Aristarcho et Timochare, usque ad Ptolomæum ac per 5
 æqualia temporum intervalla, utputa per singulos annorum centena-
 rios, singulos proxime gradus pertransierunt, ut apud Ptolomæum
 satis apparet repetitum ab autore propositione septima. Sed hic tan-
 tus mathematicus existens non animadvertit, quod nullatenus esse
 potest, ut circa momenta æqualitatis, hoc est sectiones circulorum 10
 eclipticæ decimæ sphaeræ et trepidationis, ut ille vocat, uniformior
 appareat stellarum motus quam alibi, quando contrarium eius sequi
 necesse sit, ut tunc maxime varius appareat, minime vero, quando
 velocissimus vel tardissimus est motus apparens. Quod vel e sua
 v. Blitt. 6b ipsius hypothesi et constructione debebat animadvertere | et tabulis 15
 exinde confectis, præsertim ultimo Canone, quem ad revolutionem
 totius æqualitatis sive trepidationis exemplificavit, ubi a ducentis annis
 ante na | tivitatem Christi secundum præcedentem supputationem in
 primo annorum centenario reperitur motus apparens scrupulorum
 primorum XLIX dumtaxat unius gradus; in altero centenario scrupu- 20
 lorum primorum LVII. Deinde ab ipsa nativitate Christi per primum
 annorum centenarium transmutatæ fuissent stellæ gradu I et decima
 fere parte unius; in secundo gradu I et quarta fere, ut paulo minus
 sextante unius gradus se invicem excedant motus sub æqualibus tem-
 porum spatiis. Quod si coniungas ducentorum annorum utrobique 25
 motum, deficiet in primo intervallo a duobus gradibus plus quam
 quinta pars unius, in secundo autem superaddet prope unius quadran-
 tem, sicque rursus sub æqualibus temporibus excedet motus sequens
 præcedentem in dimidio gradu et parte quintadecima fere, cum antea
 w. Blitt. 7a centesimo quoque anno singulos pertransisse gradus stellas fixas | 30
 Ptolomæo credens detulisset. E contrario vero eadem lege assumpto-
 rum a se circulorum in velocissimo motu octavæ sphaeræ contingit,

4. observatoribus || observationibus W. — 6. utputa || utpote BV. —
 9. animadvertit || advertit BV. — 11. eclipticæ || eclipsæ B, eclipsæ V, eclipti-
 citæ W. — 12. quando || qñ B, quoniam V. — 16. exinde || inde BV. — con-
 fectis || contextis BV. — 22—23. decima . . . quarta fere, ut || quarta fere, ut
 B₁, decima fere parte in secundo grad. 1. et quarta fere, ut B₂, decima fere
 et V. — 27. pars || parte B₂ V. — 29. et parte || ex parte V.

positio VII. Corollarium I. mit Citat ist also ziemlich genau. —
 folgenden Worten: Hinc perspicu- 16. præsertim ultimo Canone.
 um est, motum fixorum side- Derselbe nimmt bei Werner Blitt. 80^b
 rum tardio-rem existere. Das bis 82^a ein.

ut in CCCC annis vix unius scrupuli differentia in motu apparente reperiatur, quemadmodum videre licet ab annis Christi DC usque ad M in eodem Canone. Similiter et in tardissimo, ut a II. MLX annis in subsequentes CCCC. Et ratio diversitatis est, quia, ut dictum est
 5 superius, in uno hemicyclo trepidationis, a summa videlicet tarditate ad summam velocitatem accrescit semper aliquid motui apparenti, ac in altero semicirculo, qui a summa velocitate ad tarditatem summam computatus, continue decrescit motus, qui antea creverat, fitque summa augmentatio et diminutio | in punctis æqualitatis e diametro oppositis, ^{B. 1. 15}
 10 adeo ut in motu apparente non sit reperire motus æquales in duobus continuis temporum spatiis æqualibus, qui alter alteri maior sint aut minor, | nisi circa velocitatis et tarditatis extremitates, ubi dumtaxat ^{W. 1. 15}
 ultro citroque æquales circumferentias pertranseunt temporis æqualitate atque incipientes vel desinentes augeri vel minui mutua tunc sese
 15 compensatione cœquant. Nulla ergo ratione convenit medium fuisse motum eum, qui in CCCC annis ante Ptolomæum, sed tardissimum

2. quemadmodum || qm B, quem V. — annis || anno V. — 3. IIMLX || 2000 V. — 5. hemicyclo || hemicyclo V. — 6. motui || motu BV. — 8. computatus fehlt in W. — continue || contrario BV. — 9. Hinter diminutio schiebt B die Glosse ein (προσθαφαίρεσις), welche V als (προσθηγησις) in den Text recipiert hat. — e diametro || in diametro W. — Hinter oppositis schiebt B die Glosse ein (sic in ☉), was V in der Form (sicut in sole) in den Text setzt. — 10. non sit || non sit opus V. — 11. æqualibus fehlt in W. — qui alter . . . minor || quorum alter altero maior sit aut minor BV. — sint || fiat W. sit BV. — 14—15. sese compensatione || compensatione sese BV. — 15. cœquant || cœquant V. — 4—15. Hierzu giebt B folgende Randbemerkung: Lege lege illas regulas de æquationibus in Reinholdo vel Peucero. Quemadmodum motus apparens et medius sint æquales in Sole, demonstrat Nonius et Regiomontanus. Prosthaphæreses sunt æquales circa apogea et perigea, nequaquam circa longitudines medias. — 16. CCCC || 4000 B₁.

3. ut a II. MLX annis. Obwohl beide Handschriften deutlich 2060 lesen, haben die Herausgeber von V geglaubt 2000 substituieren zu müssen. Ein Blick in die Tafeln Werners würde sie belehrt haben, dass 2060 allein richtig ist. — 11. sint. B liest sit, W fiat; da notwendig der Plural verlangt wird, so dürfte in W ein Lesefehler vorliegen und sint in der Vorlage geschrieben gewesen sein. — 4—15. Zu dieser Stelle gibt B die

In der varia lectio verzeichnete Randglosse. Reinholdus soll dabei jedenfalls dessen Tabulæ Pruthenicæ bedeuten, Peucer wohl eben so gewiss die Hypothesen astronomiæ, seu Theoricæ planetarum . . . ad observationes Nicolai Copernici et canones motuum ab eo conditos, accommodatæ Vitebergæ 1571. Die Handschrift B ist also nicht vor 1571 geschrieben worden.

potius, cum etiam non videam, cur alium divinemus tardio-
 rem, de quo nullam coniecturam hactenus habere potuimus, cum ante Timocharem
 nulla stellarum fixarum annotatio facta sit, quæ ad nos usque perve-
 nisset, sed neque ad Ptolomæum. | Cumque velocissimus etiam motus
 iam præterierit, consequens est in altero a Ptolomæo semicirculo iam
 nos esse, in quo diminuitur motus, cuius etiam non modica pars
 præterierit.

Itaque mirum videri non debet, quod non potuerit hisce suis
 assumptionibus propius acce- | dere ad ea, quæ sunt ab antiquis anno-
 tata, putaveritque illos errasse in quarta vel quinta parte unius gra-
 dus, sive etiamnum dimidia et amplius, cum tamen in nulla parte
 Ptolomæus maiorem videtur adhibuisse diligentiam, quam ut nobis
 non errantium stellarum motum sine vitio traderet, attendens, quod
 non, nisi modica eius particula, id sibi fuisset concessum, qua uni-
 versum illum circuitum coniecturus esset, ubi error quantumlibet
 insensibilis interveniens in tota illa vastitate insignis nimium poterat
 evenire. Ideoque Timochari Alexandrino Aristarchum adiunxisse vide-
 tur cœtaneum, et Menelao Romano Agrippam Bithynium, ut sic etiam
 in tanta locorum distantia illis consentientibus certissima haberet et
 indubitata testimonia, quo minus credibile sit eos vel Ptolomæum in
 tanto errasse, qui multa alia et iam difficiliora | ad extremum, ut
 aiunt, unguem deprehendere potuerunt. Nullo demum loco ineptior
 est quam in vigesima secunda propositione et præsertim corollario

1. de quo || de qua V. — 2. hactenus habere || habere hactenus BV. —
 4. Hinter Ptolomæum fügt B folgende Glosse ein, die V in den
 Text aufgenommen hat (Res miserrima astronomicas observationes, quas
 nos habemus, incipere a Timocharido, qui annis 30 post Alexandrum vixit). —
 10. illos || Eos eos B, eos V. — 14. id sibi fuisset concessum || sibi fuisset con-
 cessa V. — 16. nimium fehlt in W. — 18. Bithynium || Bithynicum BV. —
 20. quo minus || quominus V. — 21. iam difficiliora || difficiliora BV.

22. Nullo demum loco. Die Stelle, welche Copernicus meint, findet sich Bltt. 71^a u. ^b der genannten Schrift Werners im Corollarium der Propo-
 sitio XXVII und lautet: „veluti id liquet de considerationibus Timocharidis, quæ in fixo si-
 dere Arista dicto a computo meo deficient, super stella vero illa quæ in fronte Scor-
 pii trium plendarum borea-
 lior est, meum calculum exce-
 dunt, quæ tamen consideratio-
 nes per eundem Timocharidem
 patratae, si simul veræ fuissent,
 deberent pariter vinci a meo
 computo aut pariter eundem
 exsuperare. Non igitur minor
 fides tribuenda est meis cano-
 nibus quam veterum inspectio-
 nibus et inventis. Quod hucus-
 que volui prædictis declarasse
 exemplis.

eiusdem, dum opus hoc suum commendare volens taxat Timocharem circa duas stellas, utputa Aristam Virginis et eam, quæ ex tribus in fronte Scorpii borealior est, quod supputatio sua in illa deficiat, in hac autem abundet, ubi nimis pueriliter hallucinatur. Cum enim sit
 5 eadem utriusque stellæ distantia inter Timocharem et Ptolomæum consideratarum, nempe gradus IIII et tertia pars sub æquali fere temporis differentia, atque numerus supputationis illius perinde idem proxime, nihilo tamen magis advertit, quod gradus IIII, scrupula VII addita loco stellæ, quam reperit Timochares in secundo gradu Scorpii,
 10 merito non possent supplere VI gradus et scrupula XX Scorpii, ubi Ptolomæus ipsam invenit, et e converso idem numerus elevatus ex XXVI gradibus et XL scrupulis Aristæ secundum Ptolomæum | usque
 ad gradum XXII et tertiam partem redire, ut par est, non potuit, sed residebat in XXII gradibus et scrupulis XXXII. Ita existimabat
 15 illic defecisse calculum, quanto hic abundasset, tamquam in observationibus hæc incidisset diversitas, vel quasi ex Athenis in Thebas et a Thebis in Athenas eadem via non sit. Alioqui, si utrobique vel addidisset vel subduxisset numerum, ut paritas rationis postulabat, invenisset utrumque eodem modo se habere. | Adde etiam, quod revera
 20 non erant inter Timocharem et Ptolomæum anni CCCCXLIII, sed CCCCXXXII solum, ut a principio declaravi. Proinde breviori tempore minorem esse numerum oportet, ut non solum in scrupulis XIII, sed in trienti unius gradus ab observato stellarum motu dissidebit. Ita errorem hunc suum imposuit Timochari vix evadente Ptolomæo.
 25 At dum existimat illorum annotationibus non fidendum, quid aliud | restat, quam ut suis quoque observationibus minus credatur?

Et hæc de in longitudinem motu octavæ sphaeræ, e quibus etiam facile potest intelligi, quid de motu quoque declinationis existimandum

3: quod || q B, quoniam V. — illa || illo V. — 4. enim || .n. B, non V. — 6. consideratarum || consideraturum W. — 7. perinde || proinde BV. — 8. scrupula VII || scrupula „?“ B₂, scrupula V. — 9 Timochares || Timocharis BV. — gradu Scorpii || gradu M BW, gradu V. — 10. possent || posset BV. — XX Scorpii || 20 M BW, 20 V. — 11. converso idem || converso. Idem BV. — elevatus || elevatur W. — 14. et scrupulis XXXII || 32 scrup. BV. — 17. Alioqui || Alioq B, Alioquin V. — 25. quid || quod BV. — 27—28. Et hæc... quid de motu || Et hæc de motu octavæ sphaeræ in longitudinem. Quod de motu BV.

9. Scorpii. In beiden Handschriften steht hier und gleich darauf das Zeichen des Scorpion M. Da die Herausgeber von V jedenfalls das Zeichen nicht verstanden haben, ist es von ihnen ausgelassen, und so etwas Unverständliches entstanden. — 27. Et hæc de in longitudinem. Erst die Auffindung der Handschrift W hat hier einen guten und klaren Sinn geliefert.

sit. Involvit enim ipsum duabus, ut ait, trepidationibus instruendo secundam hanc supra primam. Sed dissipato ipso iam fundamento necesse est, ut superædificata corruant infirmaque sint ac minus sibi invicem cohærentia. Quid demum ipse de motu non errantium stellarum sphaeræ sentiam? Quoniam alio loco destinata sunt, superfluum 5
 1.10a putavi et impertinens hic amplius immorari, | cum satis sit, si modo desiderio tuo satisfecerim, ut meam, quod a me exigebas, de isto opusculo habeas sententiam. Valeat Venerabilitas tua faustissime.

Ex Varmia III Iunii 1524.

Nicolaus Copphernicus. 10

Reverendo Domino Bernhardo Vapovsky,
 Cantori et Canonico Ecclesiæ Cracoviensis
 et S. R. Maiestatis Polonicæ Secretario
 Domino et Fautori suo plurimum observando etc.

1. sit. Involvit || sit, involvit. BV. — enim || .n. B, non V. — duabus fehlt bei V. — 3. ut fehlt bei V. — 8. faustissime || faventissime V. — 10. Copphernicus || Copphornicg W, Copernicus BV. — 11. Vapovsky || Vapasky B, Vapoushy W, Wapowski V. — 13. Polonicæ || Poloniæ BV. — 14. Diese Zeile fehlt bei BV.

8. faustissime. V hat dafür fa-ventissime gesetzt. Man kann hier sehr nett nachweisen, wie V auf diese sonderbare Lesart gekommen ist. In B, der Quelle von V, ist nämlich stets u mit einer Flamme versehen; diese Flamme ist als Strich über u gelesen, wodurch fa uen herauskommt, und dann das s als überflüssig weggelassen worden. — 10. Copphernicus. Die Lesart von W weist auf diese Art der Namensunterschrift hin. Dass Copernicus sie selbst auch anderweitig benutzte ist sicher, z. B. in seinem Exemplare der Practica Valesci de Tharanta, dann in dem Gedichte, welches er Dantisus gewidmet hat, wo er sich *Коперникос* nennt. Ich mache noch darauf aufmerksam, dass in zwei von der warschauer Ausgabe

abgedruckten Briefen, wo diese die Unterschrift Copernicus giebt, in den Originalen Copphernicus geschrieben ist, was nicht gerade für die Richtigkeit derjenigen Unterschriften spricht, bei welchen wir nur auf den Abdruck in dieser Ausgabe als Quelle angewiesen sind. Die Zahl der Unterschriften oder eigenhändigen Einzeichnungen, in welchen er sich Copernicus schreibt, ist verschwindend klein gegen diejenige mit der Form Copphernicus. Es wäre wohl an der Zeit diese von ihm bei allen officiellen Acten benutzte Form in ihr Recht einzusetzen, und ebenso wie man jetzt Kepler mit einem p schreibt, fortan Copphernicus mit zwei dergleichen zu schreiben, wie ich durchweg getan habe.

VI.

Nombres relatifs des polygones réguliers
de n et de $2n$ côtés, suivant que n est un nombre
impair ou un nombre pair.

Par

Georges Dostor,

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université catholique de Paris.

1. **Théorème I.** Lorsque n est un nombre impair, il existe autant de polygones réguliers de $2n$ côtés, qu'il y a de polygones réguliers de n côtés.

Soit p un nombre entier, inférieur à la moitié de n et premier avec n . Il existera un polygone régulier de n côtés et de l'espèce p .

Puisque p est inférieur à la moitié de n , $2p$ sera moindre que n ; par suite $n-2p$ sera un nombre entier positif, plus petit que n , ou que la moitié de $2n$.

Or je dis que $n-2p$ est aussi premier avec $2n$.

En effet, n étant impair, $n-2p$ sera aussi impair. Il s'ensuit que tout facteur entier, commun à $n-2p$ et $2n$, ne saurait être qu'un nombre impair, qui diviserait n . Ce facteur impair, divisant $n-2p$ et n , diviserait leur différence $2p$ et par suite p . Donc p et n ne seraient pas premiers entre eux.

Ainsi à chaque nombre entier p , inférieur à la moitié de n et premier avec n , correspond un nombre entier $n-2p$ inférieur à la moitié de $2n$ et premier avec $2n$.

Réciproquement à chaque nombre entier q , inférieur à la moitié n de $2n$ et premier avec $2n$, correspond un nombre entier $\frac{n-q}{2}$, inférieur à la moitié de n et premier avec n . Car q étant premier avec $2n$ est un nombre impair et, comme n est supposé impair, $\frac{n-q}{2}$ est un nombre entier évidemment moindre que $\frac{n}{2}$.

D'ailleurs q étant premier avec $2n$, l'est avec n ; donc $\frac{n-q}{2}$ est aussi premier avec n .

Il s'ensuit que, si n est impair, à tout polygone régulier de n côtés correspond un polygone régulier de $2n$ côtés, et réciproquement.

2. Définition. Nous appellerons polygones correspondants les deux polygones réguliers, l'un de n et l'autre de $2n$ côtés, dont les espèces sont respectivement p et $n-2p$.

3. Corollaire. Lorsque n est impair, deux polygones réguliers, l'un de n et l'autre de $2n$ côtés, sont correspondants, si la double espèce du premier, augmentée de l'espèce du second, donne une somme égale à n .

Car on a

$$2.p + (n-2p) = 2p + n - 2p = n.$$

4. Théorème II. Les côtés de deux polygones réguliers correspondants sont ceux de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est le diamètre du cercle commun, circonscrit aux deux polygones.

Car soit

$$(1) \quad C_{n,p} = 2R \sin \frac{p\pi}{n}$$

le côté d'un polygone régulier, ayant un nombre impair n de côtés et étant de l'espèce p . Le côté du polygone régulier correspondant, parmi ceux de $2n$ côtés, sera

$$C_{2n,n-2p} = 2R \sin \frac{(n-2p)\pi}{2n} = 2R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{p\pi}{n} \right).$$

On a donc

$$(2) \quad C_{2n,n-2p} = 2R \cos \frac{p\pi}{n}.$$

Elevant au carré les deux égalités (1) et (2) et ajoutant, on trouve la relation

$$C_{n,p}^2 + C_{2n,n-2p}^2 = 4R^2 \left(\sin^2 \frac{p\pi}{n} + \cos^2 \frac{p\pi}{n} \right) = 4R^2,$$

qui démontre la proposition énoncée.

5. **Corollaire I.** Ce principe permet de calculer les côtés des polygones réguliers d'un nombre impair n de côtés, lorsqu'on connaît ceux des polygones d'un nombre double $2n$ de côtés; et réciproquement.

Ainsi on voit que les côtés des deux décagones réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé, sont

$$C_{10,1} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1), \quad C_{10,3} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Or les pentagones réguliers, qui correspondent respectivement à ces deux décagones, sont le pentagone étoilé et le pentagone convexe. Il s'ensuit que l'on a

$$C_{5,2} = \sqrt{4R^2 - C_{10,1}^2} = \sqrt{4R^2 - \frac{1}{4}R^2(\sqrt{5}-1)^2},$$

$$C_{5,1} = \sqrt{4R^2 - C_{10,3}^2} = \sqrt{4R^2 - \frac{1}{4}R^2(\sqrt{5}+1)^2};$$

ce qui fournit les valeurs suivantes

$$C_{5,2} = \frac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \quad C_{5,1} = \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

pour les côtés des deux pentagones réguliers, le premier étoilé et le second convexe.

6. **Corollaire II.** Si l'on connaît les côtés des quatre penté-décagones réguliers, on pourra aussi calculer immédiatement les côtés des quatre polygones réguliers de 30 côtés, qui leur sont naturellement correspondants. Car on a

$$C_{30,1}^2 = 4R^2 - C_{15,7}^2, \quad C_{30,7}^2 = 4R^2 - C_{15,4}^2,$$

$$C_{30,11}^2 = 4R^2 - C_{15,2}^2, \quad C_{30,13}^2 = 4R^2 - C_{15,1}^2;$$

et, comme (voir au n° 1 de l'article III.)

$$C_{15,7} = \frac{1}{2}R(\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \sqrt{15} + \sqrt{3}),$$

$$C_{15,4} = \frac{1}{2}R(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{15} - \sqrt{3}),$$

$$C_{15,2} = \frac{1}{2}R(-\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \sqrt{15} + \sqrt{3}),$$

$$C_{15,1} = \frac{1}{2}R(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}),$$

on trouve de suite que

$$\begin{aligned} C_{30,1} &= \frac{1}{2}R\sqrt{36-4\sqrt{5}-4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ &= \frac{1}{2}R(\sqrt{3\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-\sqrt{5}-1), \end{aligned}$$

$$C_{30,7} = \frac{1}{4}R\sqrt{36+4\sqrt{5}+4\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ = \frac{1}{4}R(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1),$$

$$C_{30,11} = \frac{1}{4}R\sqrt{36-4\sqrt{5}+4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ = \frac{1}{4}R(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1),$$

$$C_{30,13} = \frac{1}{4}R\sqrt{36+4\sqrt{5}+4\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ = \frac{1}{4}R(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1)$$

sont les côtés des quatre polygones réguliers de 30 côtés, qui sont inscrits dans le cercle de rayon R .

7. **Théorème III.** Lorsque n est un nombre pair, il existe deux fois autant de polygones réguliers de $2n$ côtés, qu'il y a de polygones réguliers de n côtés.

Soit, en effet, p un nombre entier, inférieur à la moitié de n et premier avec n . Il existera un polygone régulier de n côtés et de l'espèce p .

Or le nombre p , étant premier avec le nombre pair n , est nécessairement impair; par suite il est aussi premier avec $2n$.

Mais p étant premier avec n , $n-p$ l'est aussi, non seulement avec n , mais encore avec $2n$; de plus $n-p$ est évidemment moindre que n ou que la moitié de $2n$.

Donc, si n est pair, à chaque polygone régulier de n côtés et de l'espèce p , correspondent deux polygones réguliers de $2n$ côtés et des espèces p et $n-p$.

Donc le nombre des polygones réguliers de $2n$ côtés est double de celui des polygones réguliers de n côtés.

8. **Définition.** Nous appellerons polygones conjugués, deux polygones réguliers d'un nombre de côtés $2n$ doublement pair, dont la somme des espèces est égale à n .

9. **Théorème IV.** Les côtés de deux polygones réguliers conjugués sont ceux de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est le diamètre du cercle circonscrit aux deux polygones.

Soit, en effet,

$$(3) \quad C_{2n,p} = 2R \sin \frac{p\pi}{2n}$$

le côté d'un polygone régulier, ayant un nombre doublement pair $2n$ de côtés et étant de l'espèce p . Le côté de son conjugué, parmi ceux de $2n$ côtés, sera

$$C_{2n,n-p} = 2R \sin \frac{(n-p)\pi}{2n},$$

ou

$$C_{2n,n-p} = 2R \sin \left(\frac{n\pi}{2n} - \frac{p\pi}{2n} \right) = 2R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{p\pi}{2n} \right).$$

On a donc

$$(4) \quad C_{2n,n-p} = 2R \cos \frac{p\pi}{2n}.$$

Elevant au carré les deux côtés (3) et (4) et ajoutant, on trouve la relation

$$C_{2n,p}^2 + C_{2n,n-p}^2 = 4R^2 \left(\sin^2 \frac{p\pi}{n} + \cos^2 \frac{p\pi}{n} \right) = 4R^2,$$

qui démontre notre proposition.

10. **Corollaire I.** Connaissant les valeurs des côtés de la première moitié des polygones réguliers de $2n$ côtés (ou n est pair), on peut, au moyen du théorème précédent, calculer les côtés de l'autre moitié des polygones réguliers de $2n$ côtés.

11. **Corollaire II.** Puisqu'on a

$$C_{2n,p} = 2R \sin \frac{p\pi}{2n},$$

$$C_{2n,n-p} = 2R \cos \frac{p\pi}{2n},$$

on obtient, en multipliant,

$$C_{2n,p} \times C_{2n,n-p} = 4R^2 \sin \frac{p\pi}{2n} \cos \frac{p\pi}{2n},$$

ou

$$C_{2n,p} \times C_{2n,n-p} = 2R^2 \sin \frac{p\pi}{n}.$$

Or

$$2R \sin \frac{p\pi}{n} = C_{n,p};$$

il vient donc

$$C_{2n,p} \times C_{2n,n-p} = R \times C_{n,p}.$$

Ainsi le côté d'un polygone régulier d'un nombre pair de côtés est la quatrième proportionnelle entre le rayon du cercle circonscrit et les côtés des deux polygones réguliers conjugués d'un nombre double de côtés, dont l'un est de même espèce que le premier, et qui sont inscrits dans le même cercle.

Paris, 20 Octobre 1877.

VII.

Rein geometrische Proportionslehre.

Von

R. Hoppe.

Die Lehre von den Linienproportionen wird, wie man in allen Lehrbüchern findet, im Schulunterricht bis jetzt überall auf die Messung gegründet. Ein Linienverhältniss ist hiernach nichts weiter als ein Zahlenverhältniss. Hierbei lässt es sich nicht umgehen den allgemeinsten Begriff der Irrationalzahl einzuführen. Einerseits ist also die betreffende Doctrin keine rein geometrische, sie überträgt vielmehr eine arithmetische Theorie auf die Geometrie; andererseits zeigt sich diese arithmetische Grundlage unzureichend, sie muss erst eine weitere Entwicklung erlangen um ihre Bestimmung für Geometrie in vollem Masse zu erfüllen.

Nun würde es, was den pädagogischen Gesichtspunkt betrifft, gerade kein Schade sein, wenn die Notwendigkeit für die Geometrie dem Schüler den Anlass böte, eine Erweiterung des Zahlbegriffs zu erlernen, die aus der reinen Arithmetik nie gewonnen werden kann, und die doch für die Wissenschaft unentbehrlich ist. Auch mag immerhin eingeräumt werden, dass die strenge Begründung der Lehre von den Irrationalzahlen keine übermässigen Schwierigkeiten verursacht.

Damit bleibt aber die Frage unentschieden, ob es sachgemässer ist, die Arithmetik und die Erweiterung des Zahlbegriffs zur Grundlage der geometrischen Proportionslehre zu nehmen oder letztere zuerst und unabhängig zu lehren, dann den Begriff der Irrationalen darauf zu gründen. Hier sprechen mehrere Gründe für das letztere,

für das erstere möchte wol kaum ein einziger aufzufinden sein. Erstens entlehnt die allgemeine Irrationalzahl ihre ganze Bedeutung den räumlichen Verhältnissen, so lange noch keine andern stetigen Grössen in Betracht kommen; dagegen liegt die Auffassung räumlicher Verhältnisse uns unmittelbar durch Anschauung nahe, die mit Abmessung nichts zu tun hat. Von Natur geht also immer das räumliche Verhältniss der Irrationalzahl voraus. Zweitens gilt die ganze geometrische Doctrin gleichmässig für commensurabele und incommensurabele Raumgrössen, die Unterscheidung beider ist daher der Sache nicht entsprechend. Drittens ist die gewöhnliche Behandlung der räumlichen Verhältnisse gar nicht dafür eingerichtet den Schüler mit dem Begriff der Irrationalen vertraut zu machen; sie benutzt ihn nur vorübergehend, so weit sie ihn nicht entbehren kann. Daher fällt auch die oben zugelassene Rechtfertigung ausser Betracht.

Ist es nun unzweifelhaft, dass eine rein geometrische Begründung der Proportionslehre ein methodischer Fortschritt sein würde, so muss irgend einmal ein Versuch gemacht werden, welcher die Gestaltung der Doctrin zeigt. Dann kann es sich noch um mögliche Verbesserungen handeln. Hier bieten sich zwei Wege dar: erstens kann man die Linienproportionen auf die Aehnlichkeit gründen, diese wieder auf die Gleichheit der Winkel, zweitens erstere durch die Gleichheit der Rechtecke aus den äussern und mittlern Glieder definiren. Wir beginnen mit der erstern Methode, welche den Vorzug einer grossen Anschaulichkeit hat. So leicht es hier sein würde den Begriff der Aehnlichkeit in voller Allgemeinheit und ganz elementar einzuführen, so wollen wir doch davon absehen, weil es, so lange der Kreis ausschliesslich für sich, nicht als specielle Curve behandelt wird, an jeder Anwendung fehlen würde.

Eine Theorie der Aehnlichkeit auf die Winkelgleichheit zu gründen ist bei Beschränkung auf die Ebene unmöglich. Wir nehmen daher einen stereometrischen Anfang, gehen aber von da durch einen planimetrischen Fundamentalsatz auf die Ebene über, dieser reicht dann ohne fernere Anwendung der Stereometrie zum Beweise aller Sätze hin.

Als bekannt vorausgesetzt werden die planimetrischen Sätze über Winkel und Parallelen, Congruenz und Flächengleichheit der geradlinigen Figuren. Aus der Stereometrie sei bekannt,

I. dass die Durchschnitte zweier parallelen Ebenen mit einer dritten Ebene parallel sind,

II. dass 2 Pa'r parallele Gerade, die sich einzeln schneiden, gleiche Winkel bilden,

III. dass sich durch je 3 Punkte eine Ebene legen lässt,

IV. dass je 3 Winkel, deren Summe $< 4R$ ist, eine Ecke einschliessen können.

Wir fügen diesen folgende elementare Sätze als vorbereitende hinzu.

Zunächst die 2 Definitionen und den Hauptsatz aus der elementaren Lehre von den unendlichen Grössen (s. T. LV. S. 50.) I. II. Definition, III. Hauptsatz als Satz V. Hieraus folgt:

Satz VI. Zwei feste Punkte, denen ein variabler Punkt unendlich nahe ist, fallen in einen Punkt zusammen.

Denn, hätten die festen Punkte A, B einen positiven Abstand und wären dem variablen Punkt P unendlich nahe, so könnte man AB in AC und BC teilen und $AP < AC$, $BP < BC$ machen, so dass im Dreieck ABP eine Seite $AB > AP + BP$ würde.

Satz VII. Im gleichschenkligen Dreieck von constanten Schenkeln liegt der unendlich kleinen Grundlinie ein unendlich kleiner Winkel gegenüber, und umgekehrt.

Denn, macht man die Grundlinie oder den Winkel an der Spitze beliebig klein, so wird durch Verkleinerung des einen auch das andere kleiner als die beliebige Grösse.

Satz VIII. Zwei feste Gerade, die einzeln mit zwei variablen Parallelen unendlich kleine Winkel bilden, sind einander parallel.

Beweis. AB und $A'B'$ seien fest, PQ und $P'Q'$ variabel, aber beständig einander parallel und schneiden erstere in A und A' , wo Winkel BAQ und $B'A'Q'$ unendlich klein seien. Man ziehe AC parallel $A'B'$ und mache die 3 Strahlen AB, AC, AQ einander gleich. Dann ist nach Satz VII. Winkel $CAQ = B'A'Q'$ auch unendlich klein, folglich, wenn man B, C, Q durch 3 Gerade verbindet, BQ und CQ nach Satz VII. unendlich klein, daher fallen nach Satz VI. die festen Punkte B, C zusammen und AB ist parallel $A'B'$.

Fundamentalsatz der Aehnlichkeitslehre IX.

Sind in einem ebenen Viereck die 4 Winkel, welche eine Seite mit den zwei anstossenden Seiten und den Diagonalen bildet, gleich den entsprechenden 4 Winkeln in einem andern Viereck, so sind auch die entsprechenden 4 Par Winkel in beiden gleich, welche die Gegenseite mit denselben 4 Geraden bildet.

Beweis. In den Vierecken $ABCD$ und $A'B'C'D'$ sei

$$\begin{aligned} \text{Wkl. } BAC &= B'A'C'; & BAD &= B'A'D' \\ ABC &= A'B'C'; & ABD &= A'B'D' \end{aligned}$$

Von den Winkeln BAD , ABC ist wenigstens einer $< 2R$; sei also $BAD < 2R$. Man construire eine dreikantige Ecke, deren Seitenwinkel sind BAD selbst, $BAE = BAD$ und der beliebig kleine DAE . Die Construction ist nach Satz IV. möglich, wofern

$$\text{Wkl. } DAE < 4R - 2.BAD$$

Man lege das zweite Viereck so auf das erste, dass die gleichen Winkel bei A und A' sich decken; dann ist nur zu beweisen, dass CD parallel $C'D'$ wird.

Man zeichne in der Ebene des Winkels BAE die Figur $ABEB'E'$ congruent $ABDB'D'$, lege eine Ebene durch B , C , E und ihr parallel eine andere durch B' , welche AC in F schneidet. Dann ist nach Satz I.

$$B'F \text{ parallel } BC \text{ parallel } B'C'$$

daher fällt F in C' . Da nun ebenso nach Satz I.

$$CE \text{ parallel } FE'$$

so ist jetzt

$$CE \text{ parallel } C'E'$$

Betrachten wir den beliebig kleinen Winkel DAE als unendlich klein, so sind nach Satz VII. auch die Geraden DE und $D'E'$ unendlich klein, daher nach demselben Satze auch die Winkel DCE und $D'C'E'$, folglich nach Satz VIII. CD parallel $C'D'$, w. z. b. w.

Aehnlichkeit der Vielecke, Proportionalität entsprechender Strecken und Verhältnisse von Flächenräumen.

Definition 1. Zwei Vielecke sind einander ähnlich, wenn alle von Seiten und Diagonalen an den Ecken gebildeten Winkel im einen Vieleck den in gleicher Ordnung entsprechenden im andern gleich sind.

Satz 1. Sind zwei Vielecke einem dritten ähnlich, so sind sie einander ähnlich.

Unmittelbare Folge der Definition.

Satz 2. Congruente Vielecke sind einander ähnlich.

Denn, wenn sich die Vielecke decken, decken sich auch die Diagonalen und die von ihnen und den Seiten gebildeten Winkel.

Satz 3. Zwei ähnliche Vielecke sind einander congruent, wenn eine Seite oder Diagonale des einen gleich der entsprechenden des andern ist.

Beweis. Man teile die Vielecke vom einen Endpunkt der gleichen Seite oder Diagonale aus durch Diagonalen in Dreiecke, dann sind je 2 entsprechende Dreiecke einander congruent wegen Gleichheit einer Seite und zweier Winkel, zunächst die anliegenden, dann der Reihe nach alle übrigen; folglich sind die ganzen Vielecke congruent.

Satz 4. Zwei Vielecke sind einander ähnlich, wenn die Winkel, welche eine Seite in ihren 2 Endpunkten mit den anstossenden Seiten und Diagonalen im einen Vieleck bildet, den entsprechenden Winkeln im andern gleich sind.

Beweis. In den Vielecken $ABC\dots MN\dots$ und $A'B'C'\dots M'N'\dots$, wo die gleichbenannten Ecken einander entsprechen mögen, seien die Winkel bei A und B gleich den entsprechenden bei A' und B' . MN sei eine beliebige nicht an AB anstossende Seite. Man vollende das Viereck $ABMN$, dann sind nach Fund. S. IX. die 4 Winkel, welche MN mit den Diagonalen nach A und B bildet, gleich den entsprechenden; statt MN kann man auch jede an AB nicht anstossende Diagonale setzen, da der Beweis derselbe ist. Demnach sind alle Winkel, welche irgend eine Seite oder Diagonale mit 2 andern bildet, gleich den entsprechenden. Durch diese sind alle übrigen als Summen oder Differenzen mitbestimmt, mithin alle Bedingungen der Aehnlichkeit erfüllt.

Satz 5. Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn 2 Winkel des einen zweien Winkeln des andern einzeln gleich sind.

Denn, da beide Scheitel immer durch eine Seite verbunden sind, so kann man die Scheitel der gleichen Winkel als entsprechend betrachten und findet die Bedingung der Aehnlichkeit nach Satz 4., desgleichen, sofern auch der dritte Winkel gleich ist, nach Def. 1. erfüllt.

Satz 6. Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn ein Winkel des einen gleich einem Winkel des andern ist, und die ihn einschliessenden Seiten im einen und andern gleich 2 Par entsprechenden Seiten ähnlicher Dreiecke sind.

Beweis. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ sei Wkl. $BAC = B'A'C'$. Ferner sei

$$\begin{aligned} &\text{Dreieck } ABD \text{ ähnlich } A'B'D' \\ &AC = AD; \quad A'C' = A'D' \end{aligned}$$

Zieht man noch CD und $C'D'$, so ist auch

$$\text{Wkl. } CAD = C'A'D'$$

und, weil Dreieck CAD gleichschenkelig,

$$\text{Wkl. } ADC = A'D'C'$$

demnach bei A, D alle Winkel gleich den entsprechenden bei A', D' ,
folglich nach Satz 4.

Viereck $ABCD$ ähnlich $A'B'C'D'$

mithin

Dreieck ABC ähnlich $A'B'C'$, w. z. b. w.

Definition 2. Aus 2 Par entsprechenden Seiten ähnlicher Dreiecke lassen sich (nach Satz 6.) ähnliche Dreiecke mit beliebigem Winkel zwischen ihnen bilden. Zwei Par Strecken, die diese Eigenschaft haben, heissen proportionirt. Die 2 Par Strecken AB und $A'B'$, AC und $A'C'$ bilden demnach eine Proportion, geschrieben

$$AB:A'B' = AC:A'C'$$

wenn die Dreiecke $ABC, A'B'C'$ bei Gleichheit der eingeschlossenen Winkel einander ähnlich werden. Die 4 proportionirten Grössen heissen in ihrer Reihenfolge die Glieder der Proportion, die erste und dritte die Vorderglieder, die 2te und 4te die Hinterglieder.

Satz 7. Zwei Par Strecken, die einzeln mit einem dritten Par in Proportion stehen, bilden auch mit einander eine Proportion.

Folgt aus Satz 1.

Satz 8. Die 2 ersten Glieder einer Proportion kann man mit den 2 letzten vertauschen.

Die Bedeutung der Proportion bleibt dabei dieselbe.

Definition 3. Infolge der Sätze 7. und 8. lässt sich die vergleichende Grössenbeziehung der 2 ersten, wie der 2 letzten Glieder einer Proportion als eine Grösse auffassen, und heisst als solche ihr Verhältniss, sofern die Proportion die Gleichheit der Verhältnisse definirt, und 2 Verhältnisse die einem dritten gleich sind, nach Satz 7. einander gleich sind.

Satz 9. In 2 ähnlichen Vielecken sind die Verhältnisse aller Pare entsprechender Seiten und Diagonalen einander gleich.

Beweis. In 2 ähnlichen Vielecken mögen 4 beliebige Ecken A, B, C, D , verbunden durch Seiten oder Diagonalen, den gleichnamigen A', B', C', D' entsprechen. Dann ist

Dreieck ABC ähnlich $A'B'C'$, und BCD ähnlich $B'C'D'$,
folglich

$$AB:A'B' = BC:B'C' = CD:C'D'$$

gültig für je 2 Paare entsprechender Seiten oder Diagonalen.

Satz 6. in Folge der Def. 2. lautet: Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich, und die die gleichen Winkel einschliessenden Seiten proportionirt sind.

Satz 10. In einer Proportion kann man die Vorder- und Hinterglieder gleichzeitig vertauschen.

Die Bedeutung der Proportion bleibt dieselbe.

Satz 11. Durch 3 Glieder einer Proportion ist das vierte bestimmt.

Beweis. Sei

$$AB:A'B' = AC:A'C' = AC:A'D'$$

$$\text{Wkl. } BAC = B'A'C' = B'A'D'$$

dann ist nach Satz 6.

$$\text{Dreieck } ABC \text{ ähnlich } A'B'C' \text{ ähnlich } A'B'D'$$

Da die letztern 2 Dreiecke die Seite $A'B'$ gemein haben, so sind sie nach Satz 3. einander congruent, folglich $A'C' = A'D'$. Durch Vertauschung gemäss den Sätzen 8. und 10. lässt sich das 4. Glied zu jedem andern Gliede machen. Demnach gilt das vom letzten Gliede Bewiesene von allen Gliedern.

Satz 12. Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn die Seiten des einen zu den Seiten des andern in gleichem Verhältniss stehen.

Beweis. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ sei

$$AB:A'B' = AC:A'C' = BC:B'C'$$

Man schneide auf AB die Strecke $AD = A'B'$, auf AC die Strecke $AE = A'C'$ ab, und ziehe DE ; dann ist

Dreieck ABC ähnlich ADE nach Satz 6.

daher

$$AB:AD = BC:DE \text{ oder}$$

$$AB:A'B' = BC:DE$$

Dies verglichen mit der ersten Proportion giebt nach Satz 11.

$$DE = B'C'$$

folglich ist

Dreieck ADE congruent $A'B'C'$, also auch ähnlich,
daher ABC ähnlich $A'B'C'$ nach Satz 1.

Satz 13. Zwei Vielecke sind einander ähnlich, wenn alle Seiten und Diagonalen des einen zu den entsprechenden des andern in gleichem Verhältniss stehen.

Denn dann sind nach Satz 12. alle Dreiecke den entsprechenden ähnlich, in die sie durch Diagonalen geteilt werden können, folglich alle Winkel den entsprechenden gleich.

Definition 4. Das Verhältniss, welches aus einem andern durch Vertauschung des Vorder- und Hintergliedes entsteht, heisst dessen reciprokes Verhältniss.

Satz 14. In einer Proportion ist das Rechteck aus den äussern Gliedern gleich dem Rechteck aus den innern, und umgekehrt stehen die Höhen gleicher Rechtecke im reciproken Verhältniss der Grundlinien.

Beweis. Sei

$$AB:A'B' = AC:A'C'$$

Man trage die 2 ersten Glieder auf dem einen, die 2 letzten auf dem andern Scheitel eines rechten Winkels ab, und verbinde sämtliche Endpunkte mit einander. Dann ist

Dreieck ABC ähnlich $AB'C'$ nach Satz 6. daher

$$\text{Wkl. } ABC = AB'C' \text{ mithin}$$

$$BC \text{ parallel } B'C' \text{ folglich}$$

$$\text{Dreieck } BCB' = BCC'$$

und nach Addition von ABC

$$\text{Dreieck } AB'C = ABC'$$

Ersteres ist das halbe Rechteck aus $A'B'$ und AC , letzteres aus AB und $A'C'$, womit der Satz bewiesen ist.

Sind umgekehrt diese Rechtecke gleich, so sind es auch die Dreiecke und alle vorhergehenden Schlüsse lassen sich umkehren, so dass schliesslich die anfängliche Proportion hervorgeht.

Satz 15. Die äussern, sowie die innern Glieder einer Proportion von Linien kann man vertauschen.

Folgt unmittelbar aus Satz 14.

Satz 16. Die Grundlinien zweier Rechtecke von gleichen Höhen verhalten sich wie die zweier andern ebenso grossen Rechtecke von gleichen Höhen.

Beweis. Seien g, g' die Grundlinien zweier Rechtecke von gemeinsamer Höhe h , und g_1, g_1' die zweier andern von gemeinsamer Höhe h_1 ; überdies sei

$$\text{Rechteck } gh = g_1 h_1; \quad g'h = g_1' h_1$$

dann ist nach Satz 14.

$$g:g_1 = h:h = g':g_1'$$

daher nach Satz 15.

$$g:g' = g_1:g_1'$$

Definition 5. Unter dem Verhältniss zweier Flächenstücke versteht man das Verhältniss der Grundlinien zweier Rechtecke von gemeinsamer Höhe, die einzeln jenen Flächenstücken gleich sind.

Satz 18. Die Rechtecke aus den gleichnamigen Gliedern zweier Linienproportionen stehen in derselben Ordnung in Proportion, und umgekehrt folgt aus der Proportion von 4 Rechtecken und der ihrer Höhen die Proportion ihrer Grundlinien.

Beweis. Sei

$$g:g' = g_1:g_1'; \quad h:h' = h_1:h_1'$$

Man bilde die Rechtecke $gh, g'h', g_1 h_1$ und $g_1' h_1'$ und verwandle $g'h'$ in $g''h, g_1' h_1'$ in $g_1'' h_1$. Dann ist nach Satz 14.

$$g':g'' = h:h' = h_1:h_1' = g_1':g_1''$$

Vertauscht man hier und in der ersten Voraussetzung die innern Glieder, so findet man:

$$g:g_1 = g':g_1' = g'':g_1''$$

daher

$$g:g'' = g_1:g_1''$$

folglich nach Def. 5.

$$gh:g''h = g_1 h_1:g_1'' h_1$$

oder, nach Substitution gleicher Rechtecke,

$$gh:g'h' = g_1 h_1:g_1' h_1'$$

gemäss der ersten Behauptung. In diesem Beweise lassen sich alle Schlüsse umkehren, und es folgt dann die zweite.

Im Vorstehenden sind reichlich alle Sätze und Definitionen enthalten, auf Grund deren man in gewöhnlicher Weise alle übrigen rein geometrisch herleiten kann. Die Anwendung auf die Messung hat keine Schwierigkeit. Ebenso kann man leicht auf den Begriff der Irrationalzahl übergehen.

**Proportionen und Aehnlichkeit, abgeleitet
aus der Flächengleichheit.**

Definition 1. Vier Strecken in bestimmter Reihenfolge bilden eine Proportion, wenn das Rechteck aus der ersten und 4ten gleich dem Rechteck aus der 2ten und 3ten ist.

Folgerungen. Die Bedeutung der Proportion bleibt dieselbe, wenn man die äussern oder die innern oder die äussern mit den innern Gliedern vertauscht, ferner wenn man die 2 ersten mit den 2 letzten oder beide Paare gleichzeitig vertauscht.

Satz 1. Bildet ein Paar Strecken mit jedem von zwei andern Paaren eine Proportion, so bilden letztere mit einander eine Proportion.

Beweis. Sei

$$g:h = g_1:h_1; \quad g:h = g_2:h_2$$

und zwar

$$g < g_1 < g_2; \quad h < h_1 < h_2$$

Man trage die Strecken g, g_1, g_2 auf dem einen, h, h_1, h_2 auf dem andern Schenkel eines rechten Winkels ab und vollende die Rechtecke gh, g_1h_1, g_2h_2 . Den Proportionen zufolge ist

$$\text{Rechteck } gh_1 = g_1h; \quad gh_2 = g_2h$$

daher nach Subtraction gemeinsamer Stücke

$$\text{Rechteck } g(h_1 - h) = (g_1 - g)h; \quad g(h_2 - h) = (g_2 - g)h$$

Hieraus folgt nach einem bekannten und leicht zu beweisenden Satze, dass die vierten Ecken der construirten 3 Rechtecke mit dem Scheitel des rechten Winkels in gerader Linie liegen, und hieraus nach dem umgekehrten Satze, dass

$$\text{Rechteck } g_1(h_2 - h_1) = (g_2 - g_1)h_1$$

daher nach Addition des Rechtecks g_1h_1 , dass

$$\text{Rechteck } g_1h_2 = g_2h_1$$

ist, mithin die Proportion stattfindet:

$$g_1:h_1 = g_2:h_2$$

Stehen die g und die h in anderer Grössenfolge, so sind nur ihre Differenzen entgegengesetzt, und die Gleichungen gelten unverändert.

Definition 2. Infolge dieses Satzes kann man die Beziehung der Strecken g, h als Grösse auffassen, deren Gleichheit durch die Proportion definirt ist; in diesem Sinne heisst dieselbe das Verhältniss von g zu h .

Satz 2. Die Strecken, welche 2 Parallelen auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels begrenzen, stehen in gleichem Verhältniss, und umgekehrt.

Beweis (nur möglich mit Hilfe des Fundamentalsatzes IX.) Die Parallelen BC und DE schneiden in ihren Endpunkten die Schenkel des schiefen Winkels BAC . Auf dem zweiten Schenkel AF des rechten Winkels BAC seien dieselben Strecken $AF = AC$ und $AG = AE$ abgetragen, und die Geraden BF , DG , CF , EG gezogen. Dann ist

CF parallel EG wegen Gleichheit der corresp. Winkel,
 BC parallel DE ,

folglich nach Fund. S. IX.

BF parallel DG .

Zieht man noch BG und DF , so ist

Dreieck $BFD = BFG$, also

Dreieck $ADF = ABG$, daher

Rechteck aus AD , AF gleich Rechteck aus AB , AG ,

daher, mit Substitution gleicher Strecken,

$$AB:AC = AD:AE$$

Ist umgekehrt diese Proportion, nicht aber die Parallelität von BC , DE vorausgesetzt, so folgt rückgängig, dass BF parallel DG , und in Verbindung mit CF parallel EG , nach dem Fund. S., dass BC parallel DE ist.

Definition 3. Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn alle Seiten und Diagonalen des einen zu den entsprechenden des andern in gleichem Verhältniss stehen.

Satz 3. Zwei Vielecke, die einem dritten ähnlich sind, sind einander ähnlich.

Beweis. Den Seiten oder Diagonalen a , b im ersten Vieleck mögen a' , b' im zweiten und a'' , b'' im dritten entsprechen. Dann ist

$$a:a'' = b:b''; \quad a':a'' = b':b''$$

woraus:

$$a:b = a'':b'' = a':b' \quad \text{oder} \quad a:a' = b:b'$$

Diese 2 Paare Seiten oder Diagonalen vertreten alle Paare, daher sind alle Bedingungen erfüllt.

Satz 4. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen gleich zweien Winkeln des andern sind.

Beweis. Zunächst folgt, dass auch der dritte Winkel in beiden gleich ist. Man lege die Dreiecke mit einem Par gleicher Winkel auf einander, so dass die andern Pare correspondirende werden; dann sind die Gegenseiten des erstern parallel, und nach Satz 2. folgt eine der Proportionen, welche Bedingung der Aehnlichkeit sind, analog die beiden andern.

Satz 5. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ein Winkel des einen gleich einem Winkel des andern, und die die gleichen Winkel einschliessenden Seiten proportionirt sind.

Beweis. Man lege die Dreiecke mit den gleichen Winkeln auf einander; dann sind nach Satz 2. die Gegenseiten parallel, daher alle Winkelpaare gleich, folglich nach Satz 4. die Dreiecke ähnlich.

Satz 6. Zwei ähnliche Vielecke sind congruent, wenn ein Par entsprechende Seiten oder Diagonalen in beiden gleich sind.

Beweis. Seien A, B, C drei beliebige Ecken des einen, A', B', C' die entsprechenden des ähnlichen Vielecks, und $AB = A'B'$. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{Rechteck aus } AB \text{ und } A'C' &= \text{Rechteck aus } AC \text{ und } A'B' \\ &\text{oder aus } AC \text{ und } AB \end{aligned}$$

folglich

$$A'C' = AC$$

Analog sind alle entsprechenden Seiten und Diagonalen beider Vielecke gleich, also diese congruent.

Satz 7. In ähnlichen Vielecken sind die Winkel zwischen entsprechenden Seiten und Diagonalen gleich.

Beweis. Alle Dreiecke, welche von Seiten und Diagonalen des einen Vielecks gebildet werden, sind den entsprechenden im andern Vieleck ähnlich. Seien ABC und $A'B'C'$ zwei solche ähnliche Dreiecke. In einem dritten Dreieck $A''B''C''$ sei

$$A''B'' = A'B'; \quad A''C'' = A'C'; \quad \text{Wkl. } B''A''C'' = BAC$$

Dann ist nach Satz 4.

Dreieck $A''B''C''$ ähnlich ABC , also auch ähnlich $A'B'C'$, da es aber mit letzterem 2 gleiche Seiten hat, auch congruent, folglich

$$\text{Wkl. } BAC = B''A''C'' = B'A'C'$$

Das Analoge gilt von allen Winkelparen.

Alle übrigen Sätze lassen sich nun auf gewöhnliche Weise rein geometrisch herleiten.

VIII.

Summation einiger Reihen.

Von

R. Hoppe.

Das Folgende soll durch eine Succession von Reihensummationen schliesslich zur Summation einer Doppelreihe hinführen, die auch als Entwicklungsformel nicht ohne Anwendung ist.

§. 1.

Seien a und b beliebige Constanten, r und m ganze Zahlen ≥ 0 , und $r < m$; dann verschwindet offenbar die Grösse

$$\frac{\partial^r (1-u)^m u^{a+r}}{\partial u^r}$$

für $u = 1$. Führt man die angedeutete Rechnung durch Entwicklung nach Potenzen aus, so ergibt sich:

$$0 = \sum_{h=0}^{h=m} (-1)^h (m)_h (a+h+1)(a+h+2)\dots(a+h+r)$$

und nach Division durch $\Gamma(a+r+1)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{h=0}^{h=m} (-1)^h (m)_h \frac{\Gamma(a+h+r+1)}{\Gamma(a+h+1) \Gamma(a+r+1)} \\ &= \sum_{h=0}^{h=m} (-1)^h (m)_h \frac{(a+r+1)(a+r+2)\dots(a+r+h)}{\Gamma(a+h+1)} \end{aligned}$$

gültig für $r = 0, 1, \dots, m-1$. Daher ist, wenn man jetzt b für r schreibt,

$$\sum_{h=0}^{h=m} (-1)^h (m)_h \frac{(a+b+1)(a+b+2)\dots(a+b+h)}{\Gamma(a+h+1)}$$

eine ganze Function m ten Grades von b , welche für die m Werte $b = 0, 1, 2, \dots, m-1$ verschwindet, und als solche

$$= Ab(b-1)\dots(b-m+1)$$

Zur Bestimmung der Constanten A setzen wir

$$b = -a-1$$

dann verschwinden alle Terme ausser dem ersten, und es bleibt:

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)} = (-1)^m A(a+1)(a+2)\dots(a+m) = \frac{(-1)^m A \Gamma(a+m+1)}{\Gamma(a+1)_m}$$

woraus:

$$A = \frac{(-1)^m}{\Gamma(a+m+1)}$$

Multiplicirt man noch mit $\Gamma(a+1)$, so lautet unser erstes Resultat:

$$\sum_{h=0}^{h=m} (-1)^h (m)_h \frac{(a+b+1)(a+b+2)\dots(a+b+h)}{(a+1)(a+2)\dots(a+h)} = (-1)^m \frac{b(b-1)\dots(b-m+1)}{(a+1)(a+2)\dots(a+m)} \quad (1)$$

§. 2.

Wir geben nun a und b zweierlei Specialwerte, nämlich

$$\text{I. } a = -\frac{1}{2}; \quad b = -l-1$$

$$\text{II. } a = \frac{1}{2}; \quad b = -l-2$$

wo l positive ganze Zahl sei. Dann wird die Formel bzw.:

$$\sum_{h=0}^{h=m} (m)_h \frac{2l+1}{1} \frac{2l-1}{3} \dots \frac{2l-2h+3}{2h-1} = 2^m \frac{l+1}{1} \frac{l+2}{3} \dots \frac{l+m}{2m-1}$$

$$\sum_{h=0}^{h=m} (m)_h \frac{2l+1}{3} \frac{2l-1}{5} \dots \frac{2l-2h+3}{2h+1} = 2^m \frac{l+2}{3} \frac{l+3}{5} \dots \frac{l+m+1}{2m+1}$$

oder nach Ergänzung der natürlichen Zahlenreihe in den Factoren:

$$\sum_{h=0}^{h=m} \frac{m! (2l+1)! (l-h)!}{(m-h)! (2l-2h+1)! l! (2h)!} = 2^{2m} \frac{m! (l+m)!}{(2m)! l!}$$

$$\sum_{h=0}^{h=m} \frac{m! (2l+2)! (l-h)!}{2(m-h)! (2l-2h+1)! (l+1)! (2h+1)!} = 2^{2m} \frac{m! (l+m+1)!}{(2m+1)! (l+1)!}$$

Multipliziert man bzhw. mit

$$\frac{l!}{m!(l-m)!}, \quad \frac{2(l+1)!}{m!(l-m)!}$$

so kommt:

$$\sum_{h=0}^{h=m} (2l+1)_{2h} (l-h)_{l-m} = 2^{2m} (l+m)_{l-m}$$

$$\sum_{h=0}^{h=m} (2l+2)_{2h+1} (l-h)_{l-m} = 2^{2m+1} (l+m+1)_{l-m}$$

und nach Substitution von $l-h$ für h :

$$\sum_{h=l-m}^{h=l} (2l+1)_{2h+1} (h)_{l-m} = 2^{2m} (l+m)_{l-m}$$

$$\sum_{h=l-m}^{h=l} (2l+2)_{2h+1} (h)_{l-m} = 2^{2m+1} (l+m+1)_{l-m}$$

Zur Vereinfachung sei erst

$$m = l - k$$

dann wird bzhw.:

$$\sum_{h=k}^{h=l} (2l+1)_{2h+1} (h)_k = 2^{2l-2k} (2l-k)_k$$

$$\sum_{h=k}^{h=l} (2l+2)_{2h+1} (h)_k = 2^{2l+1-2k} (2l+1-k)_k$$

Jetzt setzen wir bzhw.

$$\text{I. } 2l = n + k$$

$$\text{II. } 2l+1 = n + k$$

so dass I. geraden, II. ungeraden $n+k$ entspricht; dann werden beide Gleichungen übereinstimmend:

$$\sum_{h=k}^{h=\frac{n+k}{2}} (n+k+1)_{2h+1} (h)_k = 2^{n-k} (n)_k \quad (2)$$

gültig für alle positiven ganzen Zahlen n, k .

§. 3.

Multipliziert man Gl. (2) mit

$$\frac{(-2)^k (k)_m}{n+k+1}$$

und summirt nach k zwischen den weitesten Grenzen m, n , so kommt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=m}^{k=n} \frac{(-2)^k (k)_m}{n+k+1} \sum_{h=k}^{h=\frac{n+k}{2}} (n+k+1)_{2h+1} (h)_k = \\
& \sum_{k=m}^{k=n} \frac{(-1)^k 2^n (n)_m (n-m)_{n-k}}{n+k+1} = \sum_{k=0}^{k=n-m} \frac{(-1)^{n-k} 2^n (n)_m (n-m)_k}{2n-k+1} \\
& = 2^n (n)_m \sum_{k=0}^{k=n-m} (-1)^{n-k} (n-m)_k \int_0^1 w^{2n-k} \partial w \\
& = (-1)^n 2^n (n)_m \int_0^1 w^{2n} \left(1 - \frac{1}{w}\right)^{n-m} \partial w \\
& = (-1)^n 2^n (n)_m \int_0^1 w^{n+m} (1-w)^{n-m} \partial w \\
& = (-1)^n 2^n (n)_m \frac{\Gamma(n+m+1) \Gamma(n-m+1)}{\Gamma(2n+2)}.
\end{aligned}$$

das ist

$$\sum_{k=m}^{k=n} \frac{(-2)^k (k)_m}{n+k+1} \sum_{h=k}^{h=\frac{n+k}{2}} (n+k+1)_{2h+1} (h)_k = \frac{(-1)^n 2^n n! (n+m)!}{(2n+1)! m!} \quad (3)$$

§. 4.

Multipliziert man Gl. (3) mit $(-2u)^{n-m} v^m$ und summirt nach m von 0 bis n , so kommt nach Vertauschung der Summationsfolge:

$$\frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{m=0}^{m=n} (n+m)_m (2u)^{n-m} v^m =$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-2)^k}{n+k+1} \sum_{h=k}^{h=\frac{n+k}{2}} (n+k+1)_{2h+1} (h)_k \sum_{m=0}^{m=k} (k)_m (-2u)^{n-m} v^m$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-2)^n u^{n-k} (v-2u)^k}{n+k+1} \sum_{h=k}^{h=\frac{n+k}{2}} (n+k+1)_{2h+1} (h)_k$$

Dies wieder multiplicirt mit $2^{-n} x^{2n+1}$ und summirt nach n von 0 bis ∞ giebt:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n+1)!} u^n x^{2n+1} \sum_{m=0}^{m=n} (n+m)_m \left(\frac{v}{2u}\right)^m = L =$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n x^{2n+1} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{u^{n-k} (v-2u)^k}{n+k+1} \sum_{h=k}^{h=\frac{n+k}{2}} (n+k+1)_{2h+1} (h)_n$$

oder nach Substitution von $k-n-1$ für k :

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (ux)^{2n+1} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{u^{-k} (v-2u)^{k-n-1}}{k} \sum_{h=k-n-1}^{\frac{k-1}{2}} (k)_{2h+1} (h)_{k-n-1}$$

und nach Vertauschung der Summationsfolge:

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{-k}}{k} \sum_{h=0}^{\frac{k-1}{2}} (k)_{2h+1} \sum_{n=k-h-1}^{k-1} (-1)^n (h)_{k-n-1} (v-2u)^{k-n-1} (ux)^{2n+1}$$

und nach Substitution von $k-n-1$ für n :

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} u^{-k}}{k} \sum_{h=0}^{\frac{k-1}{2}} (k)_{2h+1} \sum_{n=0}^{n=h} (h)_n (2u-v)^n (ux)^{2k-2n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} u^{-k}}{k} \sum_{h=0}^{\frac{k-1}{2}} (k)_{2h+1} (ux)^{2k-2h-1} R^{2h} \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$R = \sqrt{u^2 x^2 + 2u - v}$$

gesetzt ist, oder, wenn man mit Tilgung der geraden h durch den Factor

$$\frac{1 - (-1)^h}{2}$$

die Werte von $2h+1$ durch h vertreten lässt:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2kR} \sum_{h=0}^{\frac{k-1}{2}} (k)_h (ux)^{k-h} 2^h R^h \{1 - (-1)^h\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 2^k}{2kR} \{(ux+R)^k - (ux-R)^k\} \\ &= \frac{1}{2R} \log \frac{1+ux^2+xR}{1+ux^2-xR} \end{aligned}$$

Das Product von Zähler und Nenner ist $= 1+vx^2$; daher lautet das Resultat:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n+1)!} u^n x^{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} (n+m)_m \left(\frac{v}{u}\right)^m &= \\ \frac{1}{R} \log \frac{1+ux^2+xR}{\sqrt{1+vx^2}} &\quad (4) \end{aligned}$$

§. 5.

Um von Gl. (4) eine Anwendung zu zeigen, soll das Integral

$$S_n = \int \frac{u^n \partial u}{R} \quad (5)$$

berechnet werden. Man hat, wenn man

$$w = \log \frac{1 + ux^2 + xR}{\sqrt{1 + vx^2}}$$

setzt, für constantes x und v :

$$\frac{\partial u}{R} = \frac{\partial w}{x}$$

$$\partial(u^{n-1}R) = \{nx^2u^n + (2n-1)u^{n-1} - (n-1)vu^{n-2}\} \frac{\partial u}{R}$$

also, mit Weglassung der Integrationsconstanten:

$$S_0 = \frac{w}{x}$$

$$nx^2S_n = u^{n-1}R - (2n-1)S_{n-1} + (n-1)vS_{n-2} \quad (6)$$

woraus erhellt, dass das gesuchte Integral, bei Trennung des algebraischen und logarithmischen Theils, die Form hat:

$$S_n = q_n \frac{w}{x} + NR$$

Nach Einführung in die vorige Gleichung ergibt sich ausser einer Relation der N , die wir, wie sich zeigen wird, bei Seite lassen können, die folgende Relation der q :

$$nx^2q_n = -(2n-1)q_{n-1} + (n-1)vq_{n-2}; \quad q_0 = 1$$

welche erfüllt wird durch

$$q_n = \frac{(-1)^n}{(2x^2)^n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} (2n-2k)_n (vx^2)^k \quad (7)$$

Dieser Ausdruck enthält von x nur Potenzen mit negativen Exponenten. In gleichem Falle ist offenbar die Entwicklung von N nach Gl. (6). Demnach sind sämtliche Terme des Ausdrucks von S_n für sehr kleine x so gross, dass die numerische Rechnung so gut wie unmöglich wird. Sei z. B. $x = 0,000\,001$; $v = 1$; die obere Grenze der u auch $= 1$; dann ist $S_n < 1$, besteht aber aus Termen $> 10^{12n}$; man würde folglich, um S_{10} auf 6 Stellen zu finden, jeden Term auf 126 Stellen berechnen müssen.

Das vorliegende Integral ist demnach ein Beispiel, wo, ungeachtet dass der genaue allgemeine Ausdruck in ziemlich einfacher Gestalt bekannt ist, doch bei der numerischen Berechnung zur Reihenentwicklung geschritten werden muss.

Hierzu dient die Gl. (4), welche $\frac{v}{R}$ durch eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe, mit positiven Exponenten beginnend, darstellt. Da nach (5) S_n für $x = 0$ einen endlichen Wert hat, während alle Terme von N bei verschwindendem x unendlich gross werden, so folgt, dass sich N vollständig gegen die sämtlichen Terme mit negativen Potenzen in $q_n \frac{v}{x}$ heben muss, dass man also nur das Product $q_n \frac{v}{x}$ nach Potenzen von x zu entwickeln, und alle jene Terme wegzulassen braucht.

Nun ist nach Gl. (4) (7)

$$q_n \frac{v}{xR} = \frac{(-1)^n}{(2x^2)^n} \sum_{k=0}^{k=\frac{n}{2}} (n)_k (2n-2k)_n (vx^2)^k \times \\ \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{(-2)^h (h!)^2}{(2h+1)!} u^h x^{2h} \sum_{m=0}^{m=h} (h+m)_m \left(\frac{v}{2u}\right)^m$$

Setzt man $h-k$ für h und $m-k$ für m , so kommt:

$$\frac{q_n v}{xR} = \frac{(-1)^n}{(2x^2)^n} \sum_{k=0}^{k=\frac{n}{2}} (n)_k (2n-2k)_n \sum_{h=k}^{h=\infty} (-1)^{h-k} (ux^2)^h \times \\ \frac{2^k (h-k)!^2}{(2h-2k+1)!} \sum_{m=k}^{m=h} (h+m-2k)_{m-k} \left(\frac{v}{2u}\right)^m$$

und nach Vertauschung der Summationsfolge:

$$\frac{q_n v}{xR} = \frac{(-1)^n}{(2x^2)^n} \sum_{h=0}^{h=\infty} (-2ux^2)^h \sum_{m=0}^{m=h} \left(\frac{v}{2u}\right)^m M_{n,h,m} \\ M_{n,h,m} = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (n)_k (2n-2k)_n (h+m-2k)_{m-k} \frac{(h-k)!^2}{(2h-2k+1)!}$$

Der obigen Bemerkung zufolge muss dann

$$N = \frac{(-1)^{n-1}}{(2x^2)^n} \sum_{h=0}^{h=n-1} (-2ux^2)^h \sum_{m=0}^{m=h} \left(\frac{v}{2u}\right)^m M_{n,h,m}$$

sein, während

$$S_n = \frac{(-1)^n R}{(2x^2)^n} \sum_{h=n}^{h=\infty} (-2ux^2)^h \sum_{m=0}^{m=h} \left(\frac{v}{2u}\right)^m M_{n,h,m}$$

als in x stetiger Teil übrig bleibt.

Zur Summation des Ausdrucks der M lässt sich eine bekannte Formel anwenden, die man leicht folgenderweise gewinnen kann. Für $u = 0$ ist

$$\frac{\partial^r (1 - e^u)^m}{\partial u^r} = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (m)_k k^r$$

Die Linke ist $= 0$ für $r < m$. Setzt man für r nach einander 0, 1, 2, ... $m-1$, multiplicirt jede Gleichung mit einer beliebigen Constanten und addirt, so ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (m)_k \varphi(k) = 0 \quad (8)$$

wo φ eine beliebige ganze Function von niederem als m tem Grade bezeichnet.

Zunächst schreiben wir die gegebene Gleichung wie folgt:

$$M_{n,h+n,m} = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (m)_k (h+n-2k+m)_m p \quad (9)$$

$$p = \frac{(n-2k+1)(n-2k+2) \dots (n-2k+h)(n-k+1)(n-k+2) \dots (n-k+h)}{(2n-2k+1)(2n-2k+2) \dots (2n-2k+2h+1)}$$

Als Function von k ist der Zähler des letzten Ausdrucks vom Grade $2h$, der Nenner vom Grade $2h+1$; daher erhält man nach Zerlegung in Partialbrüche:

$$p = \sum_{\mu=1}^{\mu=2h+1} (-1)^{\mu-1} \frac{P_\mu}{2n-2k+\mu}$$

$$P_\mu = (-1)^k \frac{(n+\mu-1)(n+\mu-2) \dots (n+\mu-h)(2-\mu)(4-\mu) \dots (2h-\mu)}{2^h(\mu-1)!(2h+1-\mu)!}$$

Dies in Gl. (9) eingeführt giebt:

$$M_{n,h+n,m} = \sum_{\mu=1}^{\mu=2h+1} (-1)^{\mu-1} P_\mu \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (m)_k \frac{(h+n-2k+m)_m}{2n-2k+\mu} \quad (10)$$

Entwickelt man den letzten Zähler nach Potenzen des Nenners, so kommt:

$$\begin{aligned} (h+n-2k+m)_m &= \{(2n-2k+\mu) + (h-n-\mu+m)\}_m \\ &= (h-n-\mu+m)_m + \varphi(k)(2n-2k+\mu) \end{aligned}$$

wo $\varphi(k)$ eine ganze Function $(m-1)$ ten Grades ist, so dass der zweite Teil nach Einführung in (10) zufolge der Gl. (8) verschwindet. Jetzt geht Gl. (10) über in

$$M_{n, h+n, m} = \sum_{\mu=1}^{\mu=2h+1} Q_{\mu} H$$

$$Q_{\mu} = P_{\mu} (h-n-\mu+m)_m$$

$$= (-1)^{m+1} \frac{(n+\mu-1)(n+\mu-2)\dots(n+\mu-h-m)(2-\mu)(4-\mu)\dots(2h-\mu)}{2^h m! (\mu-1)! (2h+1-\mu)!}$$

$$H = \sum_{k=0}^{k=m} \frac{(-1)^k (m)_k}{2n-2k+\mu} = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (m)_k \int_0^1 r^{2n-2k+\mu-1} \partial r$$

$$= \int_0^1 r^{2n+\mu-1} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^m \partial r = (-1)^m \int_0^1 r^{2n+\mu-2m-1} (1-r^2)^m \partial r$$

$$= (-1)^m \frac{\Gamma\left(n-m+\frac{\mu}{2}\right) \Gamma(m+1)}{2 \Gamma\left(n+1+\frac{\mu}{2}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^m m!}{2 \left(n+\frac{\mu}{2}\right) \left(n-1+\frac{\mu}{2}\right) \dots \left(n-m+\frac{\mu}{2}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^m 2^m m!}{(2n+\mu)(2n+\mu-2) \dots (2n+\mu-2m)}$$

das ist

$$M_{n, h+n, m} = (-1)^h 2^{m-h} \sum_{\mu=1}^{\mu=2h+1} (-1)^{\mu-1} \frac{(2-\mu)(4-\mu)\dots(2h-\mu)}{(\mu-1)!(2h+1-\mu)!} \times$$

$$\frac{(n+\mu-1)(n+\mu-2)\dots(n+\mu-h-m)}{(2n+\mu)(2n+\mu-2)\dots(2n+\mu-2m)}$$

Da die Terme für gerade μ verschwinden, so kann man $2\mu+1$ für m setzen und erhält nach einigen Reductionen:

$$M_{n, h+n, m} = \frac{(-1)^h 2^{m-2h}}{h!} \sum_{\mu=0}^{\mu=h} (-1)^{\mu} (h)_{\mu} \times$$

$$\frac{(n+2\mu)(n+2\mu-1)\dots(n+2\mu-h-m+1)}{(2n+2\mu+1)(2n+2\mu-1)\dots(2n+2\mu-2m+1)}$$

Demnach lautet die Entwicklung von $\frac{1}{R} S_n$ nach Potenzen von x und v :

$$\frac{1}{R} \int \frac{u^n \partial u}{R} = u^n \sum_{h=0}^{h=n} \frac{\left(\frac{1}{2} u x^2\right)^h}{h!} \sum_{m=0}^{m=h+n} \left(\frac{v}{u}\right)^m \sum_{\mu=0}^{\mu=h} (-1)^\mu (h)_\mu \times$$

$$\frac{(n+2\mu)(n+2\mu-1)\dots(n+2\mu-h-m+1)}{(2n+2\mu+1)(2n+2\mu-1)\dots(2n+2\mu-2m+1)} \quad (11)$$

Bis zu 2. Potenz von x erhält man:

$$\frac{1}{R} \int \frac{u^n \partial u}{R} = u^n \sum_{m=0}^{m=n} \left(\frac{v}{u}\right)^m \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{(2n+1)(2n-1)\dots(2n-2m+1)}$$

$$+ \frac{1}{2} u^{n+1} x^2 \sum_{m=0}^{m=n+1} \left(\frac{v}{u}\right)^m \left\{ \frac{n(n-1)\dots(n-m)}{(2n+1)(2n-1)\dots(2n-2m+1)} \right.$$

$$\left. - \frac{(n+2)(n+1)\dots(n-m+2)}{(2n+3)(2n+1)\dots(2n-2m+3)} \right\} + \dots \quad (12)$$

Die Klammer unter einem Nenner vereinigt giebt:

$$\frac{n(n-1)\dots(n-m+2)(m+1)\{(2n+3)m-2(n+1)^2\}}{(2n+3)(2n+1)\dots(2n-2m+1)}$$

woraus ersichtlich, dass sich für höhere Potenzen von x der Coefficient von $\left(\frac{v}{u}\right)^m$ nicht als Monom darstellen lässt.

IX.

Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales du quatrième ordre*).

Par

P. Appell.

Soit une courbe gauche unicursale du quatrième ordre dont les coordonnées s'expriment en fonction d'un paramètre λ de la façon suivante:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{A\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E}{\alpha\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \varepsilon} \\ y = \frac{A'\lambda^4 + B'\lambda^3 + C'\lambda^2 + D'\lambda + E'}{\alpha\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \varepsilon} \\ z = \frac{A''\lambda^4 + B''\lambda^3 + C''\lambda^2 + D''\lambda + E''}{\alpha\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \varepsilon} \end{array} \right.$$

A un point de la courbe correspond une seule valeur du paramètre λ et réciproquement. Considérons trois points de la courbe correspondant aux valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des paramètre; le plan de ces trois points coupe la courbe en un quatrième point λ_4 parfaitement déterminé, et il y a réciprocity entre les quatre points. Les quatre valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ du paramètre sont donc liées par une relation de la forme suivante:

$$(2) \quad a\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + b(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4\lambda_1 + \lambda_4\lambda_1\lambda_2) \\ + c(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4) + d(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + f = 0$$

*) Voir „comptes rendus 18 décembre 1876.“

Voici comment on peut exprimer les coefficients a, b, c, d, f qui entrent dans cette relation (2) en fonction des coefficients des équations (1). Coupons la courbe par le plan

$$lx + my + nz + p = 0$$

Les valeurs du paramètre correspondant aux quatre points d'intersection de ce plan et de la courbe sont les racines de l'équation

$$\begin{aligned} & \lambda^4(lA + mA' + nA'' + p\alpha) + \lambda^3(lB + mB' + nB'' + p\beta) \\ & + \lambda^2(lC + mC' + nC'' + p\gamma) + \lambda(lD + mD' + nD'' + p\delta) \\ & + (lE + mE' + nE'' + p\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

Appelons S_1 la somme des racines, S_2 la somme de leurs produits deux à deux, S_3 la somme de leurs produits trois à trois, S_4 leur produit, et posons

$$lA + mA' + nA'' + p\alpha = q;$$

nous avons les relations suivantes

$$\begin{aligned} lB + mB' + nB'' + p\beta &= -qS_1 \\ lC + mC' + nC'' + p\gamma &= qS_2 \\ lD + mD' + nD'' + p\delta &= -qS_3 \\ lE + mE' + nE'' + p\varepsilon &= qS_4 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit par l'élimination des indéterminées l, m, n, p, q la relation

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' & \alpha & 1 \\ B & B' & B'' & \beta & -S_1 \\ C & C' & C'' & \gamma & S_2 \\ D & D' & D'' & \delta & -S_3 \\ E & E' & E'' & \varepsilon & S_4 \end{vmatrix} = 0$$

qui est bien de la forme (2). On voit, d'après cela, quelles sont les valeurs des coefficients qui entrent dans la relation (2). C'est cette relation qui va nous servir à démontrer les propriétés que nous avons en vue.

Il existe, comme il est connu, une infinité de droites s'appuyant en trois points sur la courbe; cela résulte de ce qu'il y a une infinité de systèmes de valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que le point λ_4 qui est dans le même plan que les points $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ soit indéterminé. Ces valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont celles qui satisfont aux deux équations

$$\begin{aligned} (3) \quad & a\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + b(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + c(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + d = 0 \\ & b\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + c(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + d(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + f = 0 \end{aligned}$$

Une de ces valeurs, λ_3 par exemple, étant choisi arbitrairement, les deux autres sont déterminées par les équations (3) ou par l'équation du second degré en λ

$$(4) \quad \lambda^2(p\lambda_3^2 + q\lambda_3 + r) + \lambda(q\lambda_3^2 + s\lambda_3 + t) + r\lambda_3^2 + t\lambda_3 + u = 0$$

équation dans laquelle

$$\begin{aligned} p &= b^2 - ac, & q &= bc - ad, & r &= c^2 - bd \\ s &= c^2 - af, & t &= cd - bf, & u &= d^2 - cf \end{aligned}$$

Ainsi, par chaque point λ_3 de la courbe, il passe une droite s'appuyant en deux autres points λ_1 et λ_2 sur la courbe. Si la courbe possède un point double dans l'espace, ces deux valeurs λ_1 et λ_2 du paramètre qui donnent les deux points de la courbe en ligne droite avec un point quelconque λ_3 devront être les mêmes quel que soit λ_3 , puisque ces valeurs sont évidemment les deux valeurs du paramètre correspondant au point double. Pour que la courbe ait un point double il faut donc que les deux racines de l'équation (4) soient indépendantes de λ_3 , c'est à dire que l'on ait

$$\frac{q}{p} = \frac{s}{q} = \frac{t}{r}$$

$$\frac{r}{p} = \frac{t}{q} = \frac{u}{r}$$

Ces conditions nécessaires sont suffisantes pour que la courbe ait un point double. Dans ce cas l'hyperboloïde que forment en général les droites s'appuyant en trois points sur la courbe se réduit à un cône du second ordre ayant son sommet au point double.

Il y a sur la courbe quatre points où le plan osculateur est stationnaire c'est à dire coupe la courbe en quatre points confondus. Les valeurs du paramètre correspondant à ces quatre points sont données par l'équation

$$(5) \quad a\lambda^4 + 4b\lambda^3 + 6c\lambda^2 + 4d\lambda + f = 0$$

obtenue en faisant dans la relation (2)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$$

Mais laissons de côté ces considérations générales pour arriver à l'objet de ce mémoire qui est l'étude des courbes gauches unicursales du quatrième ordre dont les tangentes font partie d'un complexe de droites du premier ordre. Et d'abord cherchons quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les tangentes de la courbe représentée par les équations générales (1) fassent partie d'un com-

plexe linéaire. J'ai montré dans un article précédent (Tome LX. page 274.) que pour toutes les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire le déterminant

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}$$

est un carré parfait; d'où il résulte que pour une pareille courbe, l'équation qui donne les points où le plan osculateur est stationnaire n'a que des racines doubles. Ainsi, dans le cas actuel, il faut que l'équation (5) n'ait que des racines doubles, ce qui exige que l'on ait

$$(6) \quad 3c - \frac{2b^2}{a} = \frac{bf}{d} = \frac{ad}{b}$$

Ces conditions nécessaires sont suffisantes comme il résultera de l'étude des propriétés des courbes pour lesquelles elles sont satisfaites. Si les relations (6) ont lieu, les quatre points de la courbe où le plan osculateur est stationnaire sont confondus deux à deux; les deux points I et I', avec lesquels ces quatre points viennent se confondre deux à deux, sont des points simples en chacun desquels la tangente a trois points confondus communs avec la courbe. Soient λ' et λ'' les deux valeurs du paramètre correspondant à ces deux points I et I', c'est à dire les deux racines doubles de l'équation (5); si l'on substitue au paramètre λ le paramètre μ lié à λ par la relation

$$(7) \quad \lambda = \frac{\lambda'\mu - \lambda''}{\mu - 1}$$

les expressions (1) deviendront des expressions rationnelles du quatrième degré en μ , et les deux racines doubles de l'équation du quatrième degré en μ correspondant à l'équation (5) seront $\mu = 0$, $\mu = \infty$. De sorte que par l'effet de cette substitution l'équation (5) se réduit à

$$\mu^2 = 0$$

c'est à dire que les nouvelles valeurs des coefficients a, b, d, f sont nulles, et que la relation fondamentale (2) entre les valeurs du paramètre correspondant à quatre points dans un même plan se réduit à

$$(8) \quad \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4 = 0$$

d'où il résulte que le terme en μ^2 manque dans les expressions de x, y, z en fonction de μ ; ces expressions seront donc de la forme

$$x = \frac{A_1\mu^4 + B_1\mu^3 + D_1\mu + E_1}{\alpha_1\mu^4 + \beta_1\mu^3 + \delta_1\mu + \epsilon_1}$$

$$(9) \quad y = \frac{A_1' \mu^4 + B_1' \mu^3 + D_1' \mu + E_1'}{\alpha_1 \mu^4 + \beta_1 \mu^3 + \delta_1 \mu + \varepsilon_1}$$

$$z = \frac{A_1'' \mu^4 + B_1'' \mu^3 + D_1'' \mu + E_1''}{\alpha_1 \mu^4 + \beta_1 \mu^3 + \delta_1 \mu + \varepsilon_1}$$

Telle est donc la forme sous laquelle on peut mettre les équations de toute courbe unicursale du quatrième ordre pour laquelle la relations (6) sont satisfaites.

Je vais maintenant entreprendre une étude directe de la courbe représentée par les équations (9). En chassant les dénominateurs dans les équations (9) nous obtenons trois équations que nous pouvons considérer comme des équations du premier degré aux inconnues μ^4 , μ^3 , μ . En résolvant ces équations par rapport à ces inconnues nous aurons

$$\frac{X}{\mu^4} = \frac{Y}{\mu^3} = \frac{Z}{\mu} = \frac{T}{1}$$

X , Y , Z , T étant trois fonctions linéaires des coordonnées x , y , z . Nous savons déjà que les valeurs du paramètre μ correspondant à quatre points situés dans un même plan vérifient la relation (8). Supposons maintenant que l'on veuille d'un point μ de la courbe mener des plans osculateurs à la courbe, soit μ' le paramètre d'un des points de contact; pour avoir la relation qui lie μ et μ' , il faut faire dans la relation (8) $\mu_1 = \mu$,

$$\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu'$$

ce qui donne

$$\mu'(\mu + \mu') = 0$$

Cette équation en μ' possède deux racines indépendantes de μ , à savoir

$$\mu' = 0, \quad \mu' = \infty$$

racines qui correspondent aux plans menés par le point μ et les tangentes à la courbe aux points I et I' : il était évident a priori que l'on trouverait ces deux plans attendu que la tangente en l'un des points I ou I' a trois points confondus communs avec la courbe. Ces deux solutions, qui ne correspondent pas à de véritables plans osculateurs, étant écartées, il n'en reste plus qu'une donnée par la relation

$$(9) \quad \mu + \mu' = 0$$

Ainsi d'un point μ on ne peut mener qu'un plan osculateur à la courbe et le paramètre μ' du point de contact de ce plan est lié à μ par la relation (9). Comme cette relation est symétrique en μ et μ' , on voit que, réciproquement, le plan osculateur qu'on peut mener

du point μ' à la courbe a son point de contact au point μ . La relation $\mu + \mu' = 0$ exprime que les quatre points μ, μ', I, I' sont dans un même plan.

Supposons maintenant que l'on ait sur la courbe quatre points $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ vérifiant la relation (8), et cherchons l'équation du plan des quatre points. Soit

$$lX + mY + nZ + pT = 0$$

cette équation; les valeurs $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ sont les racines de l'équation

$$l\mu^4 + m\mu^3 + n\mu + p = 0$$

on a donc

$$S_1 = -\frac{m}{l}, \quad S_3 = -\frac{n}{l}, \quad S_4 = \frac{p}{l}$$

et l'équation du plan des quatre points est

$$(10) \quad X - S_1Y - S_3Z + S_4T = 0$$

Cette équation (10) nous donne, comme cas particulier, l'équation du plan osculateur au point de paramètre μ' . Soit μ le point où le plan osculateur en μ' coupe la courbe, on a

$$\mu + \mu' = 0$$

Les paramètres correspondant aux quatre points d'intersection du plan osculateur avec la courbe sont donc

$$\mu_1 = -\mu', \quad \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu'$$

et l'équation de ce plan est, d'après (10)

$$(11) \quad X - 2\mu'Y + 2\mu'^3Z - \mu'^4T = 0$$

Soient X', Y', Z', T' les coordonnées d'un point de l'espace, les valeurs du paramètre correspondant aux points de contact des plans osculateurs menés de ce point à la courbe sont les racines de l'équation du quatrième degré

$$(12) \quad X' - 2\mu'Y' + 2\mu'^3Z' - \mu'^4T' = 0$$

Donc, d'un point de l'espace on peut mener quatre plans osculateurs à la courbe; comme le terme en μ'^2 manque dans l'équation (12), les quatre points de contact de ces quatre plans sont dans un même plan. Cherchons l'équation de ce plan. Soient S_1', S_3', S_4' la somme des racines de l'équation (12), la somme de leurs produits trois à trois, leur produit; l'équation cherchée sera d'après (10)

$$X - S_1'Y - S_3'Z + S_4'T = 0$$

c'est à dire

$$(13) \quad XT' - TX' + 2(ZY' - YZ') = 0$$

car

$$S_1' = \frac{2Z'}{T'}, \quad S_2' = -\frac{2Y'}{T'}, \quad S_3' = -\frac{X'}{T'}$$

Où voit d'après l'équation (13) que le plan P des quatre points de contact des plans osculateurs menés d'un point M à la courbe passe par ce point M ; en effet l'équation (13) est vérifiée par

$$X = X', \quad Y = Y', \quad Z = Z', \quad T = T'$$

On voit de plus que le plan (13) n'est autre que le plan polaire du point (X', Y', Z', T') dans un certain complexe linéaire. L'équation (13) dans laquelle on remplacerait X, Y, Z, T et X', Y', Z', T' par leurs expressions linéaires en fonction des coordonnées cartésiennes x, y, z, x', y', z' donnerait l'équation de ce complexe sous la forme sous laquelle Plücker a donné l'équation générale des complexes linéaires.

Il est ainsi démontré que, si les conditions (6) sont remplies, les tangentes à la courbe du quatrième ordre font partie d'un complexe linéaire, et l'on a le moyen de trouver l'équation de ce complexe.

Voyons maintenant ce que sont par rapport à la courbe les plans ayant par équations

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad T = 0$$

Le plan $X = 0$ coupe la courbe en quatre points confondus avec le point I ($\mu = 0$); le plan $T = 0$ coupe la courbe en quatre points confondus avec le point I' ($\mu = \infty$). Le plan $Y = 0$ coupe la courbe en trois points confondus avec I et au point I' ; il est déterminé par la tangente en I et le point I' ; de même le plan $Z = 0$ est déterminé par la tangente en I' et le point I . Les équations de la tangente en I sont

$$X = 0, \quad Y = 0$$

celles de la tangente en I'

$$Z = 0, \quad T = 0$$

On voit, que, comme nous l'avons dit, la tangente en I a trois points confondus communs avec la courbe, en remarquant qu'un plan quelconque

$$X + kY = 0$$

passant par cette tangente coupe la courbe en trois points confondus avec le point I ; on verrait de même que la tangente en I' a trois points confondus communs avec la courbe.

Pour terminer je me borne à énoncer la propriété suivante qui se déduit facilement des théorèmes précédents :

Si l'on prend la perspective sur un plan de la courbe du quatrième ordre, le point de vue étant un point de la droite $I I'$, on obtient une courbe plane unicursale du quatrième ordre dans laquelle les six points d'inflexion coïncident deux à deux avec les trois points doubles ; d'un point de cette courbe plane on peut mener quatre tangentes à la courbe ; les quatre points de contact de ces tangentes sont en ligne droite ; lorsque le point d'où l'on mène les tangentes décrit la courbe, la droite des points de contact enveloppe une conique conjuguée par rapport au triangle des points doubles et inscrite dans l'hexagone des tangentes d'inflexion.

La lemniscate est un cas particulier de ces courbes planes du quatrième ordre.

X.

Sur les fractions continues périodiques.

Par

P. Appell.

Etant donnée la fraction continue périodique

$$u_1 + \frac{1}{u_2 + \frac{1}{u_3 + \dots + \frac{1}{u_p + \frac{1}{u_1} + \dots}}}$$

je me propose de chercher l'expression de la valeur de la $n^{\text{ième}}$ réduite en fonction de n et des quantités u_1, u_2, \dots, u_p . Soient P_n et Q_n le numérateur et le dénominateur de cette réduite, on a

$$\begin{aligned} P_n &= u_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n &= u_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{aligned} \quad (1)$$

avec

$$u_{n+p} = u_n \quad (2)$$

Les deux équations (1) montrent que P_n et Q_n sont des intégrales particulières de l'équation aux différences finies

$$X_n = u_n X_{n-1} + X_{n-2} \quad (3)$$

dans laquelle u_n satisfait à la relation (2); de sorte que la résolution du problème proposé revient à l'intégration de cette équation.

Avant d'aborder le cas le plus général, considérons quelques cas particuliers. Le cas de $p = 1$ n'offre aucune difficulté; u_p est alors une constante u_1 , et l'intégrale générale de l'équation

$$X_n = u_1 X_{n-1} + X_{n-2}$$

s'obtient d'après une théorie connue en posant

$$X_n = Aa^n + Bb^n$$

a et b étant les racines de l'équation du second degré

$$x^2 - u_1x - 1 = 0$$

et A, B des constantes arbitraires. Pour avoir P_n , il faut déterminer les constantes arbitraires de façon que $X_0 = 1$, $X_1 = u_1$ et pour avoir Q_n il faut déterminer ces constantes de façon que $X_0 = 0$, $X_1 = 1$. On sait en effet que dans la suite des réduites on a $P_1 = u_1$, $Q_1 = 1$ et que l'on peut poser $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$. Ayant ainsi les expressions de P_n et Q_n on aura l'expression de la valeur de la $n^{\text{ième}}$ réduite $\frac{P_n}{Q_n}$.

Soit maintenant $p = 2$. Alors

$$u_{n+2} = u_n$$

et par conséquent

$$u_{2m} = u_2, \quad u_{2m+1} = u_1$$

On a donc d'après l'équation (3)

$$X_{2m} = u_2 X_{2m-1} + X_{2m-2}$$

$$X_{2m-1} = u_1 X_{2m-2} + X_{2m-3}$$

$$X_{2m-2} = u_2 X_{2m-3} + X_{2m-4}$$

Si entre ces trois équations nous éliminons les X à indices impairs X_{2m-1} et X_{2m-3} nous obtenons la relation

$$(4) \quad X_{2m} - (2 + u_1 u_2) X_{2m-2} + X_{2m-4} = 0$$

qui lie trois X à indices pairs consécutifs. La même relation a lieu entre trois X à indices impairs consécutifs; en effet les équations qu'il faudrait considérer pour obtenir cette relation se déduisent des équations qui ont servi à former la relation (4) par le changement de $2m$ en $2m+1$ et la permutation de u_1 et u_2 ; il suffira donc pour avoir la relation entre X_{2m+1} , X_{2m-1} , X_{2m-3} , de faire les mêmes changements dans la relation (4), ce qui donne la même relation puisque le coefficient $(2 + u_1 u_2)$ ne change pas quand on permute u_1 et u_2 ; on a donc

$$(4') \quad X_{2m+1} - (2 + u_1 u_2) X_{2m-1} + X_{2m-3} = 0$$

Les relations (4) et (4') montrent que l'on a, n étant un entier quelconque,

$$X_{n+2} - (2 + u_1 u_2) X_n + X_{n-2} = 0$$

d'où l'on conclut que l'expression générale de X_n est, d'après la théorie des suites récurrentes donnée par Lagrange,

$$(5) \quad X_n = [A_1 + A_2(-1)^n]a^n + [B_1 + B_2(-1)^n]b^n$$

a et b étant les racines carrées arithmétiques des deux racines de l'équation du second degré

$$(6) \quad x^2 - (2 + u_1 u_2)x + 1 = 0$$

et A_1, A_2, B_1, B_2 étant des constantes arbitraires. De cette expression de X_n on déduira celles de P_n et Q_n par la détermination des constantes arbitraires. Pour obtenir par exemple Q_n , il faudra déterminer les quatre constantes par les équations

$$\begin{aligned} X_0 &= Q_0 = 0 \\ X_1 &= Q_1 = 1 \\ X_2 &= Q_2 = u_2 \\ X_3 &= Q_3 = 1 + u_1 u_2 \end{aligned}$$

c'est à dire

$$(7) \quad \begin{aligned} A_1 + A_2 + B_1 + B_2 &= Q_0 \\ (A_1 - A_2)a + (B_1 - B_2)b &= Q_1 \\ (A_1 + A_2)a^2 + (B_1 + B_2)b^2 &= Q_2 \\ (A_1 - A_2)a^3 + (B_1 - B_2)b^3 &= Q_3 \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$(8) \quad \begin{aligned} A_1 + A_2 &= \frac{b^3 Q_0 - Q_2}{b^3 - a^3} \\ A_1 - A_2 &= \frac{b^3 Q_1 - Q_3}{a(b^3 - a^3)} \\ B_1 + B_2 &= \frac{a^3 Q_0 - Q_2}{a^3 - b^3} \\ B_1 - B_2 &= \frac{a^3 Q_1 - Q_3}{b(a^3 - b^3)} \end{aligned}$$

Si dans l'expression (5) on remplace A_1, A_2, B_1, B_2 par ces valeurs ainsi déterminées on aura Q_n .

Pour avoir P_n il faudra dans cette même expression donner aux constantes d'autres valeurs A_1', A_2', B_1', B_2' déterminées par les équations que l'on déduit des équations (8) en changeant Q en P , à savoir

$$(9) \quad \begin{aligned} A_1' + A_2' &= \frac{b^3 P_0 - P_2}{b^3 - a^3} \\ A_1' - A_2' &= \frac{b^3 P_1 - P_3}{a(b^3 - a^3)} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Mais il est essentiel de remarquer que, lorsqu'on aura déterminé A_1, A_2, B_1 et B_2 par les équations (8), il sera inutile de résoudre les équations (9) par rapport aux A' et aux B' . L'on a en effet

$$(10) \quad \frac{A_1'}{A_1} = \frac{A_2'}{A_2} = \frac{P_2 - b^2}{Q_2}$$

$$(11) \quad \frac{B_1'}{B_1} = \frac{B_2'}{B_2} = \frac{P_2 - a^2}{Q_2}$$

Pour démontrer la relation (10), par exemple, il suffit de faire voir que

$$\frac{A_1' + A_2'}{A_1 + A_2} = \frac{A_1' - A_2'}{A_1 - A_2} = \frac{P_2 - b^2}{Q_2}$$

c'est à dire d'après (8) et (9)

$$\frac{b^2 P_0 - P_2}{b^2 Q_0 - Q_2} = \frac{b^2 P_1 - P_3}{b^2 Q_1 - Q_3} = \frac{P_2 - b^2}{Q_2}$$

Or le premier et le dernier de ces rapports sont égaux parce que $P_0 = 1, Q_0 = 0$; et en égalant le second rapport au dernier, on obtient une équation qui, en vertu des relations

$$\begin{aligned} P_1 Q_2 - Q_1 P_2 &= -1 \\ P_2 Q_3 - Q_2 P_3 &= 1 \\ Q_1 &= 1, \quad Q_3 = 1 + u_1 u_2, \end{aligned}$$

se réduit à

$$b^4 - (2 + u_1 u_2) b^2 + 1 = 0$$

ce qui est une identité d'après la définition de b comme la racine carrée d'une des racines de l'équation (6).

L'expression générale de $\frac{P_n}{Q_n}$ est donc:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{[A_1 + A_2(-1)^n] a^n (P_2 - b^2) + [B_1 + B_2(-1)^n] b^n (P_2 - a^2)}{[A_1 + A_2(-1)^n] a^n Q_2 + [B_1 + B_2(-1)^n] b^n Q_2}$$

A_1, A_2, B_1, B_2 étant les valeurs des constantes déterminées par les équations (8).

Après avoir ainsi traité en détail le cas de $p = 2$, il me suffira d'indiquer les résultats pour le cas général, les raisonnements étant exactement les mêmes que dans ce cas particulier.

Dans le cas général on a entre les trois quantités X_{n+p}, X_n, X_{n-p} la relation

$$(12) \quad X_{n+p} - (P_p + Q_{p-1}) X_n + (-1)^p X_{n-p} = 0$$

dans laquelle le coefficient de X_n , $P_p + Q_{p-1}$, est une fonction de u_1, u_2, \dots, u_p qui ne change pas quand on permute circulairement ces quantités. Par conséquent à l'on désigne par a et b les racines $p^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation du second degré

$$(13) \quad x^2 - (P_p + Q_{p-1})x + (-1)^p = 0$$

et par

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$$

les racines de l'équation binôme $\alpha^p = 1$, l'expression générale de X_n sera

$$X_n = (A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + \dots + A_p \alpha_p^n) a^n \\ + (B_1 \alpha_1^n + B_2 \alpha_2^n + \dots + B_p \alpha_p^n) b^n$$

d'où l'on déduira les expressions de P_n et Q_n par la détermination des constantes arbitraires $A_1, A_2, \dots, A_p, B_1, B_2, \dots, B_p$.

Pour avoir Q_n , il faudra déterminer ces $2p$ constantes par les équations

$$X_0 = Q_0 \\ X_1 = Q_1 \\ \dots \dots \dots \\ X_{2p-1} = Q_{2p-1}$$

qui peuvent se ramener aux suivantes analogues aux équations (8)

$$(14) \quad A_1 \alpha_1^k + A_2 \alpha_2^k + \dots + A_p \alpha_p^k = \frac{b^p Q_k - Q_{k+p}}{a^k (b^p - a^p)} \\ B_1 \alpha_1^k + B_2 \alpha_2^k + \dots + B_p \alpha_p^k = \frac{a^p Q_k - Q_{k+p}}{b^k (a^p - b^p)}$$

où k désigne un nombre entier qui prend successivement les valeurs $0, 1, 2, \dots, (p-1)$.

Pour avoir P_n , il faut attribuer aux constantes des valeurs A_1', A_2', \dots etc., B_1', B_2', \dots etc. satisfaisant aux équations

$$X_0 = P_0 \\ X_1 = P_1 \\ \dots \dots \dots \\ X_{2p-1} = P_{2p-1}$$

Mais on a , comme dans le cas de $p = 2$,

$$\frac{A_1'}{A_1} = \frac{A_2'}{A_2} = \dots = \frac{A_p'}{A_p} = \frac{P_p - b^p}{Q_p} \\ \frac{B_1'}{B_1} = \frac{B_2'}{B_2} = \dots = \frac{B_p'}{B_p} = \frac{P_p - a^p}{Q_p}$$

et par conséquent l'expression générale de $\frac{P_n}{Q_n}$ est

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{(A_1\alpha_1^n + \dots + A_p\alpha_p^n)a^n(P_p - b^p) + (B_1\alpha_1^n + \dots + B_p\alpha_p^n)b^n(P_p - a^p)}{(A_1\alpha_1^n + \dots + A_p\alpha_p^n)a^nQ_p + (B_1\alpha_1^n + \dots + B_p\alpha_p^n)b^nQ_p}$$

$A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_p$ étant les valeurs des constantes déterminées par les équations (14).

Supposons que a désigne la plus grande des deux quantités a et b ; lorsque n croît indéfiniment le rapport $\frac{P_n}{Q_n}$ tend vers la limite

$$\frac{P_p - b^p}{Q_p}$$

ou

$$\frac{P_p - x}{Q_p}$$

x étant la plus petite racine de l'équation (13). Si l'on pose $z = \frac{P_p - x}{Q_p}$ on verra aisément que z est la racine positive de l'équation

$$z^2 Q_p + (Q_{p-1} - P_p)z - P_{p-1} = 0$$

ce qui s'accorde avec le résultat connu.

XI.

Ueber den Weg,
den ein Punkt aus einem Medium in das
angrenzende in der kürzesten Zeit durchläuft.

Von

Herrn **Carl Bartl**,

Assistent an der k. k. technischen Hochschule in Graz.

Das zu behandelnde Problem besteht im Folgendem: Ein beliebiger Punkt des Mediums M bewege sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit v bis zur Grenzfläche des anliegenden Mediums M_1 und von da mit einer andern constanten Geschwindigkeit v' zu einem bestimmten Punkt dieses Mediums. Welcher Art ist der so beschriebene Weg, wenn der Punkt in der möglichst kürzesten Zeit von seiner Position in die letzte gelangen soll.

Nach dieser Auseinandersetzung gehört das Problem zu denen der Maxima und Minima einer Function von mehreren Veränderlichen. Es bietet in seinem Resultate einen so interessanten Vergleich mit einem bekannten physikalischen Gesetze und ebenso schöne Schlussfolgerungen bei Specialisirung der Anfangsbedingungen, dass es sich immerhin der Mühe einer allgemeinen Behandlung lohnen dürfte.

Lösung.

Die anstossenden Medien M und M_1 sollen sich in der allgemeinen Fläche F begrenzen. Bezogen auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem habe diese Fläche die Gleichung:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Im Medium M wählen wir den beliebigen Punkt P mit den Coordinaten (m, n, p) ; desgleichen sei in M_1 der Punkt $P'(m', n', p')$ gegeben. In einem und demselben Medium kann bei constanter Geschwindigkeit der Weg nur ein geradliniger sein, wenn er in einem Minimum von Zeit zurückgelegt wird. Von P nach P' aber muss derselbe eine gebrochene Linie werden, etwa der Weg PBP' wobei Punkt B der Grenzfläche F der Medien angehört und der Brechungspunkt genannt werden soll. Die Lage des Brechungspunktes auf der Grenzfläche, d. h. dessen Coordinaten (x, y, z) sind nach der Bedingung zu bestimmen, dass PBP' jene gebrochene Linie sei, in der ein Punkt von P nach P' in der kürzesten Zeit gelangt.

Heisse T die Zeit zum durchlaufen eines gebrochenen Weges PBP' , so ist dieselbe eine Function der Coordinaten (x, y, z) eines unbestimmten Punktes B der Grenzfläche. Diese Function T ist auf ihr Minimum zu untersuchen und darnach (x, y, z) zu bestimmen.

T setzt sich zusammen aus der Zeit t zum Durchlaufen der Strecke $PB = s$ mit der Geschwindigkeit v und jener t' für $BP' = s'$ mit der Geschwindigkeit v' ; es ist also:

$$T = t + t'.$$

Für unsere gleichförmigen Bewegungen wird:

$$s = v \cdot t, \quad s' = v' \cdot t'$$

mithin:

$$T = \frac{s}{v} + \frac{s'}{v'}.$$

Aus der Figur lassen sich die Strecken s und s' leicht durch die Coordinaten der Endpunkte P, B und P' ausdrücken. Es erscheint demnach T als Function der Veränderlichen (x, y, z) in folgender Form:

(1)

$$T = \frac{1}{v} \sqrt{(m-x)^2 + (n-y)^2 + (p-z)^2} + \frac{1}{v'} \sqrt{(x-m')^2 + (y-n')^2 + (z-p')^2}.$$

Da B auch der Fläche F angehören muss, so haben seine Coordinaten die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ zu erfüllen und erscheint also s als abhängig von x und y und demnach auch T nur von diesen letztern unabhängig Veränderlichen bedingt.

Die Untersuchung auf das Minimum erheischt die partiellen Ableitungen von T nach x und y , die dann Null zu setzen sind. Dabei ist nach früher auch z als Abhängige von x und y zu berücksichtigen. Es sind demnach die Hauptbedingungsgleichungen für die Coordinaten:

$$(2) \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-1}{v} \cdot \frac{(m-x)+(p-z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{s} + \frac{1}{v'} \cdot \frac{(x-m')+(z-p') \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{s'} = 0.$$

$$(3) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{-1}{v} \cdot \frac{(n-y)+(p-z) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{s} + \frac{1}{v'} \cdot \frac{(y-n')+(z-p') \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{s'} = 0.$$

Für die aus diesen Gleichungen resultirenden Werte von x und y käme noch die Bedingung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \cdot \partial y} \right)^2 > 0$$

zu erfüllen und zu untersuchen ob für dieselben die zweiten Ableitungen: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ gleichzeitig negativ oder positiv werden.

Da wir $F(x, y, z) = 0$ also auch z bezüglich x und y aufgelöst nicht kennen, so ist es hier unmöglich die Erfüllung obiger Bedingungen zu untersuchen. Diess ist aber auch gar nicht nötig, denn erstere Bedingung verschafft uns nur die Gewissheit, dass ein Maximum oder Minimum stattfinden kann. Davon nun, dass diess hier der Fall ist, überzeugt uns in vorhinein die Art oder Natur der zu behandelnden Aufgabe. Diese sagt uns auch, dass hier nur von einem Minimum die Rede sein kann, wodurch die Untersuchung der zweiten Bedingung, die über Maxima oder Minima entscheidet, hier auch entfällt.

Es bleiben demnach nur unsere zwei Bedingungsgleichungen (2) und (3) so zu verwerten, dass wir eine einfache geometrisch oder analytisch ausdrückbare für die Lage des Punktes B erhalten, denn allgemein auflösbar für x und y sind eben auch diese Gleichungen nicht.

Zum Zwecke der Umformung unserer Gleichungen (2) und (3) führen wir folgende Bezeichnungen ein: Wir nennen die Winkel, welche PB oder s mit den Axen x , y und z einschliessen beziehungsweise

α , β , γ und deren Cosinuse a , b , c

jene von BP' oder s' :

α' , β' , γ' und deren Cosinuse a' , b' , c' .

Führt man also die angezeigten Divisionen in (2) und (3) aus, dann wird:

$$-\frac{1}{v} \cdot \left(a + c \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{1}{v'} \cdot \left(a' + c' \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0$$

$$-\frac{1}{v} \cdot \left(b + c \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{1}{v'} \cdot \left(b' + c' \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0$$

Setzen wir den Quotienten $\left(\frac{1}{v'} : \frac{1}{v} \right) = \frac{v}{v'} = k$ einer Constanten und nehmen die gleichartigen Glieder zusammen, so erhalten wir schliesslich:

$$(4) \quad (a'k - a) + (c'k - c) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$(5) \quad (b'k - b) + (c'k - c) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

in welcher Form wir unsere Bedingungsbedingungen fortan verwenden wollen.

Wir trachten nun diese Bedingungen durch eine geometrisch ausdrückbare zu ersetzen. Zu diesem Behufe führen wir zunächst eine Ebene durch die Wege PB und BP' . Die Gleichung derselben muss, da sie durch den Punkt $B(x, y, z)$ geht, die Form haben:

$$G(\xi - x) + H(\eta - y) + K(\xi - z) = 0$$

oder durch K dividirt und die constanten Coefficienten mit C und D bezeichnet:

$$C(\xi - x) + D(\eta - y) + (\xi - z) = 0.$$

C und D bestimmen sich aus der Bedingung, dass die Gleichungen für die Wege, nämlich jene von

$$PB \text{ oder } s \dots \left\{ \begin{array}{l} \xi - x = \frac{a}{c} (\xi - z) \\ \eta - y = \frac{b}{c} (\xi - z) \end{array} \right.$$

und von

$$BP' \text{ oder } s' \dots \left\{ \begin{array}{l} \xi - x = \frac{a'}{c'} (\xi - z) \\ \eta - y = \frac{b'}{c'} (\xi - z) \end{array} \right.$$

die Gleichung der Ebene erfüllen müssen. Man erhält durch Einsetzen derselben unmittelbar:

$$C \cdot \frac{a}{c} + D \cdot \frac{b}{c} + 1 = 0$$

$$C \cdot \frac{a'}{c'} + D \cdot \frac{b'}{c'} + 1 = 0.$$

Aus diesen folgt durch gegenseitige Elimination:

$$C \cdot \left(\frac{a}{c} \cdot \frac{b'}{c'} - \frac{a'}{c'} \cdot \frac{b}{c} \right) + \left(\frac{b'}{c'} - \frac{b}{c} \right) = 0 \text{ oder } C = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}$$

$$D \cdot \left(\frac{b}{c} \cdot \frac{a'}{c'} - \frac{b'}{c'} \cdot \frac{a}{c} \right) + \left(\frac{a'}{c'} - \frac{a}{c} \right) = 0 \text{ oder } D = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b},$$

welche Werte in die obige allgemeine Form der Ebenengleichung zu setzen kommen und ergeben:

$$(bc' - b'c) \cdot (\xi - x) + (a'c - ac') \cdot (\eta - y) + (ab' - a'b) \cdot (\xi - z) = 0$$

Dies ist die Gleichung der Ebene PBP' .

Errichtet man im Punkte B an die Grenzfläche F die Normale oder das Einfallslot N , so lässt sich leicht zeigen, dass unsere Ebene PBP' dieselbe ebenfalls enthalten muss.

Zu diesem Behufe stellen wir die Gleichungen der Normale N auf; diese sind:

$$N) \quad \begin{cases} \xi - x = -\frac{\partial z}{\partial x} \cdot (\xi - z) \\ \eta - y = -\frac{\partial z}{\partial y} \cdot (\xi - z) \end{cases}$$

Weil der Punkt B in seiner Lage an die Bedingungsgleichungen (4) und (5) gebunden ist, so haben wir aus diesen die Werte für die partiellen Ableitungen von z nach x und y zu entnehmen. Diese sind:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{a'k - a}{c'k - c} \quad \text{und:} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{b'k - b}{c'k - c},$$

welche also die Gleichungen der Normale des bestimmten Punktes B liefern in:

$$N) \quad \begin{cases} \xi - x = \frac{a'k - a}{c'k - c} \cdot (\xi - z) \\ \eta - y = \frac{b'k - b}{c'k - c} \cdot (\xi - z) \end{cases}$$

Diese setzen wir nun in die Gleichung der Ebene PBP' , multipliciren beiderseits mit $(c'k - c)$ und kürzen durch $(\xi - z)$ ab, so folgt:

$$(a'k - a) \cdot (bc' - b'c) + (b'k - b) \cdot (a'c - ac') + (c'k - c) \cdot (ab' - a'b) = 0.$$

Durch ausmultipliciren der angezeigten Producte erhalten wir in der That die identische Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} &+a'kbc'-a'kb'c-abc'+ab'c-ab'kc'-a'bc \\ &-a'kbc'+a'kb'c+abc'-ab'c+ab'kc'+a'bc \end{aligned} \right\} = 0 \quad (I)$$

als Beweis unserer aufgestellten Behauptung.

Wir können demnach als unsere erste, geometrisch ausdrückbare Bedingung sagen:

1) Der gebrochene Weg, den ein Punkt in der kürzesten Zeit von P über B nach P' durchläuft, enthält in seiner Ebene die Normale im Brechungspunkte an die Grenzfläche beider Medien.

Nennen wir die Ebene, welche der Weg $PB = s$ mit der Normalen N bildet, die Einfallsebene und jene von N und dem Wege $BP' = s'$ gebildete die Brechungsebene, dann lässt sich obiges Gesetz kürzer auch so ausdrücken:

Für den in der kürzesten Zeit zurückgelegten Weg eines Punktes müssen Einfalls- und Brechungsebene zusammenfallen.

Indem wir über die Lage der Strecken s und s' eine Bestimmung erlangt, fehlt uns zu deren völliger Fixirung noch eine Bedingung für deren Richtung (z. B. in Bezug auf die Normale N). Diese findet sich durch weitere Ausnützung der Bedingungs-gleichungen (4) und (5) respective der Gleichungen für die Normale N .

Behufs dessen führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \angle PBN &= \angle (N, s) - \varepsilon = \text{Einfallswinkel,} \\ \angle P'BN &= \angle (N, s') = \varrho = \text{Brechungswinkel und} \\ \angle PBF' &= \angle (s, s') = \sigma. \end{aligned}$$

Die Bestimmung dieser Winkel ε und ϱ erfolgt aus den Neigungen von s , s' und N gegen die Coordinatenachsen. Die Cosinuse letzterer haben früher schon eine einfache Bezeichnung erhalten, und jene von N entnimmt man aus seinen Gleichungen.

Sie folgen demnach:

$$\text{für } s \left\{ \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \right. \quad \text{für } s' \left\{ \begin{array}{l} a' \\ b' \\ c' \end{array} \right. \quad \text{für } N \left\{ \begin{array}{l} \frac{a'k-a}{\sqrt{R}} \\ \frac{b'k-b}{\sqrt{R}} \\ \frac{c'k-c}{\sqrt{R}} \end{array} \right.$$

wobei der Kürze halber der Ausdruck

$$\sqrt{(a'k-a)^2 + (b'k-b)^2 + (c'k-c)^2} = \sqrt{R}$$

gesetzt wurde.

Daraus erhalten wir direct:

$$\cos(s, s') = \cos \sigma = aa' + bb' + cc'$$

und weiters

$$\cos(N, s) = \cos \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{R}} [k(aa' + bb' + cc') - (a^2 + b^2 + c^2)] = \frac{1}{\sqrt{R}} (k \cos \sigma - 1)$$

$$\cos(N', s') = \cos \varrho = \frac{1}{\sqrt{R}} [k(a^2 + b^2 + c^2) - (aa' + bb' + cc')] = \frac{1}{\sqrt{R}} (k - \cos \sigma)$$

Durcheinander dividirt ergibt die Bedingung:

$$\frac{\cos \varepsilon}{\cos \varrho} = \frac{k \cos \sigma - 1}{k - \cos \sigma}$$

Aus Fig. 2., die uns den Vorgang der Richtungsänderung des Weges im Raume (Einfall- und Brechungsebene) nun in der Zeichnungsebene versinnlicht, folgt unmittelbar:

$$\sigma = \varepsilon - \varrho.$$

Daher lautet unsere Bedingungs Gleichung für die Richtungen:

$$(5) \quad \frac{\cos \varepsilon}{\cos \varrho} = \frac{k \cos(\varepsilon - \varrho) - 1}{k - \cos(\varepsilon - \varrho)}$$

Diese lässt sich nach Anwendung einiger goniometrischen Formeln wesentlich vereinfachen. Wir entwickeln:

$$\frac{\cos \varepsilon + \cos \varrho}{\cos \varepsilon - \cos \varrho} = \frac{k \cos(\varepsilon - \varrho) - 1 + k - \cos(\varepsilon - \varrho)}{k \cos(\varepsilon - \varrho) - 1 - k + \cos(\varepsilon - \varrho)} = \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1 + \cos(\varepsilon - \varrho)}{1 - \cos(\varepsilon - \varrho)},$$

$$\frac{2 \cos \frac{1}{2}(\varepsilon + \varrho) \cdot \cos \frac{1}{2}(\varepsilon - \varrho)}{-2 \sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \varrho) \cdot \sin \frac{1}{2}(\varepsilon - \varrho)} = \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2}(\varepsilon - \varrho)}{-2 \sin^2 \frac{1}{2}(\varepsilon - \varrho)} \cdot \frac{k-1}{k+1}$$

oder abgekürzt:

$$\frac{k-1}{k+1} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(\varepsilon + \varrho) \cdot \sin \frac{1}{2}(\varepsilon - \varrho)}{2 \sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \varrho) \cdot \cos \frac{1}{2}(\varepsilon - \varrho)} = \frac{\sin \varepsilon - \sin \varrho}{\sin \varepsilon + \sin \varrho} = \frac{\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho} - 1}{\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho} + 1},$$

woraus endlich folgt:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho} = k \quad (II)$$

welche Gleichung die zweite Bedingung für die Richtung der Wege ausspricht:

II) Das Verhältniss des Sinus des Einfallswinkels zu jenem des Brechungswinkels ist für zwei bestimmte Medien stets eine constante Grösse mögen die Anfangs- und Endposition (P und P') des bewegten Punktes was immer für Lage haben.

Die in I) und II) ausgesprochenen Gesetze erfüllen gleichzeitig bestehend vollständig die Bedingungsgleichungen (4) und (6) d. h. bestimmen die Lage und Richtung des vom Punkte in einem Minimum von Zeit zurückgelegten Weges von P nach P' .

Diese Gesetze zusammengefasst, bilden mithin die Lösung des anfangs gestellten Problems.

Folgerungen.

Bedenkt man, dass die beiden Punkte P und P' in beiden Medien völlig beliebig gewählt wurden (ihre speciellen Coordinaten aus der Rechnung hinausfallen), so gelten obige Gesetze also auch für die unendlich fernen Punkte der Medien (wenn man sich dieselben beliebig ausgedehnt vorstellt). Dieses heisst also soviel, dass unsere Gesetze auch Geltung haben für Strahlen, die in beliebiger Richtung im Medium M auf die Trennungsfläche F gelangen und von da ihren Weg im Medium M_1 fortsetzen. Hiermit ist nun die vollständige Uebereinstimmung mit dem bekannten optischen Gesetze der einfachen Strahlenbrechung oder Refraction des Lichtes dargetan, und wurden zu diesem Zwecke schon in vorhinein die dort gebrauchten Ausdrücke in unser Resultat eingeführt. Der Brechungswinkel φ heisst auch Refractionswinkel, die Constante k der Brechungsexponent.

Da die erwähnte Uebereinstimmung in so eclatanter Weise erfolgt, so sind wir auch umgekehrt zu dem Schlusse berechtigt, dass das Licht bei seiner Bewegung und Fortpflanzung in verschiedenen Medien ein Minimum von Zeit gebraucht.

Die weiteren Folgerungen unserer Gesetze sollen demnach, als für die einfache Strahlenbrechung des Lichtes geltend, entwickelt werden.

1) Nach früher ist: $k = \frac{v}{v'} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi}$ d. h. der Brechungsexponent ist gleich dem Quotienten der Geschwindigkeiten des Lichtes in den durchlaufenen Medien.

2) In der Regel wird die Geschwindigkeit des Lichtes in einem dünnern Mittel eine grössere sein, als in einem dichteren. Seien also

D und D' die Dichten zweier Medien M und M_1 in denen die Geschwindigkeiten v und v' herrschen, so wird vermöge unseres Gesetzes

$$\frac{v}{v'} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho} \text{ für:}$$

$D < D' \text{ das } v > v'$ demnach $\sin \varepsilon > \sin \varrho \text{ d. h. } \underline{\varepsilon > \varrho}$	$D > D' \text{ das } v < v'$ demnach $\sin \varepsilon < \sin \varrho \text{ d. h. } \underline{\varepsilon < \varrho}$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Diess wird gewöhnlich so ausgedrückt, dass man sagt: In der Regel bricht sich das Licht von einem dünneren in ein dichteres Mittel übergehend zum Einfallslot, im entgegengesetzten Falle vom Einfallslot.

Dieses Gesetz gilt ausnahmslos für zwei Medien von gleicher Beschaffenheit aber ungleicher Dichte (z. B. den atmosphärischen Luftschichten in verschiedenen Höhen); es verliert jedoch seine unbedingte Geltung für Medien verschiedener Beschaffenheit.

3) Sei k der Brechungsexponent für den Weg aus dem Mittel M in jenes M_1 , so ist der Exponent für die entgegengesetzte Richtung aus M_1 nach M die reciproke Grösse $\frac{1}{k}$. Denn ist für den ersten Fall der Exponent $k = \frac{v}{v'} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho}$, dann ist für den zweiten der Exponent offenbar $\frac{\sin \varepsilon'}{\sin \varrho'} = \frac{v'}{v} = \frac{1}{k}$.

4) Kennt man den Brechungsexponent vom Mittel

M ins Mittel M_1 als k_1

und vom Mittel

M ins Mittel M_2 als k_2 .

dann ist der Exponent von M_1 nach M_2 übergehend durch $\frac{k_2}{k_1}$ ausgedrückt.

Sind nämlich v , v_1 und v_2 die bezüglichen Geschwindigkeiten in obigen Medien, so wird:

$$k_1 = \frac{v}{v'}, \quad k_2 = \frac{v}{v_2}$$

also der von M_1 nach M_2 :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{k_2}{k_1}.$$

5) Tritt ein Lichtstrahl aus einem Mittel M in andere Medien,

die eine Schaar paralleler Schichten bilden (z. B. Glastafeln verschiedener Qualität und Dicke), und aus derselben in ein dem ursprünglichen gleiches Medium M , dann ist bezüglich der Schaar paralleler Schichten der Eintrittsstrahl S_e dem Austrittsstrahl S_a parallel.

Führt man die bekannten Bezeichnungen ein, so ergibt sich unmittelbar aus der Figur 5.:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi_1} = \frac{v}{v'}$$

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v'}{v''}$$

$$\frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_3} = \frac{v''}{v'''} \quad \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi} = \frac{v'''}{v}$$

$$\frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi} = \frac{v'''}{v}$$

und durch Multiplication dieser Gleichungen folgt endlich:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi} = 1 \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon = \varphi$$

das ist soviel als $S_a \parallel S_e$. Der Parallelismus der Schichten ist durch die Bedingung hineingelegt worden, dass der Brechungswinkel für eine Schichte zum Einfallswinkel für die darauffolgende Schichte genommen wurde.

6) Wenn ein Lichtstrahl aus einem Medium M in ein ihm gleiches übertritt, so erfolgt offenbar keine Brechung, denn wegen $v = v'$ folgt

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi} = 1 \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon = \varphi.$$

Der Strahl kann aber auch gezwungen werden, nachdem er F getroffen hat, in demselben Mittel zu verbleiben. Diess erfolgt dann, wenn F eine undurchdringliche, total spiegelnde Fläche ist. Es ist für diese Art Brechung auch

$$v = v'$$

also

$$\sin \varepsilon = \sin \varphi_1 = \sin(180 - \varphi_1)$$

daher

$$\varepsilon = \varphi_1.$$

Die Brechung geht in die totale Reflexion über und es ist dabei der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel, das bekannte Reflexionsgesetz des Lichtes. Es erfolgt also auch bei der Reflexion die Fort-

pflanzung des Lichtes in der kürzesten Zeit (natürlich unter der Bedingung, dass F als spiegelnde Fläche getroffen werden muss). Die Reflexion ist eine Brechung des Lichtstrahles in einem und demselben Medium. Auch hier hat man das erste Gesetz zu erfüllen: Einfallswinkel und Reflexionsebene müssen zusammenfallen.

7) Wird bei der einfachen Strahlenbrechung der Refraktionswinkel 90° , so ist der diesen bedingende Einfallswinkel ein Grenzwert insoferne, als für grössere Werte desselben keine Refraction erfolgen kann, sondern dieselbe in die totale Reflexion übergeht.

Ist $\varphi_0 = 90^\circ$, dann ist $\sin \varphi_0 = 1$

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi} = \frac{\sin \varepsilon_0}{\sin \varphi_0} = \sin \varepsilon_0 = k \text{ dem Brechungsexponenten.}$$

Geht ε_0 in ε_1 über und ist

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_0$$

so ist auch:

$$\sin \varepsilon_1 > \sin \varepsilon_0$$

also:

$$\sin \varepsilon_1 > k.$$

Wäre φ_1 der dem ε_1 entsprechende Refraktionswinkel, dann müsste

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varphi_1} = k$$

sein, also

$$\sin \varphi_1 = \frac{\sin \varepsilon_1}{k}$$

d. h. es müsste mit Rücksicht auf die frühere Bedingung

$$\sin \varphi_1 > 1$$

sein. Einen solchen Winkel φ_1 gibt es aber nicht, oder mit andern Worten: für einen Einfallswinkel grösser als ε_0 erfolgt keine Brechung in das zweite Medium, sondern kann nur eine Reflexion im ersten Medium erfolgen; φ' geht in φ über. Für solche Einfallswinkel verhält sich die Grenzfläche F als total spiegelnde Fläche, trotzdem sie für Lichtstrahlen im Allgemeinen nicht undurchdringlich ist.

Wir haben also für diesen Fall wie in Nr. 6):

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varphi_1'} = 1 \text{ d. h. } \varepsilon_1 = \varphi_1'.$$

8) Man nennt in der Physik den Ausdruck $k^2 - 1$ die brechende Kraft des Mittels M_1 , wenn k den Brechungsexponent vom Medium M

in jenes M_1 bedeutet und für verschiedene M_1 das M constant beibehalten bleibt. Durch die Geschwindigkeiten ausgedrückt, folgt:

$$k^2 - 1 = \frac{v^2}{v'^2} - 1.$$

Daraus ersieht man, dass für grössere v' bei constantem v der Ausdruck $k^2 - 1$ kleiner wird und umgekehrt. Da nun im Allgemeinen einem dünneren Mittel eine grössere Durchgangsgeschwindigkeit entspricht und umgekehrt dem dichteren eine kleinere, so wird auch in der Regel dem dünneren Medium eine geringere brechende Kraft zukommen als dem dichteren. Diess gilt ausnahmslos für Medien von gleicher Beschaffenheit und verschiedener Dichte (z..B. Gase unter verschiedenem Drucke ausgesetzt).

9) Ist k die bekannte Grösse für die Medien M und M_1 und D' die Dichte vom letzteren, dann heisst der Ausdruck $\frac{k^2 - 1}{D'}$ das Brechungsvermögen des Mediums M_1 in Bezug auf das constant beibehaltene M .

Das Brechungsvermögen ist nach empirischen Ermittlungen eine constante Grösse, wenn M unverändert bleiben, M_1 aber nur in seiner Dichte D_1 eine Aenderung erleiden soll.

Diess gibt uns ein Mittel an die Hand eine Beziehung zwischen der Dichte eines Mittels und der Geschwindigkeit des durchgehenden Lichtstrahles desselben aufzustellen.

Bedeutet:

v die Geschwindigkeit des Lichtes im luftleeren Raumo (Aether),

v' jene im Mittel M_1 ,

D' die Dichte des Mittels M_1 ,

V das Brechungsvermögen von M_1 in Bezug auf den luftleeren Raum,

so wird:

$$\frac{\frac{v^2}{v'^2} - 1}{D'} = V$$

und daraus:

$$v' = \frac{v}{\sqrt{D' \cdot V + 1}}.$$

Sind v , D' und V bekannt, so lässt sich aus Letzterem die Geschwindigkeit v' im Medium M_1 rechnen.

Aendert M_1 seine Dichte in D'' , so bleibt, wie oben erwähnt, das

Brechungsvermögen doch constant und man hat [für v'' als neue Geschwindigkeit] in

$$\frac{\frac{v^2}{v'^2} - 1}{D'} = \frac{\frac{v^2}{v''^2} - 1}{D''}$$

oder in

$$\frac{D''}{D'} = \frac{v'^2}{v''^2} \cdot \frac{v^2 - v''^2}{v^2 - v'^2}$$

eine Beziehung zwischen den Dichten und den entsprechenden Durchgangsgeschwindigkeiten des Lichtes für ein bestimmtes Medium.

Damit seien die Folgerungen des Brechungsgesetzes des Lichtes abgeschlossen. Dieselben wurden, trotzdem sie allbekannt sind, nur in Rücksicht, dass sie sich teilweise durch die gefundene Bedeutung des Brechungsexponenten (als Quotient der Geschwindigkeiten) besonders einfach ergeben — hier durchgeführt.

Schlussbemerkung.

Die im Vorstehenden gelieferte Untersuchung „Ueber den in der kürzesten Zeit zurückgelegten Weg etc.“ kann auch so behandelt werden, dass man von vorne herein hypothetisch für die Fortpflanzung des Lichtes jene Bedingung zu Grunde legt und nun in der Folge zu den bekannten Gesetzen gelangt. In einer solchen Form erschiene das behandelte Problem als Ableitung der Brechungsgesetze des Lichtes. Da aber jene Gesetze bekanntlich empirisch gefundene sind, so erschien mir der eingeschlagene Weg der natürlichere zu sein. Indem ich mir das einfache mechanische Problem stelle, und zu bekannten Gesetzen gelange, erkenne ich auf Grund dieser eclatanten Uebereinstimmung die Ursache für die Brechung des Lichtes bei seiner Bewegung durch verschiedene Medien in der Bedingung, dass die Fortpflanzung in einem Minimum der Zeit erfolge.

So ist jede Hypothese ausgeschlossen und ein Einblick in die Motive der einfachen Strahlenbrechung gefunden.

Graz am 25. October 1877.

Carl Bartl.

XII.

Beitrag zum Interpolationsproblem.

Von

Carl Bartl.

Die Aufgabe der Interpolation für eine Reihe gegebener Werte einer in ihrer Form unbekannten Function und ihrer entsprechenden Argumente besteht bekanntlich darin für beliebige zwischenliegende Werte dieser Argumente aus dem Gegebenen die zugehörigen Functionswerte auszumitteln. Stellt man die gegebenen Werte, Argumente und Functionen als Abscissen und Ordinaten von Punkten durch ein rechtwinkeliges Axensystem bildlich dar, so drückt sich unsere Aufgabe auch so aus, dass man sagt: Es sind für solche zwischen den gegebenen Abscissen liegenden Werte die zugehörigen Ordinaten jener Punkte zu bestimmen, welche in Bezug auf die aufgestellte Punktenfolge entsprechend eingeschaltet erscheinen.

Dieses Problem gehört in seiner allgemeinen Form offenbar zu den unbestimmten, unendlich viele Lösungen zulassenden. Diess geht auch aus der zweiten Auffassung direct hervor, indem sich durch jene dargestellte Punktenfolge beliebig viele Curven legen lassen, die für ein zwischen liegendes Argument (Abscisse) ebensoviele Functionswerte (Ordinaten von Curvenpunkten) liefern.

Sehr häufig wird nun in concreten Fällen jene Unbestimmtheit durch Bedingungen gehoben, die mit der Aufgabe mitgegeben erscheinen oder sich aus deren Natur ableiten lassen, so dass man von einer, für die praktischen Verhältnisse genügenden Lösung allerdings sprechen kann.

Bilden z. B. die gegebenen Argumente eine arithmetische Reihe erster Ordnung, d. h. schreiten die Werte in gleichen Intervallen vorwärts, so bietet häufig schon dieser Umstand allein jene Bestimmung, durch welche sich das Problem einer rechnenden Behandlung unterziehen lässt. Bekanntlich gilt für eine Reihe solcher Functionswerte, deren Argumente in gleichen Intervallen aufeinanderfolgen die Newton'sche Interpolationsmethode. Sie löst die Aufgabe durch Anwendung der independenten Form des allgemeinen Gliedes einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung. Das Resultat besteht demnach in einer Gleichung für den Functionswert in der Form eines Polynoms geordnet nach den steigenden Potenzen der Argumentswerte; es liefert also eine Formel für die unbekannte Function, die für die gegebenen und zwischenliegenden Werte der Argumente ihre volle Geltung hat.

Folgen jedoch die gegebenen Argumente in ungleichen Intervallen aufeinander, so muss man behufs Präcisirung des Problems die Mittel aus dem Wesen der speciellen Aufgabe abzuleiten suchen. Wie diess geschehen kann, soll später gezeigt werden.

Die gewöhnliche Lösungsmethode dieses Falles ist bekanntlich jene von Lagrange. Bei dieser ist durch die Gleichung, welche die unbekannte Function durch ihr Argument ausdrückt, zugleich jene einer Curve gegeben, welche durch die aus den gegebenen Werten dargestellte Punktenfolge gelegt erscheint. Für jede Zwischenabszisse ist darnach die Ordinate, d. i. der fragliche Einschaltungswert leicht zu berechnen. Die Erfüllung obiger Bedingung sowohl, als auch jener, den Functionswert als Polynom geordnet nach den steigenden Potenzen der Argumentswerte ausgedrückt zu erhalten, bildeten die Grundlage zum Aufbau der Lagrange'schen Interpolationsformel. Es ist also durch Anwendung derselben nicht möglich, ausser den besprochenen Grundbedingungen etwa noch andere nicht unwesentliche, welche sich aus der Natur der Aufgabe ergeben — in der Lösung mitzubetrachten. Noch ein Umstand zeigt sich bei Lösung von Aufgaben nach dieser Methode.

Es wird nämlich in den allermeisten concreten Fällen jene unbekannte Function, von der wir specielle Werte gegeben haben, durch einen sehr einfach verlaufenden Curvenast, der häufig auch nur einerlei Krümmung (entweder blos convexe oder blos concave) gegen die Abscissenaxe aufweist — darzustellen sein. Je mehr Functionswerte gegeben sind, desto bestimmter und sicherer kann diess geschehen, wie uns ein Blick auf die durch die gegebenen Werte verzeichneten Punktenfolge lehrt. Die Anwendung der Lagrange'schen Formel liefert aber dann eine Curvengleichung von einem um so höheren Grade,

denn sind $(n+1)$ Functionswerte gegeben, so ist die Gleichung vom n ten Grade daher mit steigendem $(n+1)$ wachsend.

Dieser Umstand hat häufig zur Folge, dass die so erhaltene Curve zwischen den gegebenen Werten derart ausschreitet, dass sie Einschaltungswerte liefert, welche in dem einfachen, ungezwungenen Verlauf der Function (der sich eben durch die meist einfach gestaltende Punktenfolge kund gibt) wahrscheinlich nicht enthalten sein sollen.

Je höher der Grad einer Curve wird, eine desto vielgestaltigere Form wird dieselbe meist erlangen. Man erhält oft Maximal- und Minimalpunkte, Inflexionspunkte u. dgl., die nach der Natur der Aufgabe schliessend, zwischen den gegebenen Punkte niemals auftreten können.

Die Lagrange'sche Formel kann also Werte liefern, die als Einschaltung zwischen den gegebenen, unbrauchbar sind. Diess ist aber auch natürlich, indem bei Aufstellung derselben nur die Bedingung berücksichtigt wurde, dass sie überhaupt eine Curve liefere, die durch die gegebenen Punkte geht. Diese erfüllt sie zwar, trägt aber der speciellen Natur der unbekannten Function, (die sich am besten aus der verzeichneten Punktenfolge oder gegebenen Bedingungen ergibt), keine Rechnung.

Um nun der wahrscheinlichsten Interpolationscurve möglichst nahe zu kommen, schlage ich folgendes Verfahren ein:

Nachdem die gegebenen Functionswerte bezogen auf ein rechtwinkeliges Axensystem dargestellt wurden, drücke man auch andere mitgegebene Bedingungen geometrisch aus. Diess wird häufig durch Angabe einer Tangente in einem Punkte (z. B. in anerkannten Maximal- oder Minimalpunkten), durch Feststellung einer Asymptote u. dgl. geschehen können. Hierauf setze man die unbekannte Interpolationscurve unter Berücksichtigung aller Nebenumstände aus Segmenten von Curven 2ter Ordnung derart zusammen, dass selbe, durch sämtliche gegebenen Punkte gehend an ihren Uebergangsstellen gemeinsame Tangenten besitzen. Wir erhalten auf diese Art einen continuirlichen Curvenzug der allen erwähnten Bedingungen am einfachsten entspricht; er dürfte daher auch der sonst völlig unbekannten Interpolationscurve am Nächsten kommen.

Was die Ausführung dieses Verfahrens anbelangt, so ist die graphische Darstellung der erwähnten Curvensegmente aus den gegebenen Bestimmungsstücken und sonstigen Bedingungen entschieden die einfachste. Die Constructionen aus den projectivischen Eigenschaften der

Kegelschnitte hergeleitet, können hier mit Vorteil angewendet werden. Sie lösen ja bekanntlich die Aufgabe aus fünf Bestimmungsstücken eines Kegelschnittes beliebig viele Punkte und Tangenten desselben zu construiren. Hat man also den erwähnten Curvenzug dargestellt, so entnimmt man daraus sehr einfach und mit derselben Genauigkeit wie die gegebenen Functionswerte aufgetragen wurden, beliebig viele Einschaltungswerte. Man kann daher auch für eine Reihe von Argumenten, die in gleichen Intervallen vorwärtsschreiten, ihre zugehörigen Functionswerte daraus entnehmen. Dadurch ist die — weitere Interpolation auf die erstere mit in constanten Intervallen abstehenden Argumenten — zurückgeführt. Werden die Intervalle entsprechend klein genug gewählt, dann kann man in der That durch Anwendung der Newton'schen Interpolationsmethode Formeln für einzelne Gruppen der unbekannten Functionswerte erhalten. Sollten die gegebenen Functionswerte in ihrer Punktenfolge zeigen, dass die unbekannte Function besondere Punkte z. B. Inflexionspunkte unzweifelhaft enthalten muss, dann behandle man jeden Teil mit einerlei Krümmung für sich nach dem angegebenen Verfahren, wobei die Tangente im Inflexionspunkt als Bestimmungsstück hineinzunehmen ist und die Erfüllung der continuirlichen Krümmungsänderung des Curvenzuges sichert.

Wie schon erwähnt wurde, bildet die Interpolationscurve in den meisten Fällen einen einfach verlaufenden Ast mit einerlei Krümmung, wovon man sich durch Aufstellung concreter Fälle (aus Entnahme von Werten aus Beobachtungstabellen u. dgl.) leicht überzeugen kann.

So unwissenschaftlich und scheinbar willkürlich das eben vorgelegte Interpolationsverfahren für den ersten Moment aussehen mag, so praktisch verwertbare Resultate liefert es in einem gegebenen Falle. Mit Rücksicht auf eine grössere Anzahl gegebener Werte kann eine derartige Lösung nur an Wahrscheinlichkeit gewinnen, während die Umständlichkeit nicht im selben Masse zunimmt.

Die Methode nach Lagrange verliert aber mit wachsender Anzahl der Bestimmungsstücke die Sicherheit einer praktisch verwertbaren Lösung und nimmt an Umständlichkeit der speciellen Berechnung der ziemlich umfangreichen Coefficienten bedeutend zu. Man könnte zwar diese Methode von drei zu drei aufeinander folgenden Functionswerten anwenden, wodurch man gleichfalls den Gesamtcurvenzug aus Segmenten von Curven zweiter Ordnung zusammengesetzt erhält, wobei man jedoch nicht sicher ist, dass jene Curvensegmente continuirlich (d. h. mit gemeinschaftlichen Tangenten an den Uebergangsstellen) aufeinanderfolgen. Es enthält dabei auch die Möglichkeit Bedingungen, die sich aus der Natur der Aufgabe ergeben,

mit in Rechnung zu ziehen — was doch ebenso wesentlich zur möglichst richtigen Lösung gehören soll.

Im Folgenden soll nun an einem Beispiele die Lösung nach der Lagrange'schen Methode und jene nach dem oben vorgetragenen Verfahren vergleichsweise durchgeführt werden. Letztere insbesondere zu dem Zwecke, um zu zeigen, wie man sich in einem concreten Falle nach dieser, nur im Allgemeinen angegebenen Behandlungsart zu benehmen habe. Diess motivirt auch die etwas umständlichere Durchführung des sonst einfachen Falles.

Beispiel.

„Nach der Verordnung des Handelsministeriums vom 13. Aug. 1870 betreffend die bei der Erbauung eiserner Brücken für Eisenbahnen zu beachtenden Sicherheitsrücksichten, hat nach § 2 derselben die zufällige Belastung (P) gleichmässig verteilt per Meter laufenden Geleises zu betragen:

Bei einer Spannweite von $S_1 = 1$ Meter Belastung $P_1 = 20$ Tonnen

„	$S_2 = 2$	„	$P_2 = 15$	„
„	$S_3 = 5$	„	$P_3 = 10$	„
„	$S_4 = 20$	„	$P_4 = 5$	„
„	$S_5 = 30$	„	$P_5 = 4$	„

und bei einer Spannweite von mehr als 30 Meter gleichfalls 4 Tonnen Belastung.

Für dazwischen fallende Tragweiten ist die nötige Interpolation vorzunehmen.“

Hier liegt ein Fall von Interpolation vor, bei welchen die gegebenen Argumentswerte in ungleichen Intervallen aufeinanderfolgen, denn wir haben die per Meter laufenden Geleises zu nehmende Belastung P als Function der Spannweite S anzusehen.

1. Lösung.

Nach der allgemeinen Lösungsmethode von Lagrange folgt für eine beliebige Spannweite S (zwischen den gegebenen Werten) die zu nehmende Belastung P per Meter (d. i. unser fraglicher Functionswert) ausgedrückt durch die Gleichung:

$$P = X_1 \cdot P_1 + X_2 \cdot P_2 + X_3 \cdot P_3 + X_4 \cdot P_4 + X_5 \cdot P_5$$

wobei die Coefficienten X die Spannweiten enthalten und beispielsweise einer derselben die Form hat:

$$X_4 = \frac{(S-S_1) \cdot (S-S_2) \cdot (S-S_3) \cdot (S-S_5)}{(S_4-S_1) \cdot (S_4-S_2) \cdot (S_4-S_3) \cdot (S_4-S_5)}$$

Es ist demnach jedes X im gelösten Zustande als geordnetes Polynom vom 4ten Grade nach S darstellbar. Vollführt man diese Darstellung nach Substituierung aller speciellen Werte von S für sämtliche Coefficienten, die dann mit den entsprechenden gegebenen Werten von P zu multipliciren kommen, und ordnet nach steigenden Potenzen von S , so gelangt man zur schliesslichen Interpolationsformel:

$$P = 27.326 - 8.63372 \cdot S + 1.382809 \cdot S^2 - \\ - 0.07631162 S^3 + 0.001298236 S^4$$

Mit Hilfe derselben für von Meter zu Meter fortschreitenden Spannweiten die zugehörigen Belastungen P gerechnet gibt zusammengestellt folgende Tabelle:

S	P	S	P	S	P	S	P	S	P
1	20.00	7	11.59	13	18.18	19	8.23	25	-9.53
2	15.00	8	13.00	14	17.99	20	5.00	26	-10.40
3	11.91	9	14.50	15	17.11	21	+1.58	27	-9.82
4	10.36	10	15.94	16	15.70	22	-1.90	28	-7.56
5	10.00	11	17.19	17	13.68	23	-4.95	29	-3.04
6	10.48	12	17.88	18	11.17	24	-7.61	30	+4.00

Aus dieser Zusammenstellung entnimmt man auf den ersten Blick, dass die so erhaltenen Einschaltungswerte als Lösung unserer vorliegenden Aufgabe nicht gelten können. Diess geht noch deutlicher aus beigegebener Fig. 1. hervor, in welcher die gegebenen Werte und jene obiger Tabelle graphisch verzeichnet erscheinen; zu dieser Abscisse S ist die zugehörige Ordinate P aufgetragen und die so erhaltenen Punkte sind continuirlich verbunden. Die Interpolationscurve geht zwar durch die gegebenen Werte, schreitet aber zwischen denselben derart aus, dass sie einmal ein Maximum für $S=13$, ein Minimum für $S=26$ und einen Inflexionspunkt für $S=9$ und $S=20$ bildet. Sie schneidet ferner die Abscissenaxe in den Punkten $S=21.5$ und 29.5 und verläuft zwischen diesen unter der Axe mit negativen Functionswerten; alles Eigentümlichkeiten, die der einfach verlaufenden Function gewiss nicht zukommen sollen.

Diess Resultat beweist für diesen Fall zur Genüge meine in der Besprechung dieser Interpolationsmethode gemachte Behauptung, und bedingt tatsächlich eine andere Behandlung der Aufgabe, wenn brauchbare Werte geliefert werden sollen.

2. Lösung.

Die für die praktischen Fälle empfehlenswerteste Behandlung ist die graphische. Darnach sind in entsprechend grossem Massstabe mit möglichster Genauigkeit die gegebenen Argumentswerte als Abscissen, die zugehörigen Functionswerte als Ordinaten auf ein rechtwinkeliges Axensystem aufzutragen Fig. 2. Wir gelangen hierdurch zu den Punkten P_1 bis P_5 . Nun kommen die weiteren Bestimmungen geometrisch auszudrücken. Nach der Natur der Aufgabe ergibt sich, dass die Belastungen P um so grösser werden, je kleiner die Spannweite S angenommen wird, also für eine verschwindende Spannweite eine unmessbar grosse Dimension erlangen muss. Diess sagt soviel, als dass im gegebenen Falle die fragliche Interpolationscurve sich der Axe der P d. i. y -Axe im Unendlichen nähern wird — d. h. die y -Axe Asymptote der Curve sein wird. — Weiters drückt die gegebene Bedingung der Aufgabe, dass nämlich die Belastung P pro laufenden Meter für 30 Meter und mehr Meter Spannweite nur 4 Tonnen betragen soll, nichts anderes aus, als dass die fragliche Interpolationscurve im Punkte P_5 ein Minimum habe, und also die Horizontale t_5 in diesem Punkte als Tangente der Curve zu gelten habe.

Wir sind nun im Stande, einen continuirlichen Curvenzug den Bedingungen der Aufgabe gemäss herzustellen.

Der erste Teil desselben ist ein Hyperbelsegment, bestimmt durch die y -Axe als Asymptote, (d. h. zwei Elemente) und die drei Punkte P_1 , P_2 und P_3 . Darnach sind wir in der Lage, beliebige Punkte dieses Segmentes sammt Tangenten graphisch zu ermitteln.

In der Figur wurden z. B. die Tangenten t_1 , t_2 und t_3 der bezüglichen Punkte P_1 , P_2 , P_3 nach dem Satze von Pascal construirt. Für t_1 , t_2 , t_3 ergaben sich beziehungsweise in $\overline{1,3}$, $\overline{2,3}$ und $\overline{1,2}$ die Pascallinien, welche im Schnitte t_1 , t_2 , t_3 mit der Asymptote (y -Axe) Punkte der Tangenten lieferten. Asymptote und die drei Punkte sammt ihren Tangenten genügen im vorliegenden Falle zur Verzeichnung der Curve, welche selbstverständlich nur bis P_3 zu gelten hat.

In P_3 schliesst sich der zweite Teil an, der also gegeben sein wird durch die Punkte P_3 , P_4 und P_5 mit den Tangenten t_3 und t_5 . Nach demselben Satze, der oben verwendet wurde, bestimmen wir auch hier zunächst die Tangente in P_4 . Für diese hat man in $\overline{4,5}$ die Pascallinie, welche mit $\overline{P_3P_4}$ geschnitten den fraglichen Punkt t_4 der Tangente liefert. Ebenso einfach bestimmt sich ein beliebiger Punkt P des Curvenzuges. Nachdem die Richtung P_3P beliebig durch P_3 gehend gewählt wurde, ergibt sich im Schnitte derselben mit $\overline{P_4P_5}$ ein Punkt 7 und in 6 (Schnitt von t_3 mit t_5) der zweite Punkt

der Pascallinie $\overline{6,7}$. Letztere schneidet $\overline{P_3P_4}$ in 8, welcher Punkt mit P_5 verbunden die beliebig gewählte Richtung im fraglichen Punkte P der Curve schneidet. Aus den Punkten P_3 , P_4 und P_5 , den Tangenten in denselben t_3 , t_4 , t_5 und endlich den Zwischenpunkten P — zu denen man noch zu allem Ueberflusse die Tangenten construiren könnte — lässt sich nun mit ziemlicher Sicherheit auch dieser zweite Curvenzug verzeichnen.

Nachdem auf diese Art mit möglichster Genauigkeit die Interpolationscurve dargestellt wurde, ersieht man auf den ersten Blick, dass dieselbe alle gegebenen Bedingungen erfüllt. Mit ihr ist die Aufgabe graphisch, d. h. für den praktischen Fall genügend gelöst, denn es lässt sich für eine beliebige Spannweite die entsprechende Belastung fast mit derselben Genauigkeit, als die Punkte P_1 bis P_5 aufgetragen wurden, aus der Curve sofort entnehmen. In der Fig. 2. erscheinen die Maasse der Ordinaten für Spannweiten von Meter zu Meter vorwärtsschreitend, durch die entsprechende Cote verzeichnet, welche Werte tabellarisch zusammengestellt werden können.

Wollte man auch Interpolationsformeln für diesen Fall aufstellen, so ist es zweckmässig, diess für einzelne Gruppen von Werten zu tun, um womöglich Formeln nicht höher als vom 2ten Grade bezüglich der Abscisse S zu erhalten.

Man geht von $S = 30$ aus nach rückwärts gegen $S = 1$, weil in dieser Richtung die Functionswerte steigen, wähle als erstes Intervall der Argumente 3 Einheiten (3^m) u. s. fort immer weniger nämlich 2, 1, 0.5 und 0.25 Einheiten als Intervall der einzelnen Wertgruppen. Diess geschieht aus dem Grunde, weil die Functionswerte von $S = 30$ gegen $S = 1$ zu immer rascher und rascher wachsen im Verhältniss zur Aufnahme von S .

Für jede einzelne Gruppe ist Newton's Interpolationsformel für gleiche Intervalle der Argumente anzuwenden.

Sei a der Wert des ersten Argumentes einer Gruppe, h das Intervall der Argumente, seien ferner P_1 , $\Delta_1 P_1$, $\Delta_2 P_1$ beziehungsweise der erste Functions- der erste und zweite Differenzwert, endlich für eine allgemeine Spannweite S das P der fragliche Functionswert, dann ist bekanntlich:

$$P = f(S) = P_1 + \frac{S-a}{h} \cdot \Delta_1 P_1 + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{S-a}{h} \cdot \left(\frac{S-a}{h} - 1 \right) \Delta_2 P_1 + \dots$$

Den Vorgang der speciellen Berechnung und Aufstellung der Formeln zeigt nachstehendes Schema:

S	P	$\triangle_1 P$	$\triangle_2 P$	$\triangle_3 P$	Interpolations-Formeln.
30	4.00	0.13	0.10	0	Für $a = 30, h = -3$ wird:
27	4.18	0.28	0.10	0	$P = 4.00 + \frac{S-30}{-3} \cdot 0.18 + \frac{1}{1.2} \frac{S-30}{-3} \frac{S-27}{-3} \cdot 0.1$ od.:
24	4.46	0.38			$P = 10.3 - 0.376.S + 0.005.S^2$
21	4.84				
23	4.57	0.27	0.05	0	Für $a = 23, h = -2$ wird:
21	4.84	0.32	0.05	0	$P = 4.57 + \frac{S-23}{-2} \cdot 0.27 + \frac{1}{1.2} \frac{S-23}{-2} \frac{S-21}{-2} \cdot 0.05$
19	5.16	0.37	0.05	0	$P = 10.6925 - 0.41S + 0.00625S^2$
17	5.53	0.42			
15	5.95				
15	5.95	0.25	0.02	0	Für $a = 15, h = -1$ wird:
14	6.20	0.27	0.02	0	$P = 5.95 + \frac{S-15}{-1} \cdot 0.25 + \frac{1}{1.2} \frac{S-15}{-1} \frac{S-14}{-1} \cdot 0.02$
13	6.47	0.29	0.02	0	$P = 11.8 - 0.54S + 0.01S^2$
12	6.76	0.31	0.02	0	
11	7.07	0.33	0.02	0	
10	7.40	0.35			
9	7.75				
9	7.75	0.20	0.02	0	Für $a = 9, h = -0.5$ wird:
8.5	7.95	0.22	0.02	0	$P = 7.75 + \frac{S-9}{-0.5} \cdot 0.2 + \frac{1}{1.2} \frac{S-9}{-0.5} \frac{S-8.5}{-0.5} \cdot 0.02$
8	8.17	0.24	0.02	0	$P = 14.41 - 1.1S + 0.04S^2$
7.5	8.41	0.26			
7	8.67				
7	8.67	0.13	0.01	0	Für $a = 7, h = -0.25$ wird:
6.75	8.80	0.14	0.01	0	$P = 8.67 + \frac{S-7}{-0.25} \cdot 0.13 + \frac{1}{1.2} \frac{S-7}{-0.25} \frac{S-6.75}{-0.25} \cdot 0.01$
6.5	8.94	0.15	0.01	0	$P = 16.09 - 1.62S + 0.08S^2$
6.25	9.09	0.16	0.01	0	
6	9.25	0.17	0.01	0	
5.75	9.42	0.18	0.01	0	
5.5	9.60	0.193	0.013	0.003	
5.25	9.793	0.207	0.014	0.001	
5	10.00				

Würde sich aus der Natur der Aufgabe ergeben, dass die Interpolationscurve einen Wendepunkt der Krümmung bekommen muss, so ist bezüglich Anwendung der Newton'schen Formel zu berücksichtigen, dass selbe nur für Curvenzüge von einerlei Krümmung geltend auch für jeden einzelnen Teil mit gleicher Krümmung separat zur Benutzung zu kommen hat. Die gewählten Gruppen von Functions-
werten haben sich also nur innerhalb jener Teile des Curvenzuges zu erstrecken, welche durch die vorkommenden Inflexionspunkte begrenzt erscheinen.

Bemerkung.

So gut man den fraglichen Interpolationscurvenzug durch graphische Construction unter Berücksichtigung gegebener Bedingungen aus Segmenten von Curven 2ter Ordnung so zusammen setzen kann, dass sie continuirlich ineinander verlaufen, so lässt sich diess auch analytisch durchführen. Man stelle die allgemeine Form der Gleichung 2ten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen, so wie jene für die erste Ableitung von y nach x auf. Diese Gleichungen enthalten 5 Constante, welche für jedes Curvensegment separat zu berechnen kommen. Man hat hiefür 5 Gleichungen, indem im Allgemeinen 5 Bestimmungsstücke (Punkte oder Tangenten) obige Gleichungen erfüllen müssen. Dass die Berechnung dieser Constanten im Allgemeinen und selbst im Besonderen eine ziemlich umständliche wird, lässt sich leicht denken. Würde man sich für alle möglichen Combinationen von gegebenen Bestimmungsstücken (Punkte und Tangenten) der Mühe der Ausrechnung jener Constanten dennoch unterziehen, so erhielte man doch so umfangreiche Ausdrücke, dass ihre Benutzung für specielle Werte nicht praktisch genannt werden kann. Ausserdem käme noch die erhaltene Curvengleichung nach y aufzulösen, wodurch die Form derselben häufig nur noch complicirter wird.

Es wurde dieser Umständlichkeit halber von einer derartigen analytischen Behandlung des Problems in unserem Beispiele Umgang genommen, und ist in den meisten Fällen die graphische Lösung als wirklich praktisch zu empfehlen.

Nur um auf die Möglichkeit einer durchaus analytischen Behandlung des Problems hinzuweisen, ist obige Bemerkung gemacht worden.

Graz am 25. October 1877.

XIII.

Miscellen.

1.

Bemerkung über den Torsionshalbmesser von Raumcurven.

Durch eine sehr einfache Betrachtung ist es möglich, den Quotienten aus Bogenelement und Torsionswinkel in irgend einem Punkt einer Raumcurve, dessen Grenzwert den Torsionshalbmesser in diesem Punkt liefert, geometrisch so umzuformen, dass man den analytischen Ausdruck dafür ohne Weiteres angeben kann. Ehe wir dies zeigen, müssen wir vorausschicken die Formeln für den Inhalt eines unendlich kleinen Dreiecks und eines unendlich kleinen Tetraeders, ausgedrückt durch die Coordinaten der (unendlich nahen) Eckpunkte. Wenn nämlich A, B, C drei unendlich wenig entfernte Punkte mit den auf ein beliebiges rechtwinkliges System bezogenen Coordinaten

$$x, y, z; \quad x+dx, y+dy, z+dz; \quad x+2dx+d^2x, y+2dy+d^2y, \\ z+2dz+d^2z$$

sind, so ist der doppelte Inhalt \mathcal{A} des Dreiecks ABC bekanntlich dargestellt durch

$$\mathcal{A}^2 = (1, y+dy, z+2dz+d^2z)^2 + (x, 1, z+2dz+d^2z)^2 + (x, y+dy, 1)^2,$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y+dy & y+2dy+d^2y \\ z & z+dz & z+2dz+d^2z \end{vmatrix} = (1, y+dy, z+2dz+d^2z)$$

u. s. w. gesetzt wurde.

Obige Determinanten werden durch geeignete Subtraction der Verticalreihen von einander sehr vereinfacht; es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y+dy & y+2dy+d^2y \\ z & z+dz & z+2dz+d^2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & dy & d^2y \\ z & dz & d^2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dy & d^2y \\ dz & d^2z \end{vmatrix} = (dy \, d^2z)$$

Auf dieselbe Weise reduciren sich die beiden anderen Determinanten auf $(dz \, d^2x)$ und $(dx \, d^2y)$

Daher wird

$$1) \quad \Delta^2 = (dy \, d^2z)^2 + (dz \, d^2x)^2 + (dx \, d^2y)^2.$$

Kommt zu den 3 Punkten noch ein vierter D mit den Coordinaten

$$x+3dx+2d^2x+d^3x, \quad \dots \quad z+3dz+2d^2z+d^3z$$

hinzu, so besteht, wenn v der 6fache Inhalt des Tetraeders $ABCD$ ist, die Gleichung

$$v = \begin{vmatrix} x & x+dx & x+2dx+d^2x & x+3dx+2d^2x+d^3x \\ y & y+dy & y+2dy+d^2y & y+3dy+2d^2y+d^3y \\ z & z+dz & z+2dz+d^2z & z+3dz+2d^2z+d^3z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & dx & d^2x & d^3x \\ y & dy & d^2y & d^3y \\ z & dz & d^2z & d^3z \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} dx & d^2x & d^3x \\ dy & d^2y & d^3y \\ dz & d^2z & d^3z \end{vmatrix}$$

oder mit Anwendung derselben Abkürzung wie oben

$$2) \quad v = (dx \, d^2y \, d^3z)$$

Wenn nun $A(x, y, z)$ ein beliebiger Punkt einer etwa durch die Gleichungen

$$x = \varphi(A), \quad y = \psi(A), \quad z = \chi(A)$$

gegebenen Raumcurve ist, so nehme man auf der Curve noch 3 benachbarte Punkte B, C, D an. Der 6fache Inhalt des Tetraeders $ABCD$ heisse wieder v , Δ_1 und Δ_2 seien die doppelten Inhalte der Dreiecke ABC und ABD und endlich nenne man ds das Bogenelement AB und ω den Torsionswinkel, welcher gleich dem an der Kante AB liegenden Flächenwinkel des Tetraeders $ABCD$ ist. Für den Torsionshalbmesser P im Punkt A hat man alsdann

$$P = \lim \frac{ds}{\omega} = \lim \frac{ds}{\sin \omega}$$

$\frac{ds}{\sin \omega}$ lässt sich aber leicht durch v , Δ_1 und Δ_2 ausdrücken. Denn

wenn etwa H und h die von C ausgehenden Höhen des Tetraeders $ABCD$ und des Dreiecks ABC bezeichnen, so ist

$$ds = \frac{\Delta_1}{h}, \quad \sin \omega = \frac{H}{h} = \frac{v}{\Delta_2 h},$$

daher

$$\frac{ds}{\sin \omega} = \frac{\Delta_1 \Delta_2}{v}.$$

Beim Zusammenfallen der vier Punkte A, B, C, D in den einen Punkt A wird

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$$

und demzufolge

$$P = \lim \frac{ds}{\sin \omega} = \lim \frac{\Delta^2}{v}.$$

Mit Hilfe von 1) und 2) ergibt sich folglich unmittelbar

$$P = \frac{(dy d^2 x)^2 + (dx d^2 x)^2 + (dx d^2 y)^2}{(dx d^2 y d^2 x)}.$$

R. Mehmke, stud. math.

2

Zwei Sätze von den Flächen zweiten Grades.

1. Wenn eine beliebige Fläche zweiten Grades und auf derselben irgend eine Krümmungslinie gegeben ist und man zieht von einem beliebigen, aber festen Punkt im Raum aus 2 Parallelen, die eine zur Normalen, die andere zur Tangente in irgend welchem Punkt der Krümmungslinie, und nennt s_1 und s_2 , t_1 und t_2 die von der Fläche auf diesen Parallelen abgeschnittenen Stücke (vom festen Punkt aus gerechnet), so ist für ein und dieselbe Krümmungslinie

$$\frac{1}{s_1 s_2} + \frac{1}{t_1 t_2} = \text{const.}$$

2. Zieht man durch den festen Punkt Parallelen zu den conjugirten Tangenten der Krümmungslinie, so erfüllen diese einen Kegel zweiten Grades, welcher mit der gegebenen Fläche die Kreisschnittebenen gemein hat und sie nach einer Curve schneidet, durch welche sich eine Kugel hindurch legen lässt. Der Mittelpunkt dieser Kugel liegt auf dem Lote, dass man vom festen Punkte auf seine Polarebene (in Bez. auf die gegeb. Fläche) fallen kann. Indem man nach und nach andere Krümmungslinien annimmt, erhält man ein System von Kugeln von besonderer Eigenschaft. Alle Kugeln des

Systems schneiden nämlich eine und dieselbe Kugel senkrecht. Die letztere geht durch den festen Punkt, berührt dessen Polarebene und hat die Entfernung des Punkts von seiner Polarebene zum Durchmesser. Man kann dies auch so aussprechen: Alle Kugeln des Systems haben einen gemeinschaftlichen imaginären Schnittkreis, dessen Ebene in der Mitte zwischen dem festen Punkt und seiner Polarebene liegt und letzterer parallel ist; sämtliche Polarebenen des festen Punkts in Bezug auf die Kugeln des Systems fallen zusammen mit der Polarebene desselben Punkts in Bezug auf die gegebene Fläche.

R. Mehmke.

3.

Minimum-Aufgabe.

Die Ellipse von kleinstem Flächeninhalt zu finden, welche einen gegebenen Brennpunkt hat und durch 2 gegebene Punkte geht.

Der Brennpunkt F sei Anfang der Polarcoordinaten $r\varphi$. Die Anfangsrichtung $\varphi = 0$ halbire den Winkel $AFB = 2\beta$, den die Radienvectoren $FA = c$, $FB = c \operatorname{tg}^2 \alpha$ der gegebenen Punkte A , B bilden, so dass die Polarcoordinaten

$$\begin{aligned} \text{von } A \text{ werden } r &= c, \varphi = \beta \\ \text{,, } B \text{ ,, } r &= c \operatorname{tg}^2 \alpha, \varphi = -\beta \end{aligned}$$

und zwar steht es uns frei α und β zwischen 0 und R anzunehmen. Ferner sei a die grosse, $a \cos \mu$ die kleine Halbaxe, also $a \sin \mu$ die Excentricität, $p = a \cos^2 \mu$ der Parameter der Ellipse. Hieraus ergibt sich der Flächeninhalt

$$E = 2R a \cdot a \cos \mu = \frac{2R p^2}{\cos^3 \mu} \quad (1)$$

Die Polargleichung der Ellipse

$$r = \frac{p}{1 + \sin \mu \cos(\varphi - \vartheta)}$$

wo $\varphi = \vartheta$ die Richtung der grossen Axe bezeichnet, angewandt auf A und B giebt:

$$\begin{aligned} \frac{p}{c} &= 1 + \sin \mu \cos(\vartheta - \beta) \\ &= \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin \mu \cos(\vartheta + \beta) \end{aligned}$$

Diese 2 Relationen bestimmen p und μ als Functionen von ϑ , nämlich

$$\frac{p}{c} = \frac{2 \sin^2 \alpha \sin \beta \sin \vartheta}{\cos 2\alpha \cos \beta \cos \vartheta + \sin \beta \sin \vartheta}$$

$$\sin \mu = - \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha \cos \beta \cos \vartheta + \sin \beta \sin \vartheta}$$

Mittelst der Substitution

$$\cot \vartheta = \frac{\sin 2\alpha \sin \eta + \cos \beta}{\cos 2\alpha \sin \beta} \quad (2)$$

lässt sich ein sehr einfacher Ausdruck von E in der einzigen Variablen η gewinnen. Denn es wird

$$\cos 2\alpha \cos \beta \cos \vartheta + \sin \beta \sin \vartheta = \sin \vartheta \frac{1 + \sin 2\alpha \cos \beta \sin \eta}{\sin \beta}$$

daher

$$\frac{p}{c} = \frac{2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{1 + \sin 2\alpha \cos \beta \sin \eta} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \vartheta} = \frac{(1 + \sin 2\alpha \cos \beta \sin \eta)^2 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \beta \cos^2 \eta}{\cos^2 2\alpha \sin^2 \beta}$$

$$\sin^2 \mu = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\cos^2 2\alpha \sin^2 \beta}{(1 + \sin 2\alpha \cos \beta \sin \eta)^2}$$

$$= 1 - \frac{\sin^2 2\alpha \sin^2 \beta \cos^2 \eta}{(1 + \sin 2\alpha \cos \beta \sin \eta)^2}$$

das ist:

$$\cos \mu = \frac{\sin 2\alpha \sin \beta \cos \eta}{1 + \sin 2\alpha \cos \beta \sin \eta} \quad (4)$$

Diese Gleichung zeigt die Berechtigung der Substitution (2), sofern das reelle $\cos \mu$ ein reelles $\cos \eta$, also $\sin^2 \eta \leq 1$ fordert. Führt man die Werte (3) (4) in (1) ein, so erhält man:

$$E = R c^2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos^3 \alpha} \frac{1 + \sin 2\alpha \cos \beta \sin \eta}{\cos^3 \eta} \quad (5)$$

oder, abgekürzt:

$$E = N \frac{1 + n \sin \eta}{\cos^3 \eta}$$

wo

$$n = \sin 2\alpha \cos \beta$$

jeden Wert zwischen 0 und 1 haben kann.

Differentiirt man zweimal, so kommt:

$$\frac{\partial E}{\partial \eta} = N \frac{3 \sin \eta + n (2 \sin^2 \eta + 1)}{\cos^4 \eta}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} = 4 \operatorname{tg} \eta \frac{\partial E}{\partial \eta} + N \frac{3 + 4 n \sin \eta}{\cos^2 \eta} \quad (6)$$

Erstere Grösse verschwindet für

$$\sin \eta = \frac{-3 \pm m}{4n}$$

wo

$$m = \sqrt{9 - 8n^2}$$

zwischen 1 und 3 enthalten ist. Hieraus ergibt sich:

$$\sin^2 \eta = \frac{1}{4} \frac{3 \mp m}{3 \pm m} = 1 \mp \frac{1}{2} \frac{m \pm 1}{3 \pm m}$$

< 1 für das obere, > 1 für das untere Zeichen. Demnach hat allein der Wert

$$\sin \eta = \frac{m - 3}{4n}$$

Bedeutung, und dieser ergibt nach (6):

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} = \frac{Nm}{\cos^3 \eta} > 0$$

entspricht daher einem Minimum.

Nach Einsetzung der gefundenen Werte hat man:

$$\cot \vartheta = \frac{m - 3 + 4 \cos^2 \beta}{4 \cos 2\alpha \sin \beta \cos \beta} \quad (7)$$

$$\cos \eta = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{1 + m}{3 + m}}; \quad \sin \eta = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{3 - m}{3 + m}} \quad (8)$$

$$\cos \mu = \operatorname{tg} \beta \sqrt{3 \frac{3 - m}{1 + m}} \quad (9)$$

$$p = \frac{8c \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{1 + m} \quad (10)$$

$$E = \frac{Rc^2}{3\sqrt{6}} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos^2 \alpha} \frac{(3 + m)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 + m}} \quad (11)$$

grosse Halbaxe

$$\frac{p}{\cos^2 \mu} = \frac{8c}{3} \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{3 - m} \quad (12)$$

kleine Halbaxe

$$\frac{p}{\cos \mu} = \frac{8c}{\sqrt{3}} \frac{\sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta}{\sqrt{(1 + m)(3 - m)}} \quad (13)$$

und kann hiernach leicht die Ellipse construiren, indem man zuerst Φ , nach (7) bestimmt, an die Halbierungslinie des Winkels AFB nach FA hin anträgt, dann auf dem erhaltenen Schenkel die Excentricität $\frac{p \sin \mu}{\cos^2 \mu}$ abschneidet; der Endpunkt ist der Mittelpunkt.

R. Hoppe.

4.

Ueber den Neunpunktekreis des Dreiecks.

Hiermit erlaube ich mir, einen wenigstens teilweise neuen Beweis des Satzes zu geben, dass der Neunpunktekreis eines Dreiecks den inbeschriebenen Kreis berührt. Der Beweis ist im Anfange derselbe, als derjenige, welcher in den „Nouvelles annales de mathématiques“ vom Jahre 1865. pag. 220. geliefert ist und zwar in einer kleinen Abhandlung „Note sur la détermination des points de contacts du cercle qui passe par les milieux des trois côtés d'un triangle et des cercles tangents à ces côtés.“

Der Anfang des Beweises in dieser Abhandlung stützt sich wesentlich auf die harmonischen Eigenschaften des Kreises, während das Ende etwas künstlich ähnliche Dreiecke benutzt. Mein Beweis stützt sich nur auf die harmonischen Eigenschaften, wodurch die Rechnungen fast ganz vermieden werden.

Das Dreieck sei ABC (beifolgende Figur), die Mitten der Seiten a, b, c , die Berührungspunkte der Seiten und des inbeschriebenen Kreises a', b', c' ; ferner M der Schnittpunkt von ab und $a'b'$, D der Schnittpunkt von BM und AC , Dd die Tangente von D an den inbeschriebenen Kreis, d der Berührungspunkt. Es soll bewiesen werden, dass der Neunpunktekreis den inbeschriebenen Kreis in d berührt.

1) Man bestimme die Schnittpunkte von Dd mit resp. BC und AB , sie seien E und F . Diese Linie bildet mit den Seiten des Dreiecks ein dem Kreise $a'b'c'$ umschriebenes Vierseit. Dieses vollständige Vierseit besteht aus 3 einfachen Vierseiten (Vierecken), auf welche wir den Satz anwenden können, dass die Diagonalen und die Verbindungslinien der Berührungspunkte der Gegenseiten sich in einem Punkte schneiden. Wir haben nun folgende einfache Vierseite: $ABED$, $FBCD$, $ACEF$. Aus dem ersten Viereck folgt, dass $c'd$ und AE durch den Punkt M gehen. Aus dem zweiten folgt, wenn sich CF und BD in H schneiden, dann gehen $c'b'$ und $a'd$ durch denselben Punkt H . Aus dem dritten folgt, wenn sich AE und CF in G schneiden, so gehen $c'a'$ und $b'd$ auch durch G . — Die 4 Punkte $a'b'c'd$ bilden ein Viereck im angegebenen Kreise,

dessen Diagonalepunkte M, G, H sind, die also ein System harmonischer Pole in Bezug auf den inbeschriebenen Kreis bilden.

2) Die Punkte caG und cbH liegen resp. in gerader Linie. Es ist nämlich $B(G, C, H, F)$ ein harmonisches Strahlenbüschel. CM schneide AB in N , dann wird CN in M halbiert, was leicht eingesehen wird. Die Strahlen BF, BH, BC werden nun in N, M, C von einer Transversale geschnitten, und da diese durch den einen Strahl halbiert wird, so muss der vierte zu dieser Transversale parallel sein, d. h. $BG \parallel CN$. Schneidet also aG die Linie CN in O , so muss $Ga = aO$ sein, da $Ba = aC$ ist. Nun ist das Büschel $C(G, E, M, A)$ ebenfalls harmonisch, also Ga oder aO ist parallel AC , d. h. es ist Ga dieselbe Linie als ac , oder Ga geht durch c .

Ebenso ist $A(G, C, H, F)$ harmonisch, woraus folgt, dass $AH \parallel CN$. Ist nun Q der Schnittpunkt von CM und bH , so folgt $Qb = bH$. Ebenso ist $C(G, E, M, A)$ harmonisch, also $bH \parallel BC$, also cbH in gerader Linie.

3) Es werde nun Dd von ab in S , von cb in R , von ac in P geschnitten; ferner CF von ab in U , AM von cb in W , und BD von ac in V . Zunächst ist $F(A, M, E, G)$ harmonisch, und da $ab \parallel FA$, so muss $MS = SU$ sein. a, M, b, U sind aber harmonische Punkte, weil dieselben auf dem harmonischen Büschel $C(B, M, D, H)$ liegen, also ist

$$SM^2 = Sb.Sa$$

oder, weil $SM = Sd$ ist, weil $Fc' = Fd$, und $UM \parallel Fe'$ ist

$$Sd^2 = Sb.Sa$$

Ebenso ist $D(A, M, E, G)$ harmonisch und $ac \parallel DA$, also $VP = PG$. Es sind aber $cVaG$ vier harmonische Punkte, also

$$PG^2 = Pa.Pc$$

oder da ebenso $PG = Pd$ ist,

$$Pd^2 = Pa.Pc$$

Man wird ebenso beweisen, dass

$$Rd^2 = Rc.Rb$$

Wenn wir nun den Kreis durch abc legen, so haben nach dem eben Gesagten die Punkte P, R, S gleiche Potenzen für beide Kreise, den Neunpunktekreis und den inbeschriebenen Kreis abc , also ist diese Linie PS oder Dd die Chordale beider Kreise. Da diese aber den einen Kreis und zwar in d berührt, so muss sie auch den andern in demselben Punkte berühren, und diese Kreise berühren sich also in d .

W. Fuhrmann,

Oberlehrer an der Realschule auf der Burg
in Königsberg.

5.

Entwicklung von $\log(1+x)$.

Ich füge noch die Entwicklung von $\log(1+x)$ in eine Reihe auf eine neue Weise hinzu, die mir deshalb wohl erwähnenswert zu sein scheint, weil sie ganz ohne den binomischen Lehrsatz gefunden wird.

Es sei

$$\log(1+x) = a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_1^{\infty} a_h x^h$$

also

$$\log(1+y) = a_1y + a_2y^2 + \dots = \sum_1^{\infty} a_h y^h,$$

also

$$\log(1+x) - \log(1+y) = \log \frac{1+x}{1+y} = \sum_1^{\infty} a_h (x^h - y^h)$$

Nun ist

$$\frac{1+x}{1+y} = 1 + \frac{x-y}{1+y}$$

also

$$\log \left(\frac{1+x}{1+y} \right) = \log \left(1 + \frac{x-y}{1+y} \right) = a_1 \frac{x-y}{1+y} + a_2 \left(\frac{x-y}{1+y} \right)^2 + \dots$$

Wir finden also

$$\sum_1^{\infty} a_h (x^h - y^h) = \sum_1^{\infty} a_h \left(\frac{x-y}{1+y} \right)^h$$

oder

$$\sum_1^{\infty} a_h \frac{x^h - y^h}{x-y} = \sum_1^{\infty} a_h \frac{(x-y)^{h-1}}{(1+y)^h}$$

Wir setzen nun $x = y$. Es ist aber

$$\lim \left(\frac{x^h - y^h}{x-y} \right)_{x=y} = h \cdot y^{h-1}$$

also

$$\sum_1^{\infty} h \cdot a_h \cdot y^{h-1} = \frac{a_1}{1+y}$$

da die übrigen Glieder der rechten Seite fortfallen. Es ist aber

$$\frac{a_1}{1+y} = a_1 \sum_0^{\infty} (-1)^h \cdot y^h = a_1 \sum_1^{\infty} (-1)^{h-1} \cdot y^{h-1}$$

Hieraus folgt also

$$h \cdot a_h = (-1)^{h-1} \cdot a_1$$

$$a_h = \frac{(-1)^{h-1} \cdot a_1}{h}$$

Der Coefficient a_1 muss natürlich auf gewöhnliche Weise bestimmt werden.

Königsberg, d. 5. Jan. 1878.

W. Fuhrmann.

6.

Ermittlung des Wertes eines bestimmten Integrales.

Das zu berechnende Integral ist

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} \varphi(u) du \quad (1)$$

für den Fall, in welchem A und B positive Zahlen sind und $\varphi(u)$ eine ganze algebraische Function von u bedeutet.

Führt man in dem obigen Integrale für u eine neue Variable w ein, mittelst der Substitution

$$u = \alpha + (\beta - \alpha)w \quad (2)$$

so erhält man

$$J = (\beta - \alpha)^{A+B-1} (-1)^{B-1} \int_0^1 w^{A-1} (1-w)^{B-1} \varphi[\alpha + (\beta - \alpha)w] dw \quad (3)$$

Setzt man der Kürze halber

$$A + B = s$$

$$\beta - \alpha = \gamma$$

und entwickelt man

$$\varphi(\alpha + \gamma w)$$

mittelst der Maclaurinischen Reihe, so erhält man:

$$J = (-1)^{B-1} \gamma^{s-1} \int_0^1 w^{A-1} (1-w)^{B-1} [\varphi(\alpha) + \gamma w \varphi'(\alpha) + \frac{\gamma^2 w^2}{2!} \varphi''(\alpha) + \frac{\gamma^3 w^3}{3!} \varphi'''(\alpha) + \dots] dw$$

Man kann diesen Ausdruck auch so schreiben:

$$J = (-1)^{B-1} \gamma^{s-1} \left\{ \varphi(\alpha) \int_0^1 w^{A-1} (1-w)^{B-1} dw + \gamma \varphi'(\alpha) \int_0^1 w^A (1-w)^{B-1} dw + \frac{\gamma^2}{2!} \varphi''(\alpha) \int_0^1 w^{A+1} (1-w)^{B-1} dw + \frac{\gamma^3}{3!} \varphi'''(\alpha) \int_0^1 w^{A+2} (1-w)^{B-1} dw + \dots \right\}$$

Nun ist bekanntlich für positive Werte von p und q

$$\int_0^1 w^{p-1} (1-w)^{q-1} dw = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

folglich hat man:

$$J = (-1)^{B-1} \gamma^{s-1} \left\{ \varphi(\alpha) \frac{\Gamma(A)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B)} + \gamma \varphi'(\alpha) \frac{\Gamma(A+1)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B+1)} \right. \\ \left. + \frac{\gamma^2}{2!} \varphi''(\alpha) \frac{\Gamma(A+2)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B+2)} + \frac{\gamma^3}{3!} \varphi'''(\alpha) \frac{\Gamma(A+3)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B+1)} + \dots \right\}$$

Beachtet man nun noch die für ganze und positive Werte von n stattfindende Gleichung

$$\Gamma(p+n) = n(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)\Gamma(p)$$

und setzt man, wie schon früher bemerkt,

$$A+B=s$$

so lässt sich J folgendermassen schreiben:

$$J = (-1)^{B-1} \gamma^{s-1} \frac{\Gamma(A)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B)} \left\{ \varphi(\alpha) + \frac{A}{s} \gamma \varphi'(\alpha) + \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \frac{\gamma^2}{2!} \varphi''(\alpha) + \right. \\ \left. + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} \frac{\gamma^3}{3!} \varphi'''(\alpha) + \dots \right\}$$

Setzt man hierin $\varphi(u) = 1$, so erhält man:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du = (-1)^{B-1} \gamma^{s-1} \frac{\Gamma(A)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B)}$$

folglich ist:

$$J = \left\{ \varphi(\alpha) + \frac{A}{s} \gamma \varphi'(\alpha) + \frac{A(A+1)}{s(s+1)} \frac{\gamma^2}{2!} \varphi''(\alpha) + \right. \\ \left. + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)} \frac{\gamma^3}{3!} \varphi'''(\alpha) + \dots \right\} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du$$

Wien, d. 1. Febr. 1878.

Simon Spitzer.

7.

Berechnung der dritten Seite eines Dreiecks aus zwei gegebenen Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel.

Ist a die unbekannte Seite, so hat man nach dem Cosinussatze

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$$

die allgemein übliche Transformation dieses Ausdruckes für die loga-

rithmische Berechnung hat einige Schwächen, die sich beim Unter-
richte immer wieder fühlbar machen.

Wir schlagen den folgenden, dem Verständnisse besser entgegen-
kommenden Weg vor.

Nach bekannten Eigenschaften des Dreiecks ist

$$a < b + c \quad a > b - c,$$

daher wird $\overline{b+c}$ mit einem echten Bruche multiplicirt, $\overline{b-c}$ dagegen
durch einen solchen dividirt werden müssen, um es dem a gleich zu
machen; wählt man diesen echten Bruch in Form eines Sinus oder
Cosinus, so ergibt sich a in einer der Formen:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad a = (b+c) \sin \varphi & 3) \quad a = \frac{b-c}{\sin \varphi_1} \\ 2) \quad a = (b+c) \cos \psi & 4) \quad a = \frac{b-c}{\cos \psi_1} \end{array}$$

Nach den beiden ersten erscheint a als Kathete eines rechtwinkligen
Dreiecks, worin $\overline{b+c}$ die Hypotenuse und φ der der Kathete gegen-
überliegende, ψ der ihr anliegende Winkel ist; den zwei anderen zu-
folge ist a Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, wo $\overline{b-c}$
Kathete und φ_1 der ihr gegenüberliegende, ψ_1 der anliegende Winkel
ist. Damit ist die geometrische Bedeutung der sogenannten
Hilfswinkel ausgesprochen, zu deren Erläuterung die Figuren 1.
und 2. dienen.

Führt man nun in der oben aufgestellten Gleichung einmal

$$\cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1,$$

dann

$$\cos A = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}$$

ein, so ergibt sich zunächst

$$a = \sqrt{(b+c)^2 - 4bc \cdot \cos^2 \frac{A}{2}}$$

beziehungsweise

$$a = \sqrt{(b-c)^2 + 4bc \cdot \sin^2 \frac{A}{2}}$$

und in weiterer Folge

$$a = (b+c) \sqrt{1 - \frac{4bc \cdot \cos^2 \frac{A}{2}}{(b+c)^2}}$$

$$a = (b-c) \sqrt{1 + \frac{4bc \cdot \sin^2 \frac{A}{2}}{(b-c)^2}}$$

und die Vergleichung mit den Gleichungen 1), 2), 3), 4) ergibt sofort, dass

$$\cos^2 \varphi = \sin^2 \psi = \frac{4bc \cdot \cos^2 \frac{A}{2}}{(b+c)^2}$$

$$\cotg^2 \varphi_1 = \tg^2 \psi_1 = \frac{4bc \cdot \sin^2 \frac{A}{2}}{(b-c)^2}$$

zu setzen ist, welche letzteren Gleichungen zur Berechnung der Hilfswinkel führen.

Prag, December 1877.

E. Czuber.

Litterarischer Bericht

CCXLVI.

Geodäsie.

Die Figur der Erde. Ein Beitrag zur europäischen Gradmessung. Von Dr. Heinrich Bruns, a. o. Professor der Mathematik an der Universität Berlin. Berlin 1878. P. Stankiewicz. 4^o. 49 S.

Es wird der Nachweis geführt, dass keine Hypothese über die Erdoberfläche, weder in geschlossener Form noch in Reihenentwicklung möglich ist, welche den Messungen eine genügende Grundlage bietet, dass aber die vereinigten Messungsmittel, nämlich einerseits astronomische Ortsbestimmungen (Polhöhen, Längen, Azimute), Triangulation (Horizontalwinkel, Grundlinien) und trigonometrisches Nivellement (Messung von Zenithdistanzen), andererseits geometrisches Nivellement verbunden mit Bestimmungen der Intensität der Schwere, ausreichend und zugleich sämtlich notwendig sind, um ohne Hypothese die Gestalt der Erde zu bestimmen. Die Gestalt der Erde wird definirt als das System der Flächen $W = \text{const}$, wo W das Potential der Schwere, d. i. Resultante von Anziehung und Centrifugalkraft, bezeichnet. Eine einzelne dieser Flächen heisst eine Niveaufläche, gemäss Gauss und Bessel. Sie ist mit der Gleichgewichtsfläche (als Oberfläche gedacht) nicht identisch, wird aber deshalb zur Bestimmung gewählt, weil die Resultate der geometrischen Nivellements direct auf sie Bezug haben. Während aber Gauss und Bessel mit Vernachlässigung des Unterschieds eine solche Niveaufläche, welche den Meeresspiegel repräsentirte, als mathematische Figur der Erde betrachteten, lässt der Verfasser diese Identificirung fallen, dehnt den

Gegenstand der Untersuchung auf das System der Niveauflächen zwischen den Grenzen der Messungen und nennt dasselbe ein Geoid. Die Niveauflächen sind in 2. Ordnung unstetig, lassen sich aber in stetige Teile zerlegen. Entwickelt man das Potential der Anziehung nach fallenden Potenzen des Radiusvectors r bis zur (--5)ten, so erhält man nach Vernachlässigung einiger kleinen Grössen, welche die Differenz der 2 kleinsten Hauptträgheitsmomente zum Factor haben, und Hinzufügung des Potentials der Centrifugalkraft, statt des Potentials der Schwere die Function:

$$U = \frac{M}{r} + \frac{MK}{2r^5} (x^2 + y^2 - 2z^2) + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

wo M die Masse, $K = C - \frac{1}{2}(A + B)$, A , B , C die Hauptträgheitsmomente, ω die Rotationsgeschwindigkeit der Erde bezeichnet, und $U = \text{const.}$ drückt ein System von Flächen aus, welches als erste Näherung dem Geoid zu Grunde gelegt werden kann und hier Sphäroid heisst. Die Abweichungen des Geoids vom Sphäroid sind es dann, was allgemein Lotstörungen genannt wird. Es werden nun die Coefficienten M und MK , so wie die Abplattung und die extremen Werte der Schwere theoretisch in Relation gesetzt, und die Erhebungen und Senkungen des Geoids, desgleichen die Lotablenkungen bestimmt. Hierauf werden einzeln die astronomischen und trigonometrischen Messungen, dann das geometrische Nivellement behandelt.

H.

Universal-Nivellir-Instrument als Tacheometer. Von Johann Szczepaniak, Ingenieur. Mit 2 Tafeln. Wien, Pest, Leipzig. 1878. A. Hartleben. 35 S.

Der Verfasser hält die vorhandenen Schriften über Tacheometrie für hinreichend dem Bedürfniss zu genügen, das dazu am meisten geeignet, gleichfalls bereits bekannte Instrument hingegen soll hier zum erstenmal zum Gegenstand besonderer Erörterung gemacht werden. Das Buch besteht aus einem theoretischen und praktischen Teile. In ersterem wird zuerst die Theorie von Stampfer's Elevationsschraube dargelegt. Hierauf folgt die Geschichte der Tacheometrie. Die Theorie des Universal-Nivellir-Instruments erfordert vor allem Erklärung von Reichenbach's Fadenmikrometer. Zur Ausführung der Rechnungen wird der logarithmische Rechenschieber in Anwendung gebracht, auf dessen Einrichtung und Gebrauch die Schrift näher eingeht. Der letzte Gegenstand ist der Transporteur. Der praktische Teil handelt, in Betreff der Feldarbeit, vom allgemeinen Verfahren, von der Operationslinie, Detailcotirung, Feldnotizbuch und Skizzen, in Betreff der

Hausarbeit, von der Berechnung der Feldablesungen, vom Auftragen auf's Papier, Interpolation der Schichten und Ausfertigung der Pläne.

H.

Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln und zu deren Gebrauch beim Schnellrechnen sowie beim Schnellquotiren mit Aneroid und Tachymeter für Ingenieure, Topographen und Alpenfreunde. Von Dr. Ch. August Vogler. Mit sechs Lichtdrucktafeln und vielen in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1877. Ernst u. Korn. 196 S.

Die Verwendung von Diagrammen zum Ausdruck von Functionen, namentlich empirisch ermittelten, von einem oder zwei Argumenten ist bereits eine so mannichfaltige, dass eine Behandlung derselben in grösstmöglicher Vollständigkeit als Bedürfniss erschienen ist. Das vorliegende Buch bringt eine solche zum erstenmal zur Ausführung und giebt im zweiten Abschnitt die Anwendung auf Barometer- und Aneroidmessungen, im dritten auf Tachymetrie. Hauptsächlich sind es die Functionen zweier Argumente, die eine umfangreichere Theorie erfordern. Hier werden zur Darstellung beide Argumente als Coordinaten aufgetragen, und die Isoplethen, d. i. diejenigen Curven, welche die Punkte von gleichem Functionswert verbinden, gezogen. Ein grösseres Feld frei gewählter Anordnung eröffnet sich dadurch, dass man die aufgetragenen Stücke der 2 Axen, welche den Einheiten der Argumente entsprechen, ungleich machen kann. So hat man es in seiner Hand, einestheils die Isoplethen zweckgemäss zu gestalten, andernteils die Argumente zu Functionen neuer Argumente zu machen. Ein besonderer Fall davon ist die logarithmische Teilung. Auf ähnlichem Princip beruht der logarithmische Rechenschieber, dessen Theorie hier gleichfalls dargelegt wird. Da die Isoplethen nur von Einheit zu Einheit des Functionswerts gezogen werden können, so waren noch die Mittel zu erörtern, durch welche das Augenmass in der Abschätzung der Bruchteile unterstützt werden kann. Soviel sich vor der Hand übersehen lässt, entspricht die gegenwärtige Bearbeitung allen Anforderungen in befriedigender Weise.

H.

Mechanik.

Die wichtigsten Sätze der neuern Statik. Ein Versuch elementarer Darstellung von Dr. J. B. Goebel, diplomirtem Ingenieur. Mit einer lithographirten Tafel. Zürich 1877. Meyer u. Zeller. 51 S.

Die hier im Zusammenhang vorgetragene „neuere Statik“ ist eine Transformation des Princip der virtuellen Geschwindigkeiten durch gleichzeitige und gemeinsame Zerlegung der Kräfte und der Verrückungen in Translation und Rotation. Dasselbe Verfahren, nach welchem Poinso mit so viel Glück mechanische Probleme auf überraschende Weise gelöst hat, lässt sich allgemein auf die Principien der Mechanik anwenden, woraus dann eine Theorie entspringt, an deren Gestaltung ausser ihm Möbius, Chasles u. A. mitgewirkt haben. Die Form der Darstellung ist die einfach analytische im vollen Sinne, ausgehend von der allgemeinsten Auffassung, die in keiner Weise durch successives Aufsteigen gewonnen, sondern geradezu vorausgesetzt wird. Nach Angabe des Verfassers werden vorausgesetzt die Elemente der Mechanik, der darstellenden Geometrie und der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes. In der That wird wol Jeder, der hiermit völlig vertraut ist, auch das Gegenwärtige leicht verstehen, aber nur sofern er es in seinen Gedanken bereits umspannt und alles Einzelne unter seine Begriffe zu ordnen weiss. Dass aber ein solcher Standpunkt, wie der Verfasser meint, auf jeder polytechnischen Schule mit Leichtigkeit in den ersten beiden Semestern erreicht werden kann, davon sind die publicirten Hilfsmittel für diese Schulen weit entfernt ein Zeugnis zu geben; es werden höchstens einige besonders begabte Schüler dazu gelangen. Was also der Verfasser damit meint, dass er seine Darstellung eine elementare nennt, ist nicht zu ersehen. Selbst Poinso nimmt zur Hinführung auf den hier geforderten Standpunkt einen synthetischen Anfang. Hier ist zur Anleitung gar nichts geschehen. Soll vielleicht die Bezeichnung sich darauf stützen, dass keine Differential- und Integralrechnung vorkommt, so liegt es in der Natur des Gegenstandes, dass bei Deduction des Princip wie auch bei der Transformation dieselben nicht gebraucht werden; dieser Umstand lässt sich unmöglich der gegenwärtigen Bearbeitung zurechnen. Aus dem Umstande folgt indes nicht, dass zum Verständniss der Differentialbegriff unentbehrlich wäre. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten wird hier das Princip der mechanischen Arbeit genannt. Diese wie die übrigen terminologischen Einführungen der Vorgänger sind in der That recht passend gewählt; nur ändern sie an der Sachlage nichts und können keine sonst mangelnde Einsicht ersetzen. Arbeit ist eine geläufige Vorstellung; zur exacten Auffassung gehört aber der Begriff der Variation, und die Darlegung im concreten Falle, die doch zum Beweise des Verständnisses gefordert werden muss, verlangt die nur scheinbar vermiedene Differentialrechnung, deren Elemente demnach auch zu den notwendigen Vorkenntnissen gerechnet werden müssen. Hiermit fällt auch diese vermutete Rechtfertigung des Attributs „elementar“ weg. Abgesehen von diesem unbegründeten Anspruch ist

das Vorliegende als übersichtliche Zusammenstellung dessen, was der Verfasser bereits fertig vorgefunden hat, worauf wir daher keinen Anlass haben näher einzugehen, eine Arbeit, die gewiss Vielen willkommen sein wird.

H.

O p t i k.

Bestimmung der Interferenzen von mehreren isochronen und in gleicher Phase schwingenden Lichtcentren. Von der philosophischen Facultät zu Jena gekrönte Preisschrift. Von Dr. Alfred Eichhorn. Mit zwei Figurentafeln. Jena 1878. Gustav Fischer. 34 S.

Die Schrift enthält eine Reihe analytischer Entwicklungen, deren Ziel nach den Worten der Einleitung folgendes ist. Es sollen Lichtcentra in bestimmter Anzahl und Gruppierung innerhalb einer Ebene liegen und Schwingungen von gleicher Schwingungsdauer und übereinstimmender Phase von ihnen ausgehen. Das Zusammenwirken dieser Schwingungen soll in einer zweiten, der ersten parallelen Ebene bestimmt werden, deren Abstand von der Ebene der Lichtcentra im Vergleich mit den Abständen der letzteren unter einander sehr gross sei, und zwar unter der Einschränkung, dass die Wirkung nur in solchen Punkten betrachtet werde, deren Verbindungslinie mit sämtlichen Lichtcentren sehr kleine Winkel mit der gemeinsamen Normalen zu beiden Ebenen einschliessen. Die in dieser Formulierung ausgesprochene Aufgabe enthält die Theorie einer Classe von Interferenzphänomenen, die sich experimentell leicht herbeiführen lassen und welche zugleich bei vielen optischen Wirkungen ungesucht auftreten. Es wird dabei an die Herbeiführung durch Stab- und Kreuzgitter gedacht, und besonders die Fälle, welche solchen von 90° und 60° entsprechen, der mathematischen Discussion unterzogen. Die zugrunde gelegte Beobachtungsmethode compensirt die Verschiedenheit der Wellenlängen, so dass das Interferenzbild für alle Farben das nämliche wird, also auch bei Anwendung weissen Lichts keine Farbenerscheinungen eintreten. Der Rechnung gehen 2 Hülfsätze voraus. Dann werden nach einander folgende Fälle untersucht: 2 Lichtcentra, 3 äquidistante linear liegende Lichtcentra, $n+1$ nicht äquidistante Lichtcentra mit ungleichen Intensitäten in einer Geraden liegend, 3 Lichtcentra gleicher Intensität in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, 3 Lichtcentra, ebenso liegend, von denen 2 dieselbe, das dritte eine bedeutend grössere, dann bedeutend kleinere Intensität hat, 6 in den Ecken eines regulären Sechsecks liegende Lichtcentra von gleicher Intensität, 12 Lichtcentra gleicher Intensität in den Ecken zweier regulären Sechsecke, 4 Lichtcentra gleicher Intensität in den

Ecken eines Quadrats, 8 Lichtcentra gleicher Intensität, 3 Lichtcentra gleicher Intensität in den Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks, 4 Lichtcentra derselben Intensität in den Ecken eines Rechtecks.

H.

Das Brachy-Teleskop. Erfunden und construiert von J. Forster und K. Fritsch. Für Freunde der Astronomie, Militärs, Touristen etc. verfasst von K. Fritsch, Optiker und Mechaniker, Wien, VI. Gumpendorferstr. Nr. 31. Mit 5 Holzschnitten und 1 Lichtdrucktafel. Wien 1877. Selbstverlag. 16 S.

Von der Leistung des neuen Instruments, dessen Erfindung für den Zweck bestimmt ist, weniger Bemittelten für das praktische Studium der Astronomie mit Entbehrlichkeit grosser Fernröhre zu dienen und zugleich Transport und Aufstellung ohne jegliche Umstände zu ermöglichen, sagt der Verfasser, dass es so klein und leicht ist, dass es von der Hand eines Kindes getragen werden kann, während ein Mann Mühe hat, ein Instrument gleicher Leistung, aber nach bisherigen Systemen verfertigt, zu tragen. Die Schrift geht zuerst die Reihe der successiven Verbesserungen und Spiegelteleskope bis zum Herschel'schen durch, und beschreibt dann, wiewol sehr ungenügend, das erfundene, welches gleichfalls ein solches und zwar mit zweimaliger Reflexion ist, so dass das Auge den Stern direct vor sich hat. Beide Spiegel sind von versilbertem Glas. Der grössere, auf den der Strahl zuerst auffällt, ist parabolisch geschliffen und befindet sich neben dem Ocularrohr, der zweite, kleinere, ein Planspiegel, in einiger Entfernung vor demselben. Hierauf wird von der Behandlung des Apparats, dann erst im allgemeinen von den Vorzügen der Reflectoren vor den Refractoren gesprochen, dann insbesondere folgende Vorzüge des gegenwärtigen Brachyteleskops genannt. Der grosse Spiegel ist nicht durchbrochen, daher das Bild eine grosse Lichtstärke und Schärfe besitzt. Der kleine Spiegel steht nicht mitten im Strahlengange des grossen, welcher Umstand ebenfalls zur Vermehrung der Helligkeit und Präcision des Bildes beiträgt. Das Instrument ist viel kürzer als ein Newton'sches. Der Gegenstand ist vor dem Beobachter, nicht links von ihm oder gar hinter ihm, was für die Orientirung angenehmer ist. Im Anhang empfiehlt der Verfasser ein Spectrometer mit Doppelaxen-System, welches in Lichtdruck abgebildet ist.

H.

Astronomie.

Die Entstehung des Sonnensystems. Nach der Laplace'schen Hypothese, in verschiedenen neuen Richtungen ausgeführt. Eine mathematische Abhandlung. Von Ferdinand Herz, Oberst und Commandeur des Grossherzoglich Hessischen Gendarmerie-Corps. Zweite, gänzlich neu bearbeitete Auflage. Darmstadt, 1877. H. L. Schlapp. 381 S.

Die Bahnen der Kometen und die Monde des Mars. Ein Nachtrag zur „Entstehung des Sonnensystems“. Von Ferdinand Herz, Oberst und Commandeur des Grossherzoglich Hessischen Gendarmerie-Corps. Darmstadt, 1878. H. L. Schlapp. 68 S.

Das Sonnensystem, bestehend aus Sonne, Planeten und Trabanten, mit Ausschluss also der Kometen und anderer sein Raumgebiet kreuzender Meteore, wird in der erstern Schrift isolirt von der übrigen Welt betrachtet. Der Umstand, dass alle dazu gehörigen Körper Umlauf und Rotation in gleichem Sinne, geringe Neigung der Bahnen und geringe Excentricitäten haben, sowie die Regelmässigkeit in der Scala der Abstände, fordert zur Erklärung seiner Entstehung aus gemeinsamer Ursache auf. Hierzu hat Laplace einen Weg angegeben, und die gegenwärtige Schrift macht es sich zur Aufgabe, denselben im einzelnen zu verfolgen. So umfassende Unternehmungen haben zufolge der zahlreichen Erscheinungen im Gebiete der kosmischen Fragen, welche aus Unkenntniss und Selbstüberschätzung hervorgehen, nicht darauf zu rechnen einer guten Meinung zu begegnen. Um so mehr ist es anzuerkennen und hervorzuheben, dass das vorliegende Buch nicht zu dieser Classe gehört. Es zeugt von ungewöhnlicher Ruhe und Besonnenheit, von zwar nicht tiefer, doch vielseitiger Kenntniss der einschlagenden Arbeiten, einer wirklich zu eigen gemachten Kenntniss mit der Fähigkeit sie zur Prüfung richtig zu gebrauchen; ohne den Ehrgeiz weitgreifender Schlüsse bleibt die Darstellung immer auf das Nächstliegende bedacht. Dennoch ist eine Schwäche in der Auffassung der Principien der Mechanik sehr wol merklich, deren Einfluss weit grösser sein würde, wenn die Behandlung der Fragen mehr auf quantitative Bestimmung eingegangen wäre. Der Verfasser hat es sich nicht zur Klarheit gebracht, dass Centrifugalkraft keine Kraft, sondern eine für Bewegung substituirte Rechnungsgrösse ist. Nicht einmal von der Wirkung der Kraft auf Veränderung der Bewegung findet man eine klare Vorstellung. Erst wird die Ruhe als Anfangszustand vorausgesetzt, wobei nur die unnötige Beschränkung auf diesen Fall auffällt; dann aber wird die Voraussetzung vergessen und aus der blossen vorgefundenen Bewegung auf die Kraft als deren Entstehungsgrund geschlossen. Der Titel „mathematische Abhandlung“

ist ganz unzutreffend; mathematische Untersuchung, wozu natürlich reproducirte Rechnung und entlehnte Resultate nicht gehören, kommt in so geringem Masse vor, dass damit der Inhalt in keiner Weise charakterisirt sein kann. Solche mitgetheilte Rechnungen von Laplace u. A. stehen hier ganz isolirt, als sollten damit bloss etwaige Nachfragen befriedigt werden. Die dem Ganzen zugrunde liegende Vorstellung ist, dass das Sonnensystem anfänglich aus einer rotirenden Nebelmasse besteht, die sich noch weit über die entferntesten Planeten hinaus erstreckt und dann sich allmählich zusammenzieht, wobei sich Schalablagerungen bilden, die sich von der unter sie herabsinkenden Nebelmasse ablösen. Die Schale zieht sich in einen Ring zusammen, der sich unter Umständen an einer Stelle zu einem Planeten verdichtet und vom übrigen Teile trennt. Hierbei gewinnt er eine Rotation um eine eigene Axe, und es beginnt ein analoger Vorgang, aus dem die Monde entstehen. Die Vorstellung liess nun offenbar eine grosse Anzahl Punkte der Erklärung bedürftig; der Verfasser bemüht sich für jeden einzeln eine Erklärung zu finden. Unter allen Argumentationen, die ihr Ziel in der Herstellung bekannter Gesetze haben, befindet sich auch eine, welche auf ein neues, dem Verfasser eigentümliches Resultat ausgeht. Durch Betrachtungen, deren Angaben jedoch unzureichend sind um sie ohne Gefahr den Gedanken des Verfassers zu verfehlen wiederzugeben, gelangt er zu dem Schluss, dass unterhalb einer bekannten Ablagerung nur eine begrenzte Anzahl solcher möglich sei, und zu einer Formel, welche diese Zahl zum Radius der Ablagerung und zur Rotationsaxe des Hauptkörpers in Relation stellt. Hiervon wird Anwendung auf die Anzahl der möglichen Monde jedes Planeten gemacht. In der zweit genannten Schrift kommt er darauf zurück um die Entdeckung der Monde des Mars in dieser Richtung zu verwerten. Vom 18. Capitel der ersten Schrift an wird das Gebiet des anfänglich definirten und bis dahin festgehaltenen Sonnensystems überschritten und die Kometen etc. in Betracht gezogen, deren Entstehung er durch Ausschleuderung von Nebelmassen zu erklären sucht. Mit diesen beschäftigt sich dann gleichfalls die zweite Schrift.

H.

Erklärung in Betreff des im 244. litt. Bericht S. 46. besprochenen Buches:

Die Schule der Geometrie und Trigonometrie der Ebene. Von Professor C. Hellwig, Oberlehrer an der Realschule 1. Ordnung zu Erfurt. Erster Cursus.

Da der Verfasser besorgt, dass der erste Satz jener Recension so verstanden werden könnte, als ob die in dem Buche enthaltenen

Betrachtungen des inneren Zusammenhangs entbehrten, so komme ich dem Wunsche des Verfassers, eine kurze Inhaltsangabe der Schrift veröffentlicht zu sehen, hierdurch nach. Die ersten 5 Capitel sind der Erklärung der elementaren Begriffe gewidmet. Dann folgen die Lehrsätze über die Winkel, erst überhaupt, dann über die Winkel am Dreieck, und über dessen Seiten, dann die Lehre vom Kreise, zunächst in Betrachtungen, seine Anwendung zur Construction der Dreiecke, dann die Sätze über die Congruenz der Dreiecke und die gleichschenkligen Dreiecke, dann die Lehre von den Vierecken, Parallelogrammen, Trapezen; dann kommt das Buch zurück auf die Kreislehre und behandelt die Sehnen und Tangenten in Verbindung mit den Winkeln; den Schluss des 1. Cursus bilden das Sehnen- und Tangenten-Viereck. Der Grund zur Besorgniss des Verfassers ist aus den Worten des Berichts, deren keins auf einen Mangel des Zusammenhangs Bezug hat, die in den ersten Sätzen überhaupt keinen Tadel enthalten und die unterschiedene Art der Darstellung als berechtigt anerkennen, nicht ersichtlich. Auch in Betreff der weiterhin wirklich gemachten Ausstellungen ist am Schlusse ausdrücklich bemerkt, dass sie nur Verbesserungsvorschläge sein sollen. Ein geringschätzendes Urtheil über diese neue Arbeit konnte um so weniger im Sinne des Referenten liegen, als sich der Verfasser bereits durch so manche Originaluntersuchungen verdient gemacht und die Achtung der Mathematiker erworben hat.

H.

Preisaufgaben
 der
Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft
 in
Leipzig.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Section.

1. Für das Jahr 1878.

Die Entwicklung des reciproken Werthes der Entfernung r zweier Punkte spielt in astronomischen und physikalischen Problemen eine hervorragende Rolle. In der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen wird die zuerst von Cauchy entdeckte Gleichung bewiesen

$$\frac{a}{r} \left(1 + 2e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}} + 2e^{-\frac{4\pi a^2}{r^2}} + 2e^{-\frac{9\pi a^2}{r^2}} + 2e^{-\frac{16\pi a^2}{r^2}} \dots \right) =$$

$$= 1 + 2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}} + 2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}} + 2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}} + 2e^{-\frac{16\pi r^2}{a^2}} \dots$$

in welcher mit Rücksicht auf die zu erzielende Genauigkeit die positive willkürliche Constante a so gross gewählt werden kann, dass die Exponentialgrösse $e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}$ vernachlässigt werden darf. Alsdann hat man

$$\frac{a}{r} = 1 + 2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}} + 2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}} + 2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}} + \dots$$

eine Reihenentwicklung von ungemein rascher Convergenz. Es steht zu erwarten, dass eine auf die vorstehende Formel gegründete Entwicklung der Störungsfunction in dem Problem der drei Körper sich für die numerische Rechnung als vortheilhaft erweisen werde.

Die Gesellschaft wünscht eine unter dem ange-deuteten Gesichtspunkte ausgeführte Bearbei-tung des Störungsproblems zu erhalten.

Indem sie dem Bearbeiter die Wahl des besondern Falles überlässt, in welchem die numerische Anwendbarkeit des Verfahrens gezeigt werden soll, setzt sie voraus, dass das gewählte Beispiel hinlänglichen Umfang und Wichtigkeit besitze, um die Tragweite der vorgeschlagenen Methode und ihr Verhältniss zu den bisher angewandten hervortreten zu lassen. Preis 700 Mark.

2. Für das Jahr 1879.

Durch die in den Abhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von W. Hankel veröffentlichten Untersuchungen ist nachgewiesen worden, dass die Thermoelektricität nicht nur auf den hemimorphen Krystallen auftritt, sondern eine an allen Krystallen wachzunehmende Eigenschaft ist, soweit deren krystallinische Structur und materielle Beschaffenheit überhaupt ein Entstehen und Anhäufen der Elektricität bis zu einer durch unsere Instrumente nachweisbaren Stärke gestatten. Die erwähnten Abhandlungen umfassen ausser den hemimorphen Krystallen des Boracites und Quarzes die symmetrisch gebildeten Krystalle des Idokrases, Apophyllits, Kalkspathes, Berylls, Topases, Schwerspathes, Aragonites, Gypses, Diopsids, Orthoklases, Albits und Periklins, und lehren nicht nur die Vertheilung der Elektricität auf den in den verschiedenen Formen vollkommen ausgebildeten, sondern auch auf den durch Anwachsen und sonstige Hindernisse in ihrer Entwicklung gehemmten Individuen, sowie auf den durch Bruch oder Anschlagen der Durchgänge künstlich erzeugten Begrenzungsflächen kennen. Es scheinen nun unter allen zwischen der Wärme und der Elektricität beobachteten Beziehungen die thermoelektrischen Erscheinungen am geeignetsten, eine nähere Kenntniss des Zusammenhanges zwischen den genannten beiden Agentien zu ermöglichen, und es wird daher von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1879 als Preisaufgabe gestellt:

Auf streng physikalische Versuche gestützter Nachweis der Entstehung der auf Krystallen bei steigender und sinkender Temperatur hervortretenden Elektricität (Thermoelektricität, Pyroelektricität, Krystallelektricität) und der durch Bildungshomnisme oder äussere Verletzungen derselben in der normalen Vertheilung entstehenden Aenderungen.

Preis 700 Mark.

3. Ebenfalls für das Jahr 1879.

Die hinterlassene Abhandlung Hansen's „Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter“, abgedruckt im XI. Bande der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, enthält als Anwendung der daselbst gelehrtten Methode zur Entwicklung der planetaren Störungen die numerische Berechnung derjenigen Störungsglieder in der Bewegung des Jupiter, welche unter der Berücksichtigung der ersten Glieder ihrer analytischen Entwicklung abgeleitet werden können. Für die Berechnung der durch den Saturn bewirkten Störungen der Länge und des Radiusvectors dagegen erscheint die angeführte Methode nicht geeignet, und Hansen verweist in dieser Beziehung auf seine früheren Arbeiten aus der Störungstheorie, welche die erforderlichen Vorschriften enthalten. Ein grosser Theil der numerischen Rechnungen findet sich bereits in der im Jahre 1830 von der Berliner Akademie gekrönten Preisschrift „Ueber die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns“ ausgeführt. Es ist jedoch der Theil der Rechnung, welcher die Glieder höherer Ordnung in Bezug auf die Massen betrifft, nicht vollendet worden. Sofern diese Glieder von Einfluss werden können auf die vollständige Berechnung der Säcularänderungen, sowohl in Bezug auf die Länge und den Radiusvector, als in Bezug auf die Breite, sind auch die in der nachgelassenen Abhandlung Hansen's enthaltenen Werthe dieser Säcularglieder nicht als definitiv anzusehen.

In den letzten Jahren ist die Theorie der Jupitersbewegung durch die umfangreichen Arbeiten von Leverrier ihrem Abschlusse entgegengeführt worden. Da jedoch der berühmte französische Astronom sich wesentlich anderer Methoden, wie Hansen, bedient hat, so bleibt es dringend wünschenswerth und von hohem wissenschaftlichen Interesse, dass die vollständige Berechnung der Jupitersstörungen auf Grund der Hansen'schen Theorie zu Ende geführt werde. Die Gesellschaft stellt daher

die ergänzende Berechnung der vollständigen
Jupitersstörungen nach den von Hansen ange-
gebenen Methoden

als Preisaufgabe für den Termin des 30. November 1879. Preis
700 Mark.

4. Für das Jahr 1880.

Nachdem durch die embryologischen Untersuchungen der letzten Jahre der Nachweis erbracht ist, dass der Körper sämtlicher Thiere

— mit Ausschluss der sog. Protozoen — in ähnlicher Weise aus einigen wenigen Keimblättern sich aufbaut, entsteht die Frage, ob der Antheil, welchen diese Blätter an der Entwicklung der einzelnen Organe und Gewebe nehmen, überall genau der gleiche ist oder nicht; eine Frage, die dann naturgemäss weiter zu der Untersuchung führt, ob dieser Antheil durch die specifischen Eigenschaften der Keimblätter oder durch gewisse secundäre Momente (etwa die Lagenverhältnisse der späteren Organe) bedingt sei. In Anbetracht der grossen Bedeutung, welche die Entscheidung dieser Fragen für die Auffassung der thierischen Organisation hat, wünscht die Gesellschaft

eine auf eigene Untersuchungen gegründete
Kritik der Lehre von der Homologie der Keim-
blätter.

Preis 700 Mark.

5. Für das Jahr 1881

wird die, ursprünglich für 1877 gestellte, in diesem Jahr aber nicht beantwortete Preisfrage wiederholt.

Der nach Encke benannte und von diesem Astronomen während des Zeitraumes von 1819—1848 sorgfältig untersuchte Comet I, 1819, hat in seiner Bewegung Anomalien gezeigt, welche zu ihrer Erklärung auf die Hypothese eines widerstehenden Mittels geführt haben. Da indessen eine genauere Untersuchung der Bahn nur über einen beschränkten Theil des Zeitraums vorliegt, über welchen die Beobachtungen (seit 1786) sich erstrecken, und die von Asten'schen Untersuchungen, wenigstens so weit dieselben bekannt geworden sind, noch zu keinem definitiven Resultate geführt haben, so ist eine vollständige Neubearbeitung der Bahn des Encke'schen Cometen um so mehr wünschenswerth, als die bisher untersuchten Bewegungen anderer periodischen Cometen keinen analogen widerstehenden Einfluss verrathen haben. Die Gesellschaft wünscht eine solche vollständige Neubearbeitung herbeizuführen, und stellt deshalb die Aufgabe:

die Bewegung des Encke'schen Cometen mit Berücksichtigung aller störenden Kräfte, welche von Einfluss sein können, vorläufig wenigstens innerhalb des seit dem Jahre 1848 verflossenen Zeitraums zu untersuchen.

Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer spätern Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angibt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1878 Prof. der Geschichte, Dr. Georg Voigt) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXLI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fuchs, F., tb. d. Leben u. die Werke Galilei's. Bonn, Strauss.
1 Mk. 20 Pf.

Günther, S., Studien z. Gesch. d. mathemat. u. physikal. Geo-
graphie. 3. Hft. Halle, Nebert. 2 Mk. 40 Pf.

Lavicka, V., Historie deskriptivni geometrie. Prag, Grégr & D.
1 Mk. 30 Pf.

Schenk, Philipp Reis, d. Erfinder d. Telephon. Frankfurt,
Alt. 75 Pf.

Schering, E., Carl Friedrich Gauss' Geburtstag nach hun-
dertjähriger Wiederkehr. Festrede. Göttingen, Dieterich. 1 Mk. 50 Pf.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Amstein, H., Figurentafeln z. Sohncke-Amstein'schen Sammlg.
v. Aufgaben aus d. Differential- u. Integralrechnung. I. u. II. Halle,
Schmidt. 3 Mk.

Herr, J. P., Lehrb. d. höheren Mathematik. 2. Bd. 1. Hft.
4. Af. Wien, Seidel & S. p. 2. Bd. cplt. 12 Mk.

Hofmann, F., Sammlg. v. Aufg. aus d. Arithmetik u. Algebra.
2. Thl. Algebraische Aufg. 1. Abth. 7. Af. Bayreuth, Grau.
3 Mk.

— dass. Resultate. 1. u. 2. Thl. 7. Af. Ebd. 2 Mk. 70 Pf.

— die wichtigsten Sätze u. Aufg. d. Planimetrie. 2. Af. Ebd.
1 Mk. 50 Pf.

— Zusammenstellg. d. wichtigsten Figuren a. d. Gebiete d.
mathemat. Unt. an Gymnasien u. Realschulen. Ebd. 2 Mk.

Lieber, H., & F. v. Lühmann, geometr. Constructions-Aufg.
4. Af. Berlin, Simion. 2 Mk. 70 Pf.

Matthiessen, L. Schlüssel z. Sammlg. v. Beispielen u. Aufg.
aus d. allg. Arithmetik u. Algebra v. E. Heis. 2. Af. 2 Thle. Cöln,
DuMont-Schanberg. 13 Mk.

Meyerhofer, R., mathemat.-techn. Lehrbuch. 2. Thl. Geometrie. 7. Lfg. Strassburg, Schneider. 50 Pf.

Sterneck, R. v., Anti-Logarithmen od. Tafeln zum bequemen Aufsuchen der Zahlen 1 bis 10,000 zu gegebenen fünfstelligen Logarithmen. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 20 Pf.

Wallentin, F., methodisch geordnete Sammlg. v. Beispielen u. Aufg. aus d. Algebra u. allg. Arithmetik. I. Wien, Gerold's S. 2 Mk. 40 Pf.; II. 3 Mk. 20 Pf.

Zähringer, H., Antworten zu d. Aufg. im Leitf. f. d. Unt. in d. Arithmetik an Sekundärschulen. 3. Aufl. Zürich, Meyer & Z. 3 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Dedekind, R., üb. d. Zusammenhang zwischen d. Theorien d. Ideale u. d. Theorie d. höheren Congruenzen. Göttingen, Dieterich. 2 Mk.

Fechner, H., Auf. f. d. ersten Unt. in d. Buchstabenrechng. u. Algebra. Berlin, W. Schultze. 75 Pf.

Gallati, E., neue Methode d. symmetr. Multiplikation nebst deren Anwendg. auf d. Division mittels Reziproken. Winterthur, Westpheling. 3 Mk. 20 Pf.

Hager, G., üb. d. lineare Transformation d. Thetafunctionen. Göttingen, Vandenhoeck & R. 80 Pf.

Schering, E., analytische Theorie der Determinanten. Göttingen, Dieterich. 2 Mk. 40 Pf.

Geometrie.

Arendt, G., Géométrie dans l'espace. Berlin, Herbig. 2 Mk.

Becker, J. K., Lehrb. d. Elementar-Mathematik. 2. Thl. Lehrb. d. Elementar-Geometrie. 1. Buch. Berlin, Weidmann. 1 Mk. 60 Pf.

Grassmann, H., d. Ausdehnungslehre v. 1844 od. d. lineale Ausdehnungslehre o. neuer Zweig der Mathematik. 2. Aufl. Leipzig, O. Wigand. 6 Mk.

Pelz, K., üb. o. neuen Beweis d. Fundamentalsatzes v. Pohlke. Wien, Gerold's S. 80 Pf.

Prediger, C., d. Elemente d. analyt. Geometrie d. Raumes. Clausthal, Löwe. 12 Mk.

Seewald, E., einfache Berechng. ellipt. Bögen. Wien, Gerold's S. 25 Mk.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Zeitschrift f. Vermessungswesen. Hrsg. v. W. Jordan. 7. Bd. 1. Hft. Stuttgart, Wittwer's V. proplt. 9 Mk.

Mechanik.

Cederschjöld, G. v., üb. passive Bewegungen. Hannover, Schmorl & v. S. 50 Pf.

Langer, P., d. Grundprobleme d. Mechanik, e. kosmolog. Skizze. Halle, Nebert. 1 Mk. 80 Pf.

Rosochatius, E., üb. Beweggn. e. Punktes. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk.

Optik.

Gercken, W., üb. d. mathemat. Theorie der Dispersion d. Lichtes. Göttingen, Vandenhoeck & R. 80 Pf.

Astronomie und Meteorologie.

Heis, E., Atlas coelestus eclipticus. Octo continens tabulas ad delineandum lumen zodiacale. Fol. Cöln, DuMont-Schauberg. 6 Mk.

Littrow, J. J. v., die Wunder des Himmels. 6. Aufl. 28—29. Lfg. Berlin, Hempel. à 50 Pf.

Ochs, R., unser Planeten-System in seiner Vergangenheit, Gegenwart u. Zukunft. Frankfurt, Schiefer. 80 Pf.

Sirius. 11. J. 1878. (12 Hfte.). 1. Hft. Leipzig, Scholtze. Halbjährl. 5 Mk.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Ges. Hrsg. v. E. Schönfeld u. A. Winnecke. 12. J. 1877. 3. Hft. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

Vogel, H. C., d. Sternhaufen χ Persei beobachtet am 8zölligen Refractor d. Leipziger Sternwarte in d. J. 1867—1870. Leipzig, Engelmann. 2 Mk. 40 Pf.

Wochenschrift f. Astronomie, Meteorologie u. Geographie. Red. v. J. Klein. N. F. 21. J. 1878. Nr. 1. Halle, Schmidt. prcplt. 9 Mk.

Zeitschrift d. oest. Ges. f. Meteorologie. Red. v. J. Hann. 13. Bd. 1878. Nr. 1. Wien, Braumüller. prcplt. 10 Mk.

Nautik.

Jahrbuch naut., od. Ephemeriden u. Tafeln f. d. Jahr 1880 zur Bestimmg. der Zeit, Länge u. Breite zur See nach astronom. Beobachtgn. Hrsg. v. Reichskanzler-Amt unter Red. v. Tietjen. Berlin, G. Reimer. 1 Mk. 50 Pf.

Physik.

Burgdorf, C. A., Physik in d. Volksschule f. Lehrer u. Seminaristen. Flensburg, Westphalen. 1 Mk. 80 Pf.

Hüfner, G., quantitative Spectralanalyse u. e. neues Spectrophotometer. Leipzig, Barth. 1 Mk.

Maxwell, J. C., Theorie d. Wärme. Nach der 4. Aufl. d. Orig. übers. v. F. Neesen. 1. Lfg. Braunschweig, Vieweg & S. 3 Mk. 20 Pf.

Münter, G., Aus d. Physik d. Luftmerces. Herford, Essmann. 4 Mk.

Rühlmann, R., Handb. d. mechan. Wärmetheorie. II. 1. Braunschweig, Vieweg & S. 8 Mk.

Vermischte Schriften.

Bessel, F. W., Recensionen. Hrsg. v. R. Engelmann. Leipzig, Engelmann. 7 Mk.

Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wiss. Mathemat.-naturwiss. Classe. J. 1878. 75. Bd. 1. Abth. 5. Hft. Wien, Gerold's S. 6 Mk.

— dass. 76. Bd. 1. Abth. 2. Hft. Ebd. 3 Mk.

Zeitschrift f. mathemat. u. naturwiss. Unt. Hrsg. v. J. C. V. Hoffmann. 9. J. 1878. (6 Hfte.). 1. Heft. Leipzig, Teubner. prept. 10 Mk. 80 Pf.

Zöllner, F., wiss. Abh. I. Leipzig, Staackmann. 13 Mk. 50 Pf.; geb. baar 15 Mk.

Fig. 3.

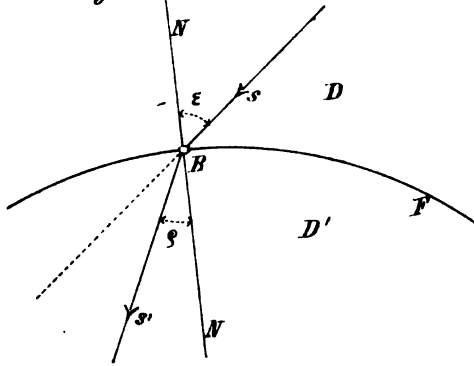
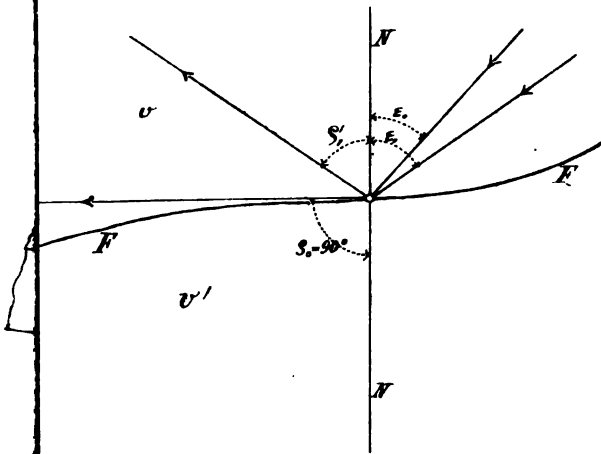


Fig. 7.



renzende in kürzester Zeit.

Zum Gebrauch an höhern Lehranstalten

st von **Fr. Hofmann**, Professor der Mathematik am k. Gymnasium in Bayreuth, im Verlage der **Grau'schen Buchhandlung**, erschienen und in allen Buchhandlungen zu haben:

Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 3 Thle.

gr. 8. broch. 7 Mk. 40 Pf.; Auflösungen dazu 4 Mk. 20 Pf.

— **der wichtigsten Sätze aus der Arithmetik und Algebra.** 3. Aufl.

gr. 8. broch. 40 Pf.

— **stereometrischer Aufgaben.** gr. 8. broch. 1 Mk.

— **von Aufgaben aus der niedern Arithmetik.** 3. Aufl. gr. 8. broch. 1 Mk. 20 Pf.

Grundriss der Stereometrie. gr. 8. mit 8 Taf. geh. 70 Pf.

— **der mathemat. Geographie.** gr. 8. mit 7 Taf. geh. 80 Pf.

Die wichtigsten Sätze und Aufgaben aus der Planimetrie. gr. 8. geh. mit 17 Taf. 1 Mk. 50 Pf.

— **aus der Trigonometrie.** gr. 8. geh. 70 Pf.

Zusammenstellung der wichtigsten Figuren aus dem Gebiete des mathemat. Unterrichts. gr. 8. mit 436 Figuren. cart. 2 Mk.

Verlag von Louis Nebert in Halle a/S.

(Zu beziehen durch alle Buchhandlungen)

Emsmann, Dr. G., Mathematische Excursionen. Mit 2 lith. Taf. gr. 8. geh. 3 Mk. 60 Pf.

Hoffmann, Prof. J. C. V., Vorschule der Geometrie. 1. Lief. (Erste Hälfte d. Planimetrie). Mit 230 Holzschn. u. 2 lith. Taf. gr. 8. geh. 3 Mk.

Koestler, H., Oberlehrer, Leitfaden für den Anfangsunterricht in der Geometrie an höh. Lehranstalten. 2 Hefte mit vielen Holz-schnitten. gr. 8. geh. 1 Mk. 90 Pf.

Koestler, H., Oberlehrer, Leitfaden für den Anfangsunterricht in der Arithmetik an höh. Lehranstalten. gr. 8. geh. 75 Pf.

Schwarz, Dr. H., Grundzüge für den Rechnenunterricht. 8. geh. 40 Pf.

Dronke, Dr. F., Einleitung in die höhere Algebra. Mit 12 in den Text eingedr. Holzschn. gr. 8. geh. 4 Mk. 50 Pf.

Lohrmann's Mondcharte.

Die **Mondcharte** (also vor 50 Jahren bereits) von dem seligen Lohr-
mann in Potsdam begonnene, später von den beiden Opelt, Vater und
Sohn, fortgesetzt und zuletzt von J. F. Julius Schmidt, dem Director
der **Mondcharte** in Athen, abgeschlossene Werk, bestehend aus 27 wahrhaft
schön gezeichneten Kupfertafeln, 13 Bogen Text und einem Portrait
Lohrmann's in Stahlstich, ist soeben im Verlage von Joh. Ambr. Barth
in Leipzig erschienen, zum Preise von Mk. 50. — verkäuflich und wird als
ein vortrefflicher Beweis echt deutschen, ausdauernden Gelehrtenfleisses der gesamm-
ten gebildeten Welt hiermit aufs Angelegentlichste empfohlen. — Die Ge-
samtheit und Feinheit des Kupferstiches dürfen mit Recht als einzig in
ihrer Art bezeichnet werden.

Verlag von G. Kreuschmer in Bunzlau.

Gauss, A. F. G. Th. (Oberlehrer am Gymnasium zu Bunzlau).
Die Hauptsätze der Elementar-Mathematik. Zum Gebrauche
 an höheren Lehranstalten. 2 Thle. Mit 171 in den Text ein-
 gedruckten Holzschnitten. Preis 3 Mk. 75 Pf.

I N H A L T.

	Seite.
V. Inedita Copernicana. Aus den Handschriften in Berlin, Frauen- burg, Upsala und Wien herausgegeben von Maximilian Curjze. I.	113
VI. Nombres relatifs des polygones réguliers de n et de $2n$ côtés, suivant que n est un nombre impair ou un nombre pair. Par Georges Dostor	148
VII. Rein geometrische Proportionslehre. Von R. Hoppe	153
VIII. Summation einiger Reihen. Von R. Hoppe	163
IX. Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales du quatrième ordre. Par P. Appell	175
X. Sur les fractions continues périodiques. Par P. Appell	183
XI. Ueber den Weg, den ein Punkt aus einem Medium in das an- grenzende in der kürzesten Zeit durchläuft. Von Herrn Carl Bartl, Assistent an der k. k. technischule Hochschule in Graz	189
XII. Beitrag zum Interpolationsproblem. Von Carl Bartl	202
XIII. Miscellen.	
1. Bemerkung über den Torsionshalbmesser von Raumcurven. Von R. Mehmke, stud. math.	212
2. Zwei Sätze von den Flächen zweiten Grades. Von R. Mehmke	214
3. Minimum-Aufgabe. Von R. Hoppe	215
4. Ueber den Neunpunktekreis des Dreiecks. Von W. Fuhr- mann, Oberlehrer an der Realschule auf der Burg in Königsberg	218
5. Entwicklung von $\log(1+x)$. Von W. Fuhrmann	220
6. Ermittlung des Wertes eines bestimmten. Von Simon Spitzer	221
7. Berechnung der dritten Seite eines Dreiecks aus den zwei benannten Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel. Von E. Czuber	

vard

SEP 1878

8781 4413

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht
auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren
Unterrichtsanstalten.

Gegründet von
J. A. Grunert,

fortgesetzt von
R. Hoppe.

Zweiundsechzigster Teil. Drittes Heft.

(Mit 3 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1878.



Verlag von Louis Nebert in Halle a/S.

(Durch jede Buchhandlung zu beziehen.)

Enneper, Prof. Dr. Alfr., *Elliptische Functionen. Theorie u. Geschichte.*
Akademische Vorträge. Lex. 8°. br. 16 Mk.

Thomae, Prof. Dr. J., *Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung
der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden.*
gr. 4°. br. 3 Mk.

Thomae, Prof. Dr. J., *Abriss einer Theorie der complexen Functionen
und der Thetafunctionen einer Veränderlichen. Zweite vermehrte
Auflage.* gr. 8°. br. 5 Mk. 25 Pf.

Thomae, Prof. Dr. J., *Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.*
gr. 4°. br. 2 Mk. 80 Pf.

Thomae, Prof. Dr. J., *Ebene geometrische Gebilde I. und II. Ordnung
vom Standpunkte der Geometrie der Lage betrachtet.* gr. 4°. br.
2 Mk. 25 Pf.

Thomae, Prof. Dr. J., *Ueber eine Function, welche einer linearen
Differential- und Differenzgleichung IV. Ordnung Genüge leistet.*
gr. 4°. br. 1 Mk. 50 Pf.

Thomae, Prof. Dr. J., *Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Functionen.*
gr. 4°. br. 4 Mk. 50 Pf.

Langer, Dr. J., *Die Grundprobleme der Mechanik. Eine kosmologische
Skizze.* gr. 8°. br. 1 Mk. 80 Pf.

Günther, Prof. Siegm., *Studien zur Geschichte der mathematischen und
physikalischen Geographie.*

I. Heft: Die Lehre von der Erdrundung und Erdbewegung im
Mittelalter bei den Occidentalen. gr. 8°. br. 1 Mk. 80 Pf.

II. Heft: Die Lehre von der Erdrundung und Erdbewegung im
Mittelalter bei den Arabern und Hebräern. gr. 8°. br.
2 Mk. 10 Pf.

III. Heft: Aeltere und neuere Hypothesen über die chronische
Versetzung des Erdschwerpunktes durch Wassermassen.
gr. 8°. br. 2 Mk. 40 Pf.

Hochheim, Prof. Dr. A., *Kāfi fil Hisāb (Genügendes über Arithmetik)
des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhi. I.* gr. 4°. br.
1 Mk. 20 Pf.

Hochheim, Dr. Ad., *Ueber die Differentialcurven der Kegelschnitte.*
gr. 8°. br. 3 Mk.

Hochheim, Dr. Ad., *Ueber Pole und Polaren der parabolisch. Curven
III. Ordnung.* gr. 4°. br. 1 Mk.

Dronke, Dr. A., *Einleitung in die höhere Algebra.* gr. 8°. br.
4 Mk. 50 Pf.

Bette, Dr. Wilh., *Unterhaltungen über einige Capitel der Mécanique
céleste und der Kosmogonie.* gr. 8°. br. 2 Mk.

XIV.

Einleitung in die Theorie der Substitutionen
und ihre Anwendungen.

Von

Herrn Dr. E. Netto

in Berlin.

Häufig genug geschieht es, dass beim ersten Studium der Substitutionen die rein formale Seite dieses Gegenstandes, das Operiren mit Operationen sowie der scheinbare Mangel eines realen Hintergrundes ermüdend oder verwirrend wirkt. Die nachfolgende Darstellung entsprang dem Bestreben jene Theorie von vorn herein in Beziehung zur Algebra zu setzen, der sie ja ihren Ursprung verdankt, und so den angeführten Mängeln entgegenzutreten: ein Weg der in dieser Art bisher noch nicht eingeschlagen ist. Es kommt mir hier nicht darauf an, neue Sätze oder neue Beweise zu geben; nur der Gang der Untersuchungen ist es, auf welchen ich die Aufmerksamkeit richten möchte. Dass ich nirgend die einschlägige Litteratur angeführt habe, ist gleichfalls nur eine Folge jenes Zweckes, den ich mit dieser Arbeit elementaren Charakters verbinde.

§ 1.

Wenngleich es für den ersten Abschnitt der folgenden Untersuchungen nicht nötig ist, so mögen doch schon hier, um später einerseits in der Theorie der Gleichungen eine analytische Behandlung überhaupt zu ermöglichen, und um andererseits den Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, welche bei allgemeinen Fragen durch specielle Werte der dabei auftretenden unabhängigen Grössen hervorgerufen werden, die Coefficienten der von uns betrachteten Gleichungen stets als Veränderliche angesehen werden. Für unsern Zweck reicht es aus, sie als Functionen einer und derselben unabhängigen Grösse x aufzufassen; es seien also in der Gleichung

Wir betrachten zuerst die Art der Darstellung eines solchen Ueberganges von $x_1, x_2, \dots x_n$ zu $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_n}$, den man Substitution nennt.

Zuerst kann man ihn durch das Symbol

$$\begin{pmatrix} x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_n} \\ x_1, x_2, \dots x_n \end{pmatrix}$$

bezeichnen; hier wird jedes Element der zweiten Zeile durch das dardberstehende ersetzt. Diejenigen Elemente, welche durch die Substitution etwa nicht umgestellt werden, d. h. die, für welche $x_\lambda = x_{i_\lambda}$ ist, brauchen gar nicht in die Klammer aufgenommen zu werden.

Zweitens kann man jene Substitution auch in der Form

$$(x_1 x_{i_1} x_{i_1} \dots) (x_2 x_{i_2} x_{i_2} \dots) (x_i x_{i_i} \dots) \dots$$

darstellen. Hier wird jedes Element einer Klammer mit Ausnahme des letzten durch das darauf folgende, das letzte der Klammer aber durch ihr erstes ersetzt. Da wir nun auf x_λ folgen liessen x_{i_λ} , so musste natürlich x_{i_λ} durch $x_{i_{i_\lambda}}$, ebenso x_{i_i} durch $x_{i_{i_i}}$ ersetzt werden.

Geht man von x_1 aus, ersetzt dies durch x_{i_1} , dies dann durch $x_{i_{i_1}}$ u. s. w., so kommt man schliesslich zu einem Elemente, auf welches wieder das Anfangselement x_1 folgt. Damit ist man dann bei dem cyklischen Fortrücken auf das erste Element zurückgekommen und der Cyklus ist geschlossen. Giebt es ausser den Elementen, die in diesem ersten Cyklus

$$(x_1 x_{i_1} x_{i_{i_1}} \dots)$$

enthalten sind, noch andere, z. B. x_2 , so beginnt man mit einem derselben einen neuen Cyklus u. s. w. Auch hier ist es klar, dass die Elemente, welche die Substitution nicht umstellt, welche daher jedes für sich allein einen Cyklus bilden würden, fortgelassen werden können.

Endlich drittens kann man auch noch die Substitutionen in Cyklen von immer nur 2 Elementen, in sogenannte Transpositionen zerlegen. Hier würde man erhalten

$$(x_1 x_{i_1}) (x_2 x_{i_2}) \dots (x_s x_{i_s}) (x_s x_{i_s}) \dots;$$

denn es ist ersichtlich, dass, wenn man zuerst x_1 und x_{i_1} vertauscht, und wenn ursprünglich auf x_{i_1} folgen sollte $x_{i_{i_1}}$, nach jener Vertauschung auf x_1 folgen muss $x_{i_{i_1}}$, so dass der Cyklus $(x_1 x_{i_{i_1}})$ auftreten

wird. Bei dieser letzten Methode ist es aber nicht nötig, alle $\frac{n(n-1)}{2}$ möglichen Transpositionen der n Elemente x zu verwenden. Es besteht nämlich die Gleichung

$$(x_\lambda x_\mu) = (x_\alpha x_\lambda) (x_\alpha x_\mu) (x_\alpha x_\lambda),$$

welche so aufzufassen ist, dass man die auf der rechten Seite angeordneten Operationen nach einander ausführt. Danach würde rechts zuerst x_α durch x_λ ersetzt werden; die zweite Transposition liesse dann x_λ ungeändert, während die dritte es wieder durch x_α ersetzt, so dass x_α tatsächlich ungeändert bleibt. x_λ würde zuerst durch x_α ersetzt werden, dies dann durch x_μ , und x_μ bleibt in der dritten Transposition ungeändert. Die Richtigkeit der Gleichung ist also bewiesen. Aus ihr folgt, dass nur diejenigen Transpositionen verwendet zu werden brauchen, bei denen ein Element von vorn herein bestimmt ist, z. B. $x_\alpha = x_1$. Dieses Element kann auch in jedem Cyklus als das erste aufgefasst werden, da ja

$$(x_1 x_\lambda) = (x_\lambda x_1)$$

oder allgemeiner auch bei Cyklen von mehr als zwei Elementen, da

$$\begin{aligned} (x_a x_b x_c \dots x_m x_n) &= (x_b x_c \dots x_n x_a) \\ &= (x_c x_d \dots x_a x_b) = \dots = (x_n x_a \dots x_m) \end{aligned}$$

ist. —

Die meisten Vorzüge hat die zweite dieser drei Darstellungsweisen. Die erste leidet trotz ihrer scheinbaren Einfachheit an einer gewissen Unübersichtlichkeit; die dritte hauptsächlich daran, dass im allgemeinen die einzelnen Cyklen nicht vertauscht werden können, one die Substitution zu ändern, ferner daran, dass ein und dasselbe Element mehr denn einmal in die Substitutionsdarstellung eintreten wird.

Wir wählen als Beispiel für $n = 7$ die Folge

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$, welche durch $x_3, x_7, x_5, x_4, x_1, x_6, x_2$

ersetzt werden soll. Diese Substitution wird entweder durch

$$\begin{pmatrix} x_3 x_7 x_5 x_4 x_1 x_6 x_2 \\ x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 \end{pmatrix}$$

resp. einfacher durch

$$\begin{pmatrix} x_3 x_7 x_5 x_1 x_2 \\ x_1 x_2 x_3 x_5 x_7 \end{pmatrix},$$

oder nach der zweiten Methode durch

$$(x_1 x_3 x_5) (x_2 x_7) (x_4) (x_6)$$

resp. einfacher durch

$$(x_1 x_3 x_5) (x_2 x_7),$$

und endlich nach der dritten Art durch

$$(x_1x_3)(x_1x_5)(x_2x_7)$$

resp. durch

$$(x_1x_3)(x_1x_5)(x_1x_2)(x_1x_7)(x_1x_2)$$

darzustellen sein. —

Solcher Substitutionen zwischen den n Elementen x_1, x_2, \dots, x_n giebt es $1.2.3 \dots n = n!$, wenn die Elemente x als von einander verschieden angesehen werden und wenn $(x_1)(x_2) \dots (x_n)$ als Substitution mitgezählt wird, trotzdem es alle Elemente ungeändert lässt und daher auch kurz $= 1$ gesetzt werden kann.

§ 3.

Wendet man alle diese $n!$ Substitutionen auf $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ an, d. h. fñhrt man jede dieser Substitutionen der x in dem Ausdrucke φ durch, so erhält man, den durch die Substitution 1 hervorgerufenen ursprünglichen mitgerechnet, $n!$ Ausdrücke. Diese brauchen nicht sämtlich von einander verschieden zu sein; einige können den ursprünglichen Wert $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ wieder annehmen; alle werden es sogar tun, falls φ eine symmetrische Function der x ist.

Ist z. B.

$$\varphi(x_1, \dots, x_4) = x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4$$

so wird der Wert von φ durch die Substitutionen

$$\begin{aligned} & (x_1x_2), (x_3x_4); \\ & (x_1x_2)(x_3x_4), (x_1x_3)(x_2x_4), (x_1x_4)(x_2x_3); \\ & (x_1x_3x_2x_4), (x_1x_4x_2x_3) \end{aligned}$$

und natürlich auch durch die Substitution 1 nicht geändert. Alle anderen Substitutionen zwischen den x liefern dagegen einen von $x_1x_2 + x_3x_4$ verschiedenen Ausdruck und zwar entweder

$$x_1x_3 + x_2x_4 \quad \text{oder} \quad x_1x_4 + x_2x_3. \quad -$$

Alle diejenigen Substitutionen, welche $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ungeändert lassen, und deren Anzahl r sein mag, sollen mit

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_r$$

bezeichnet werden. Bedeutet also φ_s das Resultat einer kurz mit s bezeichneten Substitution auf φ , so wird

$$\varphi_{s_1} = \varphi_{s_2} = \varphi_{s_3} = \dots = \varphi_{s_r}$$

werden. Offenbar wird sich die Substitution 1, weil sie ja eben keins der x umsetzt, unter den s finden; es möge $s_1 = 1$ hier und im Fol-

genden sein. Der Voraussetzung nach wird keine von den obigen verschiedene Substitution s' den Wert

$$\varphi s' = \varphi s_1 = \varphi_1$$

hervorbringen. Wendet man jetzt auf φ zwei Substitutionen unserer Reihe s_λ und s_μ nach einander an und deutet das Schlussresultat in ähnlicher Weise durch den Index an, so wird auch

$$\varphi s_\lambda . s_\mu = \varphi s_\mu = \varphi_1$$

werden; es muss also die Substitution σ , welche durch die Aufeinanderfolge der beiden Substitutionen s_λ und s_μ gebildet wird, gleichfalls in der Reihe der $s_1, s_2 \dots s_r$ enthalten sein. Wir nennen σ das Product der Substitutionen s_λ und s_μ und schreiben demgemäss $\sigma = s_\lambda . s_\mu$; dann folgt, dass auch das Product beliebig vieler s sich wieder in der obigen Reihe findet.

Die Ausführung solcher Multiplication ergibt sich folgendermassen. Sind

$$\begin{pmatrix} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \dots \\ x_1 x_2 x_3 \dots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} \dots \\ x_1 x_2 x_3 \dots \end{pmatrix}$$

die beiden Factoren, so ist

$$\begin{pmatrix} x_{k_{i_1}} x_{k_{i_2}} x_{k_{i_3}} \dots \\ x_1 x_2 x_3 \dots \end{pmatrix}$$

das Product. Nach der zweiten Darstellungsart folgt aus

$$(x_1 x_{i_1} x_{i_2} \dots) \dots, \quad \text{und} \quad (x_1 x_{k_1} x_{k_2} \dots) \dots$$

als Factoren das Product

$$(x_1 x_{k_{i_1}} \dots) (x_2 x_{k_{i_2}} \dots) \dots,$$

und bei der dritten Art endlich braucht man die Transpositionen der zweiten Substitution nur auf die der ersten folgen zu lassen.

Nimmt man also in dem Beispiel von § 2. noch die Substitution $s_2 = (x_2 x_4 x_7 x_6)$ zu der ersten $s_1 = (x_1 x_3 x_5) (x_2 x_7)$ hinzu, so ergibt sich als Product beider

$$s_1 . s_2 = (x_1 x_3 x_5) (x_2 x_6) (x_4 x_7).$$

Man sieht, dass bei dieser Multiplication eine Vertauschung der Factoren nicht one weiteres gestattet ist; $s_\lambda s_\mu$ und $s_\mu s_\lambda$ sind im allgemeinen von einander verschieden. In unserem Falle ergäbe die Vertauschung der Factoren

$$s_2 . s_1 = (x_1 x_3 x_5) (x_2 x_4) (x_6 x_7). \quad -$$

Die s , welche $\varphi(x_1 \dots x_n)$ ungeändert lassen, bilden also eine geschlossene Gruppe, insofern das Product zweier unter ihnen wieder zu den s gehört. Mit diesem Namen Gruppe soll stets ein System von Substitutionen von der angegebenen Eigenschaft bezeichnet werden. Die Anzahl der Elemente, welche durch die Substitutionen der Gruppe umgesetzt werden, also hier n , heisse der Grad; die Anzahl der Substitutionen selbst, also hier r , die Ordnung der Gruppe.

§ 4.

Schon eine einzige Substitution giebt Veranlassung zur Bildung einer Gruppe, indem man sie mit sich selbst multiplicirt, oder ihre Potenzen bildet; diese zusammen bilden eine Gruppe, deren Ordnung gleich dem Exponenten der niedrigsten Potenz von s wird, welche den Wert 1 erhält, oder auch gleich dem kleinsten Vielfachen der Ordnung der einzelnen Cyklen. Enthält ein Cyklus die Folge $(x_1 x_2 x_3 \dots x_m)$, so wird seine zweite Potenz, je nachdem m gerade oder ungerade ist, die Form haben

$$(x_1 x_3 x_5 \dots x_{m-1})(x_2 x_4 x_6 \dots x_m)$$

oder

$$(x_1 x_3 x_5 \dots x_m x_2 x_4 \dots x_{m-1});$$

seine dritte, jenachdem $m \equiv 0 \pmod{3}$

$$(x_1 x_4 x_7 \dots x_{m-2})(x_2 x_5 x_8 \dots x_{m-1})(x_3 x_6 x_9 \dots x_m)$$

oder $m \equiv 1 \pmod{3}$

$$(x_1 x_4 \dots x_m x_3 x_6 \dots x_{m-1} x_2 \dots x_{m-2})$$

oder $m \equiv 2 \pmod{3}$

$$(x_1 x_4 \dots x_{m-1} x_2 x_5 \dots x_m x_3 x_6 \dots x_{m-2}).$$

Die m te Potenz und folglich auch die $2m, 3m, \dots$ te Potenz ändert keins der Elemente $x_1, \dots x_m$; sie wird also $= 1$.

In ähnlicher Weise wie die Potenzen mit absoluten, kann man die mit positiven und negativen Exponenten betrachten, indem man $s^{+\lambda}, s^{-\lambda}$ als die Substitutionen ansieht, welche den Gleichungen

$$s^{+\lambda} = s^\lambda, \quad s^{-\lambda} \cdot s^\lambda = 1$$

genügen. Wenn t die Ordnung von s ist, d. h. wenn $s^t = 1$ wird, so kann natürlich auch

$$s^{-\lambda} = s^{a \cdot t - \lambda} \quad (at > \lambda)$$

definiert werden.

Für die obige Substitution

$$s = (x_1 x_5 x_6)(x_2 x_7)$$

ergeben sich die Potenzen

$$\begin{aligned} s^2 &= s^{-4} = (x_1 x_5 x_6); & s^3 &= s^{-3} = (x_2 x_7); \\ s^4 &= s^{-2} = (x_1 x_5 x_6); & s^5 &= s^{-1} = (x_1 x_5 x_6)(x_2 x_7); \\ s^6 &= 1. \end{aligned}$$

Sind zwei Substitutionen s_λ und s_μ gegeben, so hat man, um die Gruppe kleinster Ordnung zu finden, der beide angehören, nicht nur die Potenzen s_λ^α und s_μ^β zu multipliciren, sondern man muss, da im allgemeinen $s_\lambda s_\mu$ von $s_\mu s_\lambda$ verschieden ist, sämtliche Complexe

$$\begin{aligned} &1; \quad s_\lambda^\alpha, s_\mu^\beta; \quad s_\lambda^\alpha s_\mu^\beta, s_\mu^\beta s_\lambda^\alpha; \\ &s_\lambda^\alpha s_\mu^\beta s_\lambda^{\alpha_1}, \quad s_\mu^\beta s_\lambda^\alpha s_\mu^{\beta_1}; \dots \end{aligned}$$

bilden, bis alle überhaupt bei einem Producte von m Factoren auftretenden Substitutionen schon unter den früheren enthalten sind. Dann sind nämlich die von $m+1$ Factoren auf solche von höchstens m Factoren reducirbar, also sind auch sie schon sämtlich unter den aufgestellten Substitutionen enthalten. Von allen so erlangten werden nur die von einander verschiedenen beibehalten; diese bilden die verlangte kleinste Gruppe, welche die Substitutionen s_λ und s_μ umfasst.

Für die oben betrachteten Substitutionen

$$s_\lambda = (x_1 x_5 x_6)(x_2 x_7) \quad \text{und} \quad s_\mu = (x_3 x_4 x_7 x_8)$$

ergiebt sich auf diese Weise eine Gruppe der Ordnung 24. Verfäht man aber in der angegebenen Art mit zwei beliebig gebildeten Substitutionen, so erhält man als Gruppe im allgemeinen alle $n!$ überhaupt möglichen Substitutionen. Es ist ein ebenso wichtiges wie schwieriges Problem s_λ und s_μ so zu bestimmen, dass die Ordnung der resultirenden Gruppe kleiner als $n!$ wird.

Dass in unserem Beispiele eine Gruppe der Ordnung 24 statt einer solchen der Ordnung $7!$ sich ergab, folgte daraus, dass nicht alle Elemente unter einander in Verbindung standen. Nur $x_1 x_5 x_6$, einerseits und andererseits $x_3 x_4 x_7 x_8$ vertauschten ihre Plätze unter einander; zwischen beiden Systemen bestand aber kein Zusammenhang. So lieferten die ersten für sich $3!$ die letzteren 4 Substitutionen, und im ganzen ergaben sich dann hier $3! \cdot 4 = 24$ Substitutionen.

Gruppen, bei welchen alle Elemente mit einander in Verbindung stehen, heissen transitiv, solche bei denen dies nicht der Fall ist, intransitiv. Die erstere Art ist die wichtigere, da jede intransitive Gruppe sich auf transitive reduciren lässt, und da in der Theorie der

Gleichungen die transitiven Gruppen zu den irreduciblen Gleichungen in enger Beziehung stehen.

In einem anderen Falle erhält man gleichfalls Gruppen, deren Ordnung kleiner als $n!$ ist, wenn nämlich die beiden Substitutionen s_λ und s_μ , welche sie erzeugen, vertauschbar sind, d. h. wenn

$$s_\lambda s_\mu = s_\mu s_\lambda$$

ist. Dann sind nämlich, wie man leicht beweist, auch ihre Potenzen vertauschbar

$$s_\lambda^\alpha s_\mu^\beta = s_\lambda^{\alpha-1} \cdot s_\lambda s_\mu \cdot s_\mu^{\beta-1} = \dots = s_\mu^\beta s_\lambda^\alpha,$$

und daraus folgt dann, dass jede Substitution der Gruppe auf die Form

$$s_\lambda^\alpha \cdot s_\mu^\beta$$

gebracht, also auf zwei Factoren reducirt werden kann.

So sind stets zwei Potenzen derselben Substitution vertauschbar,

$$s_\lambda^\alpha \cdot s_\mu^\beta = s_\mu^\beta \cdot s_\lambda^\alpha;$$

ferner auch solche Substitutionen, welche keine Elemente gemeinsam haben; endlich aber auch allgemeinere wie die im § 3. gefundenen

$$s_\lambda = (x_1 x_2)(x_3 x_4), \quad s_\mu = (x_1 x_3 x_2 x_4);$$

hier ist

$$s_\lambda \cdot s_\mu = s_\mu \cdot s_\lambda = (x_1 x_4 x_2 x_3)$$

Der zweite dieser Fälle zeigt die Richtigkeit des folgenden Satzes: Wenn man die Substitutionen zweier Gruppen, welche keine gemeinsamen Elemente besitzen, mit einander multiplicirt, so entsteht eine intransitive Gruppe, deren Grad gleich der Summe der Gradzahlen und deren Ordnung gleich dem Producte der Ordnungszahlen der ursprünglichen Gruppen ist.

§ 5.

Zu den vorstehenden Untersuchungen waren wir dadurch gelangt, dass wir die Gesamtheit der Substitutionen betrachteten, welche den Ausdruck einer gegebenen Function nicht ändern sollen. Diese an Zahl mindestens 1 und höchstens $n!$ bilden eine geschlossene Gruppe des Grades n , derart dass das Product zweier Substitutionen der Gruppe wieder zu derselben gehört. Jeder Function der n Grössen x_1, \dots, x_n ist eine solche Gruppe zugeordnet. Umgekehrt kann man gleichfalls zeigen, dass zu jeder Gruppe des Grades n auch Functionen von x_1, \dots, x_n gehören, welche für sämtliche Substitutionen derselben und nur für sie ungeändert bleiben. Es wird durch diesen Nachweis ein

Zusammenhang zwischen den Gruppen und den Functionen hergestellt, so dass die Erforschung der einen auf die der andern reducirt werden kann; die scheinbar rein formale Operation der Substitutionen erhält dadurch einen realen Hintergrund und eine wichtige Anwendung.

Gesetzt man hätte eine Function φ der n Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$, welche für eine jede Substitution s des Grades n zwischen den x ihren Wert ändert; wenn nun eine beliebige Gruppe \mathcal{P} mit den Substitutionen

$$s_1 = 1, s_2, s_3, \dots s_r$$

gegeben ist, so wird die Function

$$\psi_1 = (u - \varphi_1)(u - \varphi_{s_2})(u - \varphi_{s_3}) \dots (u - \varphi_{s_r}),$$

in welcher u eine willkürliche Veränderliche bedeutet, für jede Substitution der Gruppe \mathcal{P} ihren Wert behalten. Es unterscheidet sich nämlich

$$\psi_{s_2} = (u - \varphi_{s_2})(u - \varphi_{s_2 s_2}) \dots (u - \varphi_{s_2 s_r})$$

von ψ_1 nur durch die Factorenfolge; und wenn umgekehrt σ eine nicht zu \mathcal{P} gehörige Substitution ist, so wird ψ_σ von ψ_1 verschieden sein. Denn man hätte im entgegengesetzten Falle

$$\psi_1 = \psi_\sigma = (u - \varphi_\sigma)(u - \varphi_{s_2 \sigma}) \dots;$$

keiner der Ausdrücke

$$\varphi_\sigma, \varphi_{s_2 \sigma}, \varphi_{s_3 \sigma}, \dots$$

ist einem der früheren

$$\varphi_1, \varphi_{s_2}, \varphi_{s_3}, \dots$$

gleich, da ja φ der Voraussetzung gemäss $n!$ Werte hat; es müsste daher die Gleichung

$$\psi_1 = 0,$$

welche in u vom Grade r ist, mindestens die $2r$ verschiedenen Wurzeln

$$u = \varphi_1, \varphi_{s_2}, \dots \varphi_{s_r}, \varphi_\sigma, \varphi_{s_2 \sigma}, \dots \varphi_{s_r \sigma}$$

besitzen. Dies ist nur möglich, wenn ψ_1 identisch 0 ist, was aber hier nicht eintreten kann. ψ ist also wirklich die Function, welche für alle Substitutionen von \mathcal{P} und nur für diese ungeändert bleibt. Es verdient bemerkt zu werden, dass beim obigen Schlusse die Existenz von Wurzeln nicht vorausgesetzt ist, sondern nur der leicht ersichtliche Satz, dass eine Gleichung r ten Grades nicht mehr als r Wurzeln haben kann.

Die Construction der hierbei gebrauchten Function φ , welche $n!$ Werte hat, geschieht folgendermassen: Sind die $x_1, x_2, \dots x_n$ von einander unabhängig, so wird schon

$$\varphi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

der Bedingung genügen, falls die Constanten α alle von einander verschieden sind; denn man kann $\varphi_k - \varphi_1$ nach den x ordnen, so dass man hat

$$\varphi_k - \varphi_1 = (\alpha_k - \alpha_1)x_1 + (\alpha_k - \alpha_2)x_2 + \dots,$$

und dieser Ausdruck kann für von einander unabhängige x nur verschwinden, wenn allgemein $\alpha_k = \alpha_1$ ist, wenn die Substitution also kein x umsetzt, d. h. gleich 1 wird.

Aber selbst, wenn eine Abhängigkeit zwischen den x besteht, giebt es, sofern nur nicht zwei der x einander gleich werden, unendlich viele Systeme der α , für welche

$$\varphi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

$n!$ verschiedene Werte hat. Denn wäre für jede Wal der α ein φ_σ einem φ_τ gleich, so müsste das Product

$$\prod_{\sigma, \tau} (\varphi_\sigma - \varphi_\tau) = \prod_{\sigma, \tau} \{\alpha_1(x_{\sigma_1} - x_{\tau_1}) + \alpha_2(x_{\sigma_2} - x_{\tau_2}) + \dots\}$$

$$(\sigma, \tau = 1, 2, \dots n!; \sigma \text{ ungleich } \tau)$$

identisch verschwinden. Aus dem Producte heben wir nun diejenigen Factoren $\varphi_\sigma - \varphi_\tau$ heraus, bei denen der Coefficient von α_1 nämlich $x_{\sigma_1} - x_{\tau_1}$ verschwindet und setzen das obige Product

$$= M' \prod \{N_{\lambda'} + \alpha_1 P_{\lambda'}\},$$

wo M' von α_1 unabhängig ist. Soll nun dieser Ausdruck für jede Wal der Werte von α verschwinden, so geschieht dies auch dann, wenn man $\alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ willkürlich annimmt, α_1 aber derart bestimmt, dass es keinen der Werte

$$-\frac{N_{\lambda'}}{P_{\lambda'}}$$

erhält, deren Anzahl ja höchstens $n!$ und von denen keiner ∞ ist. Der zweite Factor verschwindet dann sicher für die getroffene Wal der α nicht; es müsste also M' bei beliebiger Wal von $\alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ Null werden. Nun können wir ebenso wieder anordnen

$$M' = M'' \prod \{N_{\lambda''} + \alpha_2 P_{\lambda''}\},$$

wobei M'' von α_2 unabhängig ist. Wählen wir $\alpha_3, \alpha_4, \dots \alpha_n$ wieder willkürlich und nehmen α_2 so an, dass keiner der Factoren $N_{\lambda''} + P_{\lambda''}\alpha_2$ verschwindet, dann erkennt man, dass schon M'' für jede Wal von $\alpha_3, \alpha_4, \dots$ Null werden muss, u. s. w.

Da aber in keiner Differenz $\varphi_\sigma - \varphi_\tau$ die Coefficienten aller α verschwinden können, so kommt man schliesslich auf ein M_ν , welches eine Constante und daher in unserem Falle, wo dieselbe identisch verschwinden soll, gleich Null werden müsste. Das ist aber unmöglich.

Das Product

$$\Pi(\varphi_\sigma - \varphi_\tau)$$

kann also nicht identisch Null sein. Man kann daher stets Wertsysteme für die α wählen, für die alle $n!$ möglichen Werte von φ verschieden sein werden.

So haben wir gezeigt:

Für jede Function giebt es eine Gruppe von Substitutionen, deren Anwendung auf die Function den Ausdruck derselben nicht ändert.

Für jede Gruppe von Substitutionen giebt es Functionen, die für alle Substitutionen der Gruppe und nur für diese ihren Wert nicht ändern.

Offenbar giebt es unendlich viele Functionen, welche derselben Gruppe zugeordnet sind; z. B. werden alle rationalen ganzen Functionen einer jeden dazu gehören. Von dem algebraischen Zusammenhange aller dieser Functionen wird später die Rede sein.

Uebrigens liefert die hier gegebene Ableitung zwar stets die geforderten Functionen, meistens aber in viel zu complicirten Ausdrücken. So würde, wenn man von der im § 3. aufgestellten Gruppe

$$1; (x_1x_2); (x_3x_4); (x_1x_3)(x_2x_4); (x_1x_3x_2x_4); \\ (x_1x_3)(x_2x_4); (x_1x_4)(x_2x_3); (x_1x_4x_2x_3)$$

ausginge, die zugehörige Function in der schwerfälligen Form eines Productes von 8 Factoren $u - [a_1x_{i_1} + a_2x_{i_2} + a_3x_{i_3} + a_4x_{i_4}]$ erscheinen, während wir wissen, dass die Function $\varphi = x_1x_2 + x_3x_4$ der Forderung bereits genügt.

§ 6.

Zunächst wollen wir, um von dem eben dargelegten Zusammenhange zwischen Gruppen und Functionen einigen Vorteil zu ziehen, mit seiner Hülfe allgemeine Gruppen für eine beliebige Gradzahl n bilden.

1) Alle $n!$ Substitutionen zwischen n Elementen bilden eine Gruppe des Grades n und der Ordnung $n!$; sie heisst die symmetrische Gruppe. Die Existenz der Gruppe

ist klar; die zu ihr gehörigen Functionen sind die symmetrischen. Die Gruppe ist transitiv d. h. sie setzt alle Elemente mit einander in Verbindung, ja sie ist sogar $n-1$ fach transitiv, d. h. es giebt in der Gruppe Substitutionen, welche $n-1$ beliebig gewählte Elemente auf $n-1$ beliebig gewählte andere folgen lassen.

2) Alle Substitutionen, die aus je einer geraden Anzahl von Transpositionen bestehen, bilden eine Gruppe des Grades n und der Ordnung $\frac{1}{2}n!$; die Gruppe heisst die alternirende Gruppe. Die Existenz der Gruppe leitet man am einfachsten aus der Existenz der zu ihr gehörigen alternirenden Functionen ab. Wir bezeichnen die n Grössen statt mit x_i hier der Einfachheit halber mit

$$a, b, c, d, \dots k, l,$$

und bilden das Product der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Differenzen

$$\begin{aligned} &(b-a), \\ &(c-a), (c-b), \\ &(d-a), (d-b), (d-c), \\ &\dots \dots \dots \\ &(l-a), (l-b), \dots (l-k), \end{aligned}$$

welches wir mit φ bezeichnen. Dann ist φ die verlangte alternirende Function. In der That, sind α und β irgend zwei der obigen n Grössen, welche sich in die Reihe derselben wie folgt einordnen

$$a, b, \dots f, \alpha, g, \dots h, \beta, i, \dots l,$$

so gehört die Differenz $\beta-\alpha$ zu den Factoren von φ . Die übrigen Factoren von φ , welche α oder β enthalten, gehören einer der drei Reihen an

$$\begin{array}{l|l} (\alpha-a), \dots (\alpha-f) & (\beta-a), \dots (\beta-f); \\ (g-\alpha), \dots (h-\alpha) & (\beta-g), \dots (\beta-h); \\ (i-\alpha), \dots (l-\alpha) & (i-\beta), \dots (l-\beta). \end{array}$$

Die Factoren jeder einzelnen der drei Reihen kann man derart gruppieren, dass das Product derselben durch die Substitution $(\alpha\beta)$ nicht geändert wird, nämlich so:

$$(\alpha-a)(\beta-a), \dots; (g-\alpha)(\beta-g), \dots; (i-\alpha)(i-\beta), \dots;$$

dagegen wandelt die Transposition $(\alpha\beta)$ die Differenz $(\beta-\alpha)$ in $(\alpha-\beta)$ um und ändert die Factoren, welche weder α noch β enthalten, überhaupt nicht. Die Transposition $(\alpha\beta)$ wandelt daher φ in $-\varphi$ um. Das Product zweier und daher auch jeder geraden Anzahl von Transpositionen lässt folglich φ un-

geändert. Das Product aus einer ungeraden Anzal von Transpositionen verwandelt φ in $-\varphi$.

Da ferner oben § 2. gezeigt ist, dass jede Substitution in ein Product von Transpositionen zerlegt werden kann, so folgt, dass φ überhaupt nur die Werte $+\varphi$ und $-\varphi$ hat; ferner dass, wenn eine Substitution einmal in ein Product aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Transpositionen zerlegt wird, jede andere Zerlegung derselben wieder den gleichen Charakter hinsichtlich der geraden resp. ungeraden Anzahl von Factoren behält.

Multiplicirt man alle verschiedenen Substitutionen, welche aus einer geraden Anzahl von Transpositionen zusammengesetzt sind, mit ein und derselben Transposition, so erhält man ebenso viele verschiedene Substitutionen, welche aus einer ungeraden Anzahl von Transpositionen bestehen; es giebt also mindestens ebensoviele der zweiten als solche der ersten Art; umgekehrt findet aber dasselbe statt: die Anzahlen der Substitutionen beider Arten sind also einander gleich, und die Ordnung r der alternirenden Gruppe ist gleich der Hälfte der Ordnung der symmetrischen Gruppe, d. h.

$$r = \frac{1}{2}n!$$

Man erkennt unmittelbar, dass die Gruppe $n-2$ fach transitiv ist.

3) Bezeichnet p^f die höchste das Product $1.2 \dots n$ teilende Potenz der Primzahl p , so giebt es eine Gruppe des Grades n und der Ordnung p^f .

Für $n < p^2$ ist das Theorem klar. Denn ist $n = ap + b$, ($a, b < p$), so sind aus den Zahlen 1, 2, ... n nur $p, 2p, \dots ap$ und zwar jede durch die erste Potenz von p teilbar; es wird also $f = a$. Daher nimmt man aus den n Elementen a Systeme von je p Elementen heraus, bildet aus jedem einen Cyklus, (wobei wir bequemerer Bezeichnung wegen nur die Indices der x angeben) nämlich

$$\begin{aligned} s_1 &= (1, 2, \dots, p); \\ s_2 &= (p+1, p+2, \dots, 2p); \\ s_3 &= (2p+1, 2p+2, \dots, 3p); \\ &\vdots \\ s_a &= (ap-p+1, \dots, ap), \end{aligned}$$

und die Gruppe, welche aus diesen α Substitutionen besteht,

$$\Phi = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n]$$

wird die verlangte sein. Jene α Substitutionen haben nämlich kein

Element mit einander gemein; ihre Ordnung ist also nach § 4. gleich dem Producte der einzelnen Ordnungen, d. h. gleich p^a .

Ist aber $n = p^2$, so wird $f = p + 1$. Denn jede der ersten $(p-1)$ Zalen der Reihe

$$p, 2p, 3p, \dots (p-1)p, p \cdot p$$

ist durch die erste Potenz, die letzte ist dagegen durch die zweite Potenz von p teilbar; f wird hier also $= p + 1$, und die Gruppe der p wie oben gebildeten Substitutionen

$$\Psi = [s_1, s_2, \dots s_p]$$

reicht daher gemäss ihrer Ordnung p^2 nicht mehr aus. Nimmt man aber zu Ψ noch die Substitution

$$s_{p+1} = (1, p+1, 2p+1, \dots pp-p+1, 2, p+2, \dots pp-p+2, \\ 3, \dots, p, 2p, \dots p^2)$$

hinzu, welche alle p^2 Elemente umfasst und die Elemente der einzelnen p Cyklen verbindet, so wird

$$\Phi = [s_1, s_2, \dots s_p, s_{p+1}]$$

die verlangte Gruppe sein. Zuerst ist es ersichtlich, dass die ersten $p-1$ Potenzen von s_{p+1} nicht in Ψ vorkommen, während die p te bereits in Ψ enthalten ist; ferner dass alle $p \cdot p$ Substitutionen, welche aus der Multiplication von s_{p+1}^α ($\alpha = 0, 1, \dots, p-1$) mit einer Substitution von Ψ entstehen, von einander verschieden sind; endlich überzeugt man sich leicht, dass

$$s_1 \cdot s_{p+1} = s_{p+1} \cdot s_2 \text{ und allgemein } s_\alpha \cdot s_{p+1} = s_{p+1} \cdot s_{\alpha+1}$$

ist, dass man also jeden aus den s gebildeten Ausdruck durch Vertauschung nebst entsprechender Veränderung der Factoren s_α in $s_{\alpha+1}$ oder, wenn $\alpha = p$ ist, in s_1 auf die Form

$$s_{p+1}^\alpha s_1^\beta s_2^\gamma \dots s_p^\delta \quad (\alpha, \beta, \gamma, \dots \delta = 0, 1, \dots p-1)$$

bringen kann. Φ hat daher auch nicht mehr als $p \cdot p$ Substitutionen und genügt also der aufgestellten Bedingung.

Ist $n < p^2$, also $n = ap^2 + bp + c$ ($a, b, c < p$), so wält man a Systeme von je p^2 Elementen und b Systeme zu je p Elementen, bildet aus jedem einzelnen Systeme die entsprechende Gruppe und multiplicirt diese mit einander. Die entstehende Gruppe entspricht den Bedingungen. Denn das Product der Zalen

$$(a-1)p^2+1, \dots (a-1)p^2+p, \dots ap^2 \quad (a < p)$$

ist eben nur durch dieselbe Potenz von p teilbar, als dasjenige von

$$1, \dots p, \dots p^2.$$

Ist dagegen $n = p^3$, so kommt für

$$(p-1)p^2+1, \dots (p-1)p^2+p, \dots p^3$$

durch das letzte Glied eine neue Potenz von p dazu, so dass in diesem Falle die Multiplication der Teilgruppen nicht genügt; hier nimmt man aber, genau wie bei $n = p^2$ noch

$$s = (1, p+1, \dots p^3-p+1, 2, p+2, \dots p^3-p+2, \dots p, 2p, \dots p^3)$$

hinzu und zeigt genau wie in jenem Falle die Richtigkeit des aufgestellten Satzes.

Zugleich ist ersichtlich, dass die angewendeten Schlüsse allgemein gültig sind.

Im Falle dass n eine Potenz von p ist, wird die Gruppe transitiv, sonst nicht.

§ 7.

Wir haben in § 5. gesehen, dass, wie zu jeder Function eine Gruppe gehört, deren Substitutionen den Wert der Function ungeändert lassen, so auch zu jeder Gruppe Functionen gehören, deren Wert nur für die Substitutionen der Gruppe ungeändert bleibt; wir haben ferner in § 6. einige Gruppen wirklich gebildet und kehren nun zu den Untersuchungen des § 3. über die verschiedenen Werte einer Function zurück.

Wenn $\varphi(x_1, \dots x_n)$ keine symmetrische Function ist, oder mit anderen Worten, wenn die Substitutionen $s_1 = 1, s_2, \dots s_r$ der Gruppe Φ , welche φ ungeändert lässt, nicht alle möglichen $n!$ Substitutionen erschöpfen, so nimmt φ durch Vermittelung einer Substitution σ noch einen anderen Wert φ_σ an. Wendet man auf φ_σ umgekehrt σ^{-1} an, dann ein beliebiges s_λ der Gruppe Φ , darauf wieder σ , so geht φ_σ dadurch zuerst in φ über, bleibt dann ungeändert und verwandelt sich darauf wieder in φ_σ , d. h. die Aufeinanderfolge oder das Product der Substitutionen $\sigma^{-1}, s_\lambda, \sigma$ lässt φ_σ ungeändert.

Es behält also φ_σ mindestens für die r Substitutionen

$$\sigma^{-1}s_1\sigma = 1, \sigma^{-1}s_2\sigma, \dots \sigma^{-1}s_r\sigma$$

denselben Wert; aber auch nur für diese. Denn aus $\varphi_{\sigma\tau} = \varphi_\sigma$ folgt $\varphi_{\sigma\tau\sigma^{-1}} = \varphi_1$, also ist $\sigma\tau\sigma^{-1} = s_\lambda$ und $\tau = \sigma^{-1}(s_\lambda\sigma) = \sigma^{-1}s_\lambda\sigma$, wie behauptet war. Endlich sind alle Substitutionen jener Reihe von einander verschieden. Denn aus der Gleichung

$$\sigma^{-1}s_\lambda\sigma = \sigma^{-1}s_\mu\sigma \text{ folgt unmittelbar } s_\lambda = s_\mu.$$

Es bleibt daher φ_σ gleichfalls für eine Gruppe Φ_σ der Ordnung r ungeändert.

Dass die neuen Substitutionen wieder eine Gruppe bilden, ergibt sich nicht nur aus ihrer Eigenschaft, φ_σ unverändert zu lassen, sondern auch aus ihrer Form. Das Product zweier von ihnen

$$(\sigma^{-1}s_\lambda\sigma)(\sigma^{-1}s_\mu\sigma) = \sigma^{-1}.s_\lambda s_\mu.\sigma = \sigma^{-1}.s_\nu.\sigma$$

erscheint nämlich in derselben charakteristischen Darstellung, welche jeder Factor besass.

Ebenso ist es leicht zu sehen, dass alle Substitutionen $s_\lambda\sigma$ den Ausdruck φ_1 in φ_σ überführen und dass dies die einzigen sind; ferner dass die $2r$ Substitutionen $s_\lambda, s_\lambda\sigma$ ($\lambda = 1, 2, \dots r$) von einander verschieden sind. Bei den s_λ und $\sigma^{-1}s_\lambda\sigma$ braucht eine solche Verschiedenheit nicht aufzutreten; es können nicht einmal sämtliche r Substitutionen der einen von denen der andern Art verschieden sein, da ja schon die Substitution $s_1 = 1$ gleichfalls $\sigma^{-1}s_1\sigma = 1$ ergibt.

Erschöpfen die $2r$ Substitutionen $s_\lambda, s_\lambda\sigma$ noch nicht alle $n!$ möglichen, so gibt es für eine neue Substitution τ auch einen neuen Wert φ_τ . Für diesen bleiben alle obigen Schlüsse in Kraft, d. h. φ_τ bleibt für alle r Substitutionen der Gruppe $\tau^{-1}s_\lambda\tau$ ungeändert; φ_1 wird durch alle Substitutionen des Systems $s_\lambda\tau$ in φ_τ übergeführt; alle $3r$ Substitutionen $s_\lambda, s_\lambda\sigma, s_\lambda\tau$ ($\lambda = 1, \dots r$) sind von einander verschieden. In derselben Weise kann man weiter gehen, bis alle $n!$ möglichen Substitutionen erschöpft sind. Daraus folgt:

I. Die Ordnung r einer Gruppe Φ von n Elementen ist ein Teiler von $n!$.

II. Die Zahl q der Werte einer Function φ von n Veränderlichen ist ein Teiler von $n!$.

III. Das Product aus der Zahl q der Werte einer Function φ in die Ordnung r der zu φ gehörigen Gruppe ist $n!$.

IV. Sind $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_q$ die q Werte, welche φ annehmen kann, und gehört zu φ_1 die Gruppe Φ_1 ; entstehen ferner $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_q$ aus φ_1 durch Anwendung der Substitutionen $\sigma_1 = 1, \sigma_2, \dots \sigma_q$, so gehören zu $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_q$ die Gruppen $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_q$ mit den Substitutionen

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, & s_2, & \dots & s_r; \\ \sigma_2^{-1}s_1\sigma_2 &= 1, & \sigma_2^{-1}s_2\sigma_2, & \dots & \sigma_2^{-1}s_r\sigma_2; \\ \sigma_3^{-1}s_1\sigma_3 &= 1, & \sigma_3^{-1}s_2\sigma_3, & \dots & \sigma_3^{-1}s_r\sigma_3; \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_q^{-1}s_1\sigma_q &= 1, & \sigma_q^{-1}s_2\sigma_q, & \dots & \sigma_q^{-1}s_r\sigma_q. \end{aligned}$$

Diese Art der Ableitung von $\sigma^{-1}s_\lambda\sigma$ aus s_λ heisst Transformation von s_λ durch σ ; $\sigma^{-1}s_\lambda\sigma$ ist die transformirte von s_λ durch σ . Wir wollen zeigen, dass die transformirte $\sigma^{-1}s_\lambda\sigma$ mit s_λ in der Zahl der Cyklen und der Zahl der Elemente jedes einzelnen Cyklus übereinstimmt, so dass man $\sigma^{-1}s_\lambda\sigma$ aus s_λ erhält, indem man jedes Element von s_λ durch dasjenige ersetzt, welches σ darauf folgen lässt, und dass man also nach unserer ersten Bezeichnung schreiben könnte

$$\sigma^{-1}s_\lambda\sigma = \left(\begin{smallmatrix} \sigma \\ s_\lambda \end{smallmatrix} \right).$$

In der That, es mögen x_1, x_2, x_3, \dots einen Cyklus von s_λ bilden, und es möge σ die Elementenfolgen $x_1x_{k_1}, x_2x_{k_2}, x_3x_{k_3}, \dots$ enthalten, wo, wenn z. B. x_2 nicht in σ vorkommt, $k_2 = 2$ zu setzen ist. Dann fñhrt σ^{-1} das Element x_{k_1} nach x_1 , s_λ fñhrt x_1 nach x_2 und σ fñhrt x_2 in x_{k_2} über; es tritt daher an Stelle von x_1x_2 jetzt $x_{k_1}x_{k_2}$ u. s. w.

In gleicher Weise wie von transformirten Substitutionen sprechen wir auch von transformirten Gruppen, so dass z. B. Φ_2 die transformirte von Φ_1 durch σ_2 oder dass $\Phi_2 = \sigma_2^{-1}\Phi_1\sigma_2$ ist.

So sahen wir, dass die Function

$$\varphi_1 = x_1x_2 + x_3x_4$$

drei Werte habe, und dass ihre Gruppe von der Ordnung 8 sei. Die Substitution $\sigma = (x_1x_3)$ gehört nicht zu der Gruppe Φ_1 von φ_1

$$\begin{aligned} &1, (x_1x_2); (x_3x_4); (x_1x_2)(x_3x_4); (x_1x_3x_2x_4); \\ &(x_1x_3)(x_2x_4); (x_1x_4)(x_2x_3); (x_1x_4x_2x_3); \end{aligned}$$

σ wandelt φ_1 in $\varphi_\sigma = x_1x_4 + x_2x_3$ um; dasselbe tun alle $s_\lambda\sigma$, nämlich

$$\begin{aligned} &(x_1x_3); (x_1x_2x_3); (x_1x_3x_4); (x_1x_2x_3x_4); \\ &(x_2x_4x_3); (x_2x_4); (x_1x_4x_3x_2); (x_1x_4x_2). \end{aligned}$$

Diese 16 Substitutionen erschöpfen noch nicht alle 4! möglichen; $\tau = (x_2x_3)$ gehört nicht zu denselben; man erhält $\varphi_\tau = x_1x_3 + x_2x_4$ und die fehlenden 8 Substitutionen erhält man durch die $s_\lambda\tau$:

$$\begin{aligned} &(x_2x_3); (x_1x_3x_2); (x_2x_3x_4); (x_1x_3x_4x_2); \\ &(x_1x_2x_4); (x_1x_2x_4x_3); (x_1x_4); (x_1x_4x_3). \end{aligned}$$

§ 8.

Die Beweise der soeben aufgestellten Sätze beruhen darauf, dass wir alle überhaupt möglichen $n!$ Substitutionen durch die Complexe von je r Substitutionen $s_\lambda; s_\lambda s_\mu; s_\lambda s_\nu; \dots$ ($\lambda = 1, \dots, r$) erschöpfen.

Derselbe Schluss ist aber auch in dem allgemeineren Falle anwendbar, dass alle Substitutionen der zu φ gehörigen Gruppe Φ in der zu einer anderen Function ψ gehörigen Gruppe Ψ enthalten sind, mit andern Worten, dass die Gruppe Ψ die Gruppe Φ enthält. Denn in diesem Falle bleiben zuerst φ_1 und ψ_1 für die Substitutionen von Φ ungeändert. Enthält Ψ ausser diesen noch eine andere Substitution σ_2 , so wird für alle $s_1\sigma_2$ φ denselben Wert φ_{σ_2} annehmen und, wie oben bewiesen wurde, sind die $2r$ Substitutionen $s_1, s_1\sigma_2$ von einander verschieden. Bleibt ψ_1 ausser für diese $2r$ auch noch für eine neue Substitution σ_3 ungeändert, so erhält man dadurch $3r$ in Ψ enthaltene Substitutionen u. s. w., bis alle Substitutionen der Gruppe Ψ erschöpft sind. Daraus ergeben sich folgende Sätze:

I. Sind alle Substitutionen der Gruppe Φ in der Gruppe Ψ enthalten, so ist die Ordnung von Φ ein Teiler der Ordnung von Ψ .

II. Sind zwei Functionen φ und ψ derselben Elemente x_1, \dots, x_n gegeben, und behält ψ für alle Substitutionen, welche φ nicht ändern, denselben Wert, so ist die Anzahl der Werte von φ ein Vielfaches der Anzahl der Werte von ψ .

Aus I. ergibt sich im Besonderen:

III. Enthält Ψ eine Substitution der Ordnung k , so ist die Ordnung r von Ψ durch k teilbar.

IV. Enthält Ψ eine Gruppe der Primzalpotenz-Ordnung p^α , so ist r durch p^α teilbar.

Sind alle Substitutionen von Φ in Ψ enthalten, so kann man von der ersteren Gruppe zur letzteren dadurch kommen, dass man zu jener noch einige Substitutionen von Ψ dazunimmt. σ_1 sei eine solche in Ψ aber nicht in Φ enthaltene Substitution; σ_1^m die niedrigste Potenz derselben, welche in Φ vorkommt. Diese kann natürlich auch gleich 1 werden. Ist nun m keine Primzal, so heben wir aus derselben eine solche p heraus, etwa $m = p \cdot m_1$ und bilden $\sigma = \sigma_1^{m_1}$; dann gehört σ zu Ψ aber noch nicht zu Φ ; die niedrigste Potenz von σ jedoch, die sich in Φ findet, hat als Exponenten eine Primzal. Ist nun die Gruppe $\Omega = (\Phi, \sigma_1)$ noch nicht mit Ψ identisch, dann kann man aus Ψ eine neue Substitution τ wählen, so dass auch die niedrigste Potenz von τ , welche in Ω auftritt vom Primzgrade ist, und so kann man fortfahren, bis Ψ erreicht ist.

Stimmen ferner die Gruppen Φ und Ψ der Functionen φ und ψ in einigen Substitutionen überein, so folgt schon aus diesem Be-

griff, dass alle diese eine Gruppe bilden, die sowol in Φ als in Ψ enthalten ist. Diese sei Ω mit den Substitutionen $t_1 = 1, t_2, \dots, t_r$, dann ist die Ordnung von Φ wie die von Ψ ein Vielfaches von r .

Wir sahen in § 6., dass zu jeder Gruppe Functionen gebildet werden können. In unserem Falle lassen sich solche leicht finden; denn wenn φ zu Φ und ψ zu Ψ gehört, dann stellt

$$\alpha_1 \varphi + \alpha_2 \psi$$

für willkürliche Constanten derartige Functionen dar. Dieselben können nämlich nur für diejenigen Substitutionen denselben Wert behalten, welche φ wie ψ ungeändert lassen, d. h. nur für die r Substitutionen t_1, \dots, t_r von Ω . Wir sehen also:

V. Ist Φ die zu φ , Ψ die zu ψ gehörige Gruppe, so gehört zu $\alpha_1 \varphi + \alpha_2 \psi$ die Gruppe der Φ und Ψ gemeinsamen Substitutionen.

§ 9.

Es ist von theoretischem wie von praktischem Interesse zu zeigen, dass der Satz § 8, IV. eine Umkehrung erlaubt.

Ist die Ordnung r einer Gruppe Φ durch p^α , die Potenz einer Primzahl teilbar, so enthält Φ Gruppen der Ordnung p^α .

Dies kann folgendermassen bewiesen werden:

Wenn φ die zur Gruppe Φ gehörige Function ist, und wenn ψ zu der in § 5. 3) aufgestellten Gruppe Ψ des Grades n und der Ordnung p^f gehört, wo also p^f die höchste Potenz von p ist, welche $n!$ teilt, so hat ψ im ganzen $n! : p^f$ Werte. Wir bilden jetzt alle möglichen Ausdrücke

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_g, \quad (p^f \cdot g = n!)$$

welche ψ annehmen kann. Unter diesen suchen wir diejenige Function ψ_1 , deren Gruppe Ψ_1 (welche eine Transformirte von Ψ ist) mit der Gruppe Φ von φ möglichst viele Substitutionen gemeinsam hat. Es sei dies ψ_1 ; zu ψ_1 gehöre Ψ_1 , und die den Gruppen $\Phi = \Phi_1$ und Ψ_1 gemeinsame Gruppe Ω_1 sei von der Ordnung p^{β_1} . Diese Ordnung muss eine Potenz von p sein, da Ω_1 in Ψ_1 enthalten ist, und daher nach § 8. die Ordnung von Ω_1 diejenige p^f von Ψ_1 teilen muss. Hiernach wird unter den Ausdrücken

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \psi_2, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \psi_3, \dots, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \psi_g$$

keiner sein, dessen Gruppe $\Omega_2, \Omega_3, \dots \Omega_g$ von höherer Ordnung $p^{\beta_2}, p^{\beta_3}, \dots p^{\beta_g}$ ist als p^{β_1} , d. h. als die Ordnung der zu

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_1$$

gehörigen Gruppe Ω_1 .

Wir betrachten jetzt sämtliche Werte der Functionen

$$\alpha_1\varphi_\lambda + \alpha_2\psi_\mu$$

$$\left(\lambda = 1, 2, \dots \frac{n!}{r}; \quad \mu = 1, 2, \dots \frac{n!}{p^f} \right).$$

Ihre Anzahl ist $\frac{n!}{r} \cdot \frac{n!}{p^f}$; denn die Gruppen Φ, Ψ haben bezüglich die Ordnung r, p^f und daher besitzt nach § 7. III. φ bezüglich ψ $\frac{n!}{r}$ bezüglich $\frac{n!}{p^f}$ Werte. Ein Teil derselben ist unter den Werten enthalten, welche $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_1$ bei gleichzeitiger Anwendung aller $n!$ Substitutionen auf φ_1 und ψ_1 annehmen kann. Die Zahl derselben ist $\frac{n!}{p^{\beta_1}}$, da, wie wir eben sahen, die Gruppe der Function $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_1$ von der Ordnung p^{β_1} wird. Gibt es noch einen neuen Wert von $\alpha_1\varphi_\lambda + \alpha_2\psi_\mu$, d. h. einen solchen, den $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_1$ nicht annehmen kann, und nennen wir diesen

$$\alpha_1\varphi_i + \alpha_2\psi_k,$$

so ist der durch die Substitution ι^{-1} aus ihm entstehende

$$\alpha_1\varphi_{\iota i} + \alpha_2\psi_{k \iota} = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_{k \iota^{-1}}$$

auch nicht unter den Werten von $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_1$ enthalten. Denn käme $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_{k \iota^{-1}}$ unter denselben vor, dann müsste auch der durch die Substitution ι daraus entspringende $\alpha_1\varphi_i + \alpha_2\psi_k$ vorkommen. $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_{k \iota^{-1}}$ hat nun seinerseits eine Gruppe der Ordnung p^{β_2} , also liefert, wenn wir $\psi_{k \iota^{-1}}$ kurz mit ψ_2 bezeichnen, $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_2$ im ganzen $\frac{n!}{p^{\beta_2}}$ Werte, von denen keiner einem der Werte von $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_1$ gleich sein kann. Wäre nämlich der aus $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_1$ mittels der Substitution σ abgeleitete Wert dem aus $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_2$ mittels τ abgeleiteten gleich, so wäre gegen die Voraussetzung

$$(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_1)\sigma\tau^{-1} = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_2.$$

Gibt es ausser den so erhaltenen $\frac{n!}{p^{\beta_1}} + \frac{n!}{p^{\beta_2}}$ verschiedenen Ausdrücken unter den $\alpha_1\varphi_\lambda + \alpha_2\psi_\mu$ noch andere, so gelten wieder dieselben Schlüsse. Es giebt dann eine neue Function

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \psi_2,$$

welche nicht in den bisherigen Ausdrücken vorkommt, und diese liefert ihrerseits neue $\frac{n!}{p^{\beta_1}}$ Werte, welche unter sich und von allen früheren verschieden sind. Man kann also sämtliche $\frac{n!}{r} \cdot \frac{n!}{p^f}$ Werte, die $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \psi_2$ annehmen kann in dieser Weise erhalten. Daher ist

$$\frac{n!}{r} \cdot \frac{n!}{p^f} = \frac{n!}{p^{\beta_1}} + \frac{n!}{p^{\beta_2}} + \frac{n!}{p^{\beta_3}} + \dots$$

Nun war $\beta_1 >$ oder $= \beta_2, \beta_3, \dots$, folglich ist diese Summe ein Vielfaches des ersten Summanden, und daher wird

$$\frac{n!}{r} \cdot \frac{n!}{p^f} = m \cdot \frac{n!}{p^{\beta_1}}$$

oder

$$p^{\beta_1} \cdot n! = m \cdot r \cdot p^f.$$

Die höchste Potenz von p , welche $n!$ teilt, ist p^f , folglich ist die linke Seite nur durch $p^{f+\beta_1}$ teilbar, also enthält r höchstens den Factor p^{β_1} . Da aber der Annahme nach $\Phi = \Phi_1$ mit Ψ_1 eine Gruppe der Ordnung p^{β_1} gemein hatte, so besitzt nach § 8. IV. r auch mindestens den Factor p^{β_1} ; folglich hat r genau diesen Factor, oder es ist

$$r = p^{\beta_1} \cdot q,$$

wo q zu p relativ prim sein wird.

Hätte Φ eine Gruppe des Grades $p^a > p^{\beta_1}$, so wäre r durch p^a teilbar, was unserer Gleichung widerspricht. Man sieht daraus also nicht nur die Wahrheit des obigen Satzes, sondern auch, dass die Gruppe Ψ der Ordnung p^f stets eine Gruppe der Ordnung p^{β_1} enthält, die zu einer beliebigen Gruppe derselben Ordnung die Transformirte ist, dass es also keine Gruppe von n Elementen von der Ordnung p^f giebt, deren Typus nicht in der Gruppe Ψ der Ordnung p^f vorkommt.

§ 10.

Nachdem wir bisher die allgemeinen Beziehungen zwischen Functionen von n Elementen und den zugehörigen Substitutionsgruppen n ten Grades behandelt haben, suchen wir jetzt die algebraischen Relationen zwischen Functionen φ und ψ , deren Gruppen entweder einander gleich sind, oder bei denen die Gruppe der einen in der-

jenigen der andern enthalten ist, oder bei denen endlich die zugehörigen Gruppen gemeinsame Substitutionen enthalten.

Wir sahen, dass $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ für die Substitutionen einer gewissen Gruppe Φ seinen Wert nicht ändert. φ ist aber nicht die einzige Function, welche in dieser Weise zu Φ gehört; so wird z. B. jede rationale Function von φ dieselbe Eigenschaft besitzen.

Dieser Satz lässt sich auch umkehren: Jede Function ψ , deren zugehörige Gruppe mit der von φ übereinstimmt, ist durch φ rational darstellbar, d. h. als Coefficienten des Ausdrucks in φ nur die elementaren symmetrischen Functionen a_1, a_2, \dots, a_n der x_1, x_2, \dots, x_n auftreten.

Bevor wir aber zu diesem Beweise kommen können, ist es nötig zu zeigen, dass alle symmetrischen ganzen Functionen von x_1, x_2, \dots, x_n sich rational und ganz durch die elementaren symmetrischen Functionen dieser Grössen, d. h. durch die Coefficienten des Ausdrucks

$$(1) \quad f(x) \equiv x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots \pm a_n$$

darstellen lassen. Wenn wir

$$(5) \quad \frac{f(x)}{x - x_1} = x^{n-1} - b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} - \dots \mp b_{n-1}$$

setzen, so wird

$$(6) \quad \begin{aligned} b_1 &= a_1 - x_1; \\ b_2 &= a_2 - b_1 x_1 = a_2 - a_1 x_1 + x_1^2; \\ b_3 &= a_3 - b_2 x_1 = a_3 - a_2 x_1 + a_1 x_1^2 - x_1^3; \\ &\dots \end{aligned}$$

Dies ergibt sich, wenn man das Product der rechten Seite von (5) mit $(x - x_1)$ multiplicirt der rechten Seite von (1) gleichsetzt. Wüsste man nun bereits, dass jede ganze symmetrische Function der $n-1$ Grössen x_2, \dots, x_n sich als ganze Functionen der elementaren symmetrischen Functionen dieser x , also der Grössen b_1, b_2, \dots, b_{n-1} ausdrücken lässt und könnte man daraus die Richtigkeit desselben Satzes für die n Grössen x_1, \dots, x_n ableiten, so würde er allgemein gelten, da er für $n = 1$ richtig ist.

Um diesen Schluss von $n-1$ auf n zu machen, ordnet man die vorgelegte symmetrische ganze Function $G(x_1, \dots, x_n)$ nach Potenzen von x_1 , so dass

$$G(x_1, \dots, x_n) = x_1^\alpha G_0(x_2, \dots, x_n) + x_1^{\alpha-1} G_1(x_2, \dots, x_n) + \dots$$

wird, dann sind die Coefficienten G_0, G_1, \dots ganze Functionen der x , da G in den x ganz sein sollte, und zugleich sind sie symmetrisch in x_2, x_3, \dots, x_n . Denn macht man irgend eine Substitution, welche x_1 nicht ändert, $s = (x_1)(x_2 x_{i_2} \dots)$, so würde die Differenz des vorigen und des neuen Ausdrucks als Gleichung aufgefasst

$$0 = x_1^\alpha \{ G_0(x_2, \dots, x_n) - G_0(x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \} + \dots$$

eine Beziehung zwischen x_1, x_2, \dots, x_n feststellen, falls nicht eben identisch $G_\lambda(x_2, \dots, x_n) = G_\lambda(x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ wäre. G sollte aber symmetrisch sein, ganz abgesehen von irgend welchen Relationen zwischen den Elementen, da der Begriff der Symmetrie eine rein formale Bildung für G fordert. Die G_λ sind also tatsächlich in den $n-1$ Elementen x_2, \dots, x_n symmetrisch und daher der Voraussetzung nach ganze Functionen der elementaren symmetrischen Functionen von x_2, \dots, x_n d. h. von b_1, b_2, \dots, b_{n-1} , folglich nach (6) ganze Functionen von a_1, \dots, a_n, s_1 ; deshalb wird

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) &= x_1^\alpha G_0'(a_1, \dots, a_n; x_1) + x_1^{\alpha-1} G_1'(a_1, \dots, a_n; x_1) + \dots \\ &= x_1^\beta K_0(a_1, \dots, a_n) + x_1^{\beta-1} K_1(a_1, \dots, a_n) + \dots \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung können alle Potenzen x_1^λ , deren Exponent $\lambda > n-1$ ist mit Hilfe von (1) weggeschafft werden; denn man hat, da x_1 eine Wurzel von $f(x) \equiv x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots = 0$ ist

$$\begin{aligned} x_1^n &= a_1 x_1^{n-1} - a_2 x_1^{n-2} + \dots; \\ x_1^{n+1} &= a_1 x_1^n - a_2 x_1^{n-1} + \dots = (a_1^2 - a_2) x_1^{n-1} - (a_1 a_2 - a_3) x_1^{n-2} + \dots; \\ x_1^{n+2} &= (a_1^2 - a_2) x_1^n - (a_1 a_2 - a_3) x_1^{n-1} + \dots \\ &= (a_1^3 - 2a_1 a_2 + a_3) x_1^{n-1} - (a_1^2 a_2 - a_2^2 + a_1 a_3 - a_4) x_1^{n-2} + \dots; \\ &\dots \end{aligned}$$

Durch Substitution dieser Werte erhält man

$$G(x_1, \dots, x_n) = x_1^{n-1} L_0(a_1, \dots, a_n) + x_1^{n-2} L_1(a_1, \dots, a_n) + \dots + L_{n-1}(a_1, \dots, a_n).$$

Die linke Seite dieser Gleichung bleibt, da G symmetrisch ist, für jede Substitution der x ungeändert; macht man eine solche, welche x_1 umsetzt, z. B. $s = (x_1 x_i)$, wo $i = 2, 3, \dots, n$ sein kann, und subtrahirt beide Ausdrücke, so ist

$$0 = (x_1^{n-1} - x_i^{n-1}) L_0 + (x_1^{n-2} - x_i^{n-2}) L_1 + \dots + (x_1 - x_i) L_{n-2}.$$

Die rechte Seite ist nach x_i vom $n-1$ ten Grade; trotzdem hat die Gleichung n Wurzeln, nämlich

$$x_i = x_1, x_2, \dots x_n;$$

folglich ist die rechte Seite identisch Null, d. h. es ist

$$L_0 = 0, L_1 = 0, \dots L_{n-2} = 0$$

und daher auch

$$G(x_1, x_2, \dots x_n) = L_{n-1}(a_1 \dots a_n).$$

Damit ist der Beweis geliefert, und zugleich ist der Ausdruck von G durch die a hergestellt.

Da ferner jede Function, welche für alle Substitutionen ungeändert bleibt, sich in symmetrischer Form darstellen lässt, nämlich

$$\varphi = \frac{1}{n!} \{\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n\},$$

so haben wir den Satz:

Jede Function, die für alle Substitutionen ungeändert bleibt, ist symmetrisch; jede ganze symmetrische Function lässt sich als ganze Function der elementaren symmetrischen Functionen darstellen.

§ 11.

Wir können jetzt zu dem Beweise des am Anfange des vorigen Paragraphen aufgestellten Satzes übergehen.

Es mögen φ und ψ zwei zur Gruppe Ω gehörige Functionen sein; Ω habe den Grad n und die Ordnung r . Ist nun σ_2 eine nicht zu Ω gehörige Substitution, so seien φ_2, ψ_2 diejenigen neuen Werte, welche aus φ_1, ψ_1 durch die Substitution σ_2 also auch durch $s_1\sigma_2$ erlangt werden, wenn $s_1, s_2, \dots s_r$ die Substitutionen von Ω sind. Giebt es dann ausser den s_1 und den $s_1\sigma_2$ noch andere Substitutionen z. B. σ_3 , so erhält man φ_3, ψ_3 durch Anwendung aller $s_1\sigma_3$ u. s. w. Es ist daher

$$\varphi_1^\lambda \psi_1 + \varphi_2^\lambda \psi_2 + \varphi_3^\lambda \psi_3 + \dots + \varphi_r^\lambda \psi_r$$

eine ganze symmetrische Function der x für jedes ganzzahlige λ . Denn wendet man auf diesen Ausdruck eine beliebige Substitution s' an, so gehen für dieselbe die einzelnen Summanden in einander über, wie leicht zu sehen ist, so dass der Wert der Summe ungeändert bleibt. Der Ausdruck ist daher als ganze symmetrische Function durch die a in rationaler ganzer Form darstellbar; er sei gleich A_λ .

Wir bilden nun für $\lambda = 0, 1, 2, \dots q-1$

$$(8) \quad \varphi_1^\lambda \psi_1 + \varphi_2^\lambda \psi_2 + \dots + \varphi_e^\lambda \psi_e = A_\lambda;$$

dann ist die Determinante dieses Systems

$$= \frac{|\varphi_\mu^\lambda|}{\mu_1, \mu_2} \left(\begin{matrix} \lambda = 0, 1, 2, e-1 \\ \mu, \mu_1, \mu_2 = 1, 2, \dots, e-1 \\ \mu_1 > \mu_2 \end{matrix} \right)$$

von Null verschieden. Das System ist daher nach den e Unbekannten $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_e$ auflösbar, und man hat

$$(9) \quad \psi_1 = R(\varphi_1, a),$$

wenn R wie überall im Folgenden eine rationale Function bedeutet. Es könnte scheinen, als ob in die rechte Seite der Gleichung sämtliche Werte $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_e$ aufgenommen werden müssten. Dies ist aber nicht nötig, wie die folgende wirkliche Berechnung von ψ zeigt.

Multipliciren wir die Gleichungen (8) mit y_λ , wobei $y_{e-1} = 1$ sein soll, addiren sie dann und setzen

$$\chi(\varphi) = \varphi^{e-1} + y_{e-2} \cdot \varphi^{e-2} + \dots + y_1 \psi + y_0$$

der Abkürzung wegen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \psi_1 \cdot \chi(\varphi_1) + \psi_2 \cdot \chi(\varphi_2) + \dots + \psi_e \cdot \chi(\varphi_e) \\ = A_0 y_0 + A_1 y_1 + \dots + A_{e-2} y_{e-2} + A_{e-1}. \end{aligned}$$

Um jetzt z. B. ψ_1 zu erhalten, braucht man nur die y so zu bestimmen, dass

$$\chi(\varphi_2) = 0, \chi(\varphi_3) = 0, \dots, \chi(\varphi_e) = 0,$$

$$\chi(\varphi_1) \text{ von Null verschieden}$$

wird. Nun ist die Function

$$V \equiv (\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2) \dots (\varphi - \varphi_e) = \varphi^e - \alpha_1 \varphi^{e-1} + \dots$$

in den φ_λ symmetrisch, folglich sind $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_e$ ganze Functionen der $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Es werden daher in

$$W = \frac{V}{\varphi - \varphi_1} = \varphi^{e-1} - \beta_1 \varphi^{e-2} + \dots \mp \beta_{e-2} \varphi \pm \beta_{e-1}$$

die $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{e-1}$ genau so bestimmt werden, wie die b in § 10. (6) und daher ganze Functionen der $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und von φ_1 sein. W hat aber die Eigenschaft, welche für χ verlangt wurde, dass es nämlich die Wurzeln $\varphi_2, \dots, \varphi_e$ habe, während φ_1 keine Wurzel sei; man kann daher für χ direct W nehmen und erhält für

$$y_{e-2} = -\beta_1, y_{e-3} = +\beta_2, \dots, y_0 = \pm \beta_{e-1}$$

ganze Functionen der elementaren symmetrischen Functionen a_1, \dots, a_n und von φ_1 . Durch Einsetzung dieser Werte wird dann

$$X(\varphi_1) = W(\varphi_1) = V'(\varphi_1),$$

indem wir in bekannter Art die Ableitung von V nach φ mit V' bezeichnen. Die Gleichung (9) geht über in

$$\psi_1 \cdot V'(\varphi_1) = A_{\varphi-1} - \beta_1 A_{\varphi-2} + \beta_2 A_{\varphi-3} - \dots \pm \beta_{\varphi-1} A_0,$$

und diese ergibt das obige Resultat

$$(9) \quad \psi_1 = R(\varphi_1, a).$$

Diese ganze Ableitung bleibt bestehen, auch wenn φ und ψ nicht zu derselben Gruppe gehören, falls nur φ sich für alle Substitutionen ändert, welche ψ ändern, falls also die Gruppe von ψ die von φ umfasst. Denn hierbei tritt weiter nichts Neues ein, als dass jedesmal mehrere Werte ψ_a, ψ_b, \dots , für welche die $\varphi_a, \varphi_b, \dots$ verschieden waren, einander allenfalls gleich werden; dieser Umstand ist jedoch für die obige Ableitung unwesentlich. Wir erkennen daraus:

I. Gehören zwei Functionen zu derselben Gruppe, so sind sie rational durch einander ausdrückbar.

II. Sind zwei Functionen rational durch einander ausdrückbar, so gehören sie zu derselben Gruppe.

III. Bleibt eine Function für die Gruppe einer zweiten ungeändert, so kann sie rational durch diese zweite ausgedrückt werden.

Durch die Sätze I. und II. wird ein Zusammenhang algebraischer Art zwischen allen Functionen constituirt, die zu derselben Gruppe gehören. Wir wollen solche gegenseitig durch einander rational ausdrückbare Functionen äquivalent nennen oder sagen, sie gehören derselben Classe an.

§ 12.

Nach den angewendeten Methoden lässt sich gleichfalls der Zusammenhang zwischen einer Function ψ und einer anderen φ ableiten, wenn die Gruppe von ψ in der von φ enthalten ist. Wir sahen § 8., dass dabei die Anzal der Werte von ψ ein Vielfaches der Anzal der Werte von φ ist. Sind

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_a$$

alle Werte, welche ψ für die Substitutionen der Gruppe von φ annimmt, so dass alle diese dem einen Werte φ_1 zugeordnet erscheinen,

dann wird eine jede symmetrische Function dieser α Werte für die zu φ gehörige Gruppe Φ ungeändert bleiben. Hiernach hat man gemäss § 11. für jede ganze, symmetrische Function S der α Werte $\psi_1, \dots \psi_\alpha$ die Gleichung

$$S(\psi_1, \psi_2, \dots \psi_\alpha) = R(\varphi_1, \alpha).$$

Nimmt man nun für S insbesondere die elementaren symmetrischen Functionen der $\psi_1, \dots \psi_\alpha$, so wird

$$\begin{aligned} \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_\alpha &= R_1(\varphi_1, \alpha); \\ \psi_1\psi_2 + \psi_1\psi_3 + \dots + \psi_{\alpha-1}\psi_\alpha &= R_2(\varphi_1, \alpha); \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

und daher sind $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_\alpha$ Wurzeln der Gleichung

$$(10) \quad \psi^\alpha - R_1(\varphi_1, \alpha) \cdot \psi^{\alpha-1} + R_2(\varphi_1, \alpha) \cdot \psi^{\alpha-2} - \dots = 0;$$

α ist der Quotient aus den Ordnungszahlen der Gruppen von ψ und φ . Ebenso liefert die Gleichung (10) bei Anwendung der Substitution σ als Wurzeln von

$$(10') \quad \psi^\alpha - R_1(\varphi_\sigma, \alpha) \cdot \psi^{\alpha-1} + R_2(\varphi_\sigma, \alpha) \cdot \psi^{\alpha-2} - \dots = 0$$

die α Werte von ψ , welche die Substitutionen der Gruppe Φ_σ , die aus der Gruppe Φ von φ durch Transformation mit σ entsteht, ungeändert lassen.

Ist φ selbst einwertig, seine Gruppe Φ also symmetrisch, so werden die R_1, R_2, \dots rational durch die α ausdrückbar, und daraus folgt, dass alle Werte einer Function ψ , deren Gruppe von der Ordnung r ist, als Wurzeln einer Gleichung des Grades $n!:r = \varrho$ betrachtet werden können. Die R_1, R_2, \dots werden ganze Functionen, wie sich dies aus § 10. ergibt.

Wir nehmen endlich an, dass die zu φ und ψ gehörigen Gruppen einige Substitutionen gemeinsam haben. Φ die Gruppe von φ habe die Ordnung $t.u$, Ψ die Gruppe von ψ die Ordnung $t.v$, wo t die Ordnung der Gruppe Ω ist, welche alle Φ und Ψ gemeinsamen Substitutionen umfasst. Ω ist dann die zu einer Function $\alpha\varphi + \beta\psi$ gehörige Gruppe.

Ferner sind nach den obigen Ableitungen φ wie ψ einerseits rational durch $\alpha\varphi + \beta\psi$ darstellbar, da φ wie ψ für Ω ungeändert bleiben; andererseits ist $\alpha\varphi + \beta\psi$ als Wurzel einer Gleichung v resp. u ten Grades durch ψ resp. φ darstellbar, also auch φ durch ψ als Wurzel einer Gleichung v ten Grades und ebenso ψ durch φ als Wurzel einer Gleichung u ten Grades darstellbar. Wir sehen daher:

I. Jede φ -wertige Function ist Wurzel einer Gleichung φ ten Grades, deren Coefficienten ganze Functionen der elementaren symmetrischen Functionen der Elemente sind.

II. Enthält die Gruppe Φ der Function φ die Gruppe Ψ der Function ψ , so ist ψ Wurzel einer Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von φ und den α sind, und deren Ordnung gleich dem Quotienten der Ordnungen von Φ und Ψ ist.

III. Haben die Gruppen derselben Elemente, welche zu zwei Functionen gehören, die Substitutionen einer dritten Gruppe gemeinsam, so ist jede der beiden Functionen als Wurzel einer Gleichung darstellbar, deren Coefficienten aus der anderen Function und den elementaren symmetrischen Functionen sämtlicher Elemente rational zusammengesetzt ist. Der Grad dieser Gleichung ist der Quotient aus den Ordnungen der fremden und der gemeinsamen Gruppe.

§ 13.

Aus den beiden vorhergehenden Paragraphen folgt unmittelbar:

I. Jede Function der n Grössen x_1, \dots, x_n lässt sich durch diejenige Function derselben Grössen ausdrücken, welche $n!$ Werte hat, also durch eine Function der Form

$$X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n.$$

Denn die Gruppe einer solchen Function kann nach § 5. gleich 1 gemacht werden, und für diese eine Substitution 1 bleibt jede andere Function ungeändert. Kann man also auf irgend eine Weise den Wert von X berechnen, so kann der Wert jeder andern Function der n Elemente x_1, \dots, x_n als bekannt angesehen werden. Speciell bei der Auflösung der Gleichung

$$(1) \quad f(x) = 0$$

kann jede Wurzel x_1 als rationale Function von X dargestellt werden; die Auflösung von (1) hängt also allein von jener Function ab. X soll daher die resolvirende Function heissen.

II. Es giebt stets eine Function, durch welche beliebig viele andere gegebene rational ausgedrückt werden können.

Denn sind $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ die gegebenen Functionen, so hat für die willkürlichen aber allgemeinen Constanten α die Function

$$\psi = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 + \dots$$

als zugehörige Gruppe die grösste, welche zugleich in allen den Gruppen, welche zu $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ gehören, enthalten ist. Jedes φ bleibt daher für die Gruppe der obigen Summe unverändert und ist folglich rational durch sie darstellbar. Haben die Gruppen keine anderen gemeinsamen Substitutionen, so doch immer wenigstens die Einheit; in diesem Falle würde ψ die resolvirende Function der Elemente werden.

III. Jede alternirende Function φ ist in der Form

$$\varphi = R_1 + \sqrt[3]{R_2}$$

darstellbar, wo R_1 und R_2 rationale Functionen der symmetrischen elementaren Functionen der x sind.

Denn wenn φ_1 und φ_2 die beiden Werte von φ sind, und man setzt

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2R_1, \quad \varphi_1 \cdot \varphi_2 = R',$$

so wird R_1 wie R' symmetrisch. Ausserdem ist

$$\varphi^3 - 2R_1\varphi + R' = 0;$$

$$\varphi = R_1 + \sqrt[3]{R_1^3 - R'} = R_1 + \sqrt[3]{R_2}.$$

Nun bestehen nach § 6. II. wirklich Functionen φ die nur zweiwertig sind, und daher giebt es auch stets zweiwertige Functionen $\varphi - R_1$ der x_1, \dots, x_n , deren Quadrate symmetrisch in den x werden, und deren beide Werte sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Die einfachste dieser Functionen ist das in § 6. II. gebildete Product aus den Wurzeldifferenzen $\psi = \Pi(x_\lambda - x_\mu)$, ($\lambda > \mu$).

IV. Wir wollen jetzt untersuchen, ob es vielleicht noch andere Functionen $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ausser den eben angeführten giebt, welche in den n Elementen x_1, \dots, x_n nicht symmetrisch sind, bei denen aber eine Primzalpotenz $\varphi^p(x_1, \dots, x_n)$ symmetrisch in den x wird.

In diesem Falle hätte man

$$\varphi^p(x_1, x_2, \dots, x_n) = G(a_1, \dots, a_n)$$

also

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[p]{G(a_1, \dots, a_n)}.$$

Da nun φ nicht symmetrisch ist, muss es sich für irgend eine Transposition z. B. $(x_1 x_2)$ ändern; trotzdem ist auch hier

$$\varphi^p(x_2, x_1, \dots x_n) = G(a_1, \dots a_n)$$

also

$$\varphi(x_2, x_1, \dots x_n) = \varepsilon \sqrt[p]{G(a_1, \dots a_n)},$$

wo die Wurzeln in beiden Fällen dieselben Werte bezeichnen und ε eine von 1 verschiedene p te Wurzel der Einheit sein soll. Dann ist also

$$\varphi(x_2, x_1, \dots x_n) = \varepsilon \varphi(x_1, x_2, \dots x_n).$$

Diese Relation ist, wegen der Unabhängigkeit der x von einander identisch, so dass man auch hat

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = \varepsilon \varphi(x_2, x_1, \dots x_n),$$

indem man auf die erstere die Transposition $(x_1 x_2)$ anwendet. Beide ergeben durch Multiplication

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = \varepsilon^2 \varphi(x_1, x_2, \dots x_n),$$

also ist

$$\varepsilon^2 = 1$$

und

$$p = 2,$$

d. h. ausser gewissen alternirenden Functionen giebt es keine anderen, von denen eine Primzalpotenz symmetrisch würde, one dass sie selbst schon symmetrisch sind.

§ 14.

Dieselbe Methode der Untersuchung führt auch zur Lösung der allgemeineren Frage: Unter welchen Bedingungen hat eine Primzalpotenz $\varphi^p(x_1, \dots x_n)$ der $p \cdot q$ -wertigen Function φ nur q Werte?

Die zu φ gehörige Gruppe sei Φ , die zu φ^p gehörige in Φ enthaltene sei Ψ ; ψ sei eine zu Ψ gehörige Function; dann ist nach § 11.

$$\varphi^p(x_1, \dots x_n) = R(\psi(x_1, \dots x_n)).$$

Aus Ψ wählen wir, was nach § 8. möglich ist, eine Substitution σ derart, dass die niedrigste Potenz von σ , welche in Φ vorkommt, von einer Primzalordnung $q > 1$ sei. Wenden wir σ auf die beiden Seiten der obigen Gleichung an, so ändert sich die rechte Seite nicht, da σ zur Gruppe von ψ gehört. Es ist daher

$$\varphi^p(x_1, \dots x_n) = \varphi^p(x_\sigma, \dots x_{\sigma_n})$$

oder

$$\varphi_{\sigma} = \varepsilon \cdot \varphi_1,$$

wo ε eine von 1 verschiedene Wurzel der Gleichung $x^p = 1$ ist. Diese Gleichung zwischen den n von einander unabhängigen Elementen x_1, \dots, x_n ist, wie alle unsere früheren eine Identität. Sie bleibt also bestehen, wenn man in ihr die Substitution σ noch einmal ausführt; es ist also auch

$$\varphi_{\sigma^2} = \varepsilon \varphi_{\sigma} = \varepsilon^2 \varphi_1$$

und daher in gleicher Weise

$$\varphi_{\sigma^3} = \varepsilon^3 \varphi_1, \dots, \varphi_{\sigma^{\lambda}} = \varepsilon^{\lambda} \varphi_1, \dots, \varphi_{\sigma^q} = \varepsilon^q \varphi_1.$$

σ^q gehört der Annahme nach zu Φ , folglich bleibt φ für die Substitution σ^q ungeändert und es ist

$$\varphi_{\sigma^q} = \varphi_1 = \varepsilon^q \varphi_1;$$

$$\varepsilon^q = 1.$$

ε ist eine p te Einheitswurzel, q ist eine Primzahl; folglich wird $q = p$ sein müssen; σ^p ist die niedrigste Potenz von σ , welche in Φ vorkommt; die aus Φ und σ gebildete Gruppe enthält daher mindestens p mal so viele Substitutionen als Φ . Sie ist aber auch in Ψ enthalten, und dies hat genau p mal mehr Substitutionen als Φ ; folglich ist

$$\Psi = [\Phi, \sigma].$$

Nach den Ausführungen von § 4. ist dies nur möglich, wenn für alle Substitutionen s_1, \dots, s_r von Φ

$$s_{\lambda} \cdot \sigma = \sigma \cdot s_{\mu},$$

wenn also

$$\sigma^{-1} s_{\lambda} \sigma = s_{\mu};$$

$$\sigma^{-1} \Phi \sigma = \Phi; \quad \sigma^{-2} \Phi \sigma^2 = \Phi; \quad \sigma^2 \Phi \sigma^3 = \Phi; \dots,$$

d. h. wenn σ zu Φ permutabel ist. Nun bleiben die Werte, welche $\varphi = \varphi_1$ überhaupt annehmen kann,

$$\varphi_1, \varphi_{\sigma}, \varphi_{\sigma^2}, \dots, \varphi_{\sigma^{p-1}}$$

bezüglich für die Gruppen

$$\Phi, \sigma^{-1} \Phi \sigma, \sigma^{-2} \Phi \sigma^2, \dots, \sigma^{-p+1} \Phi \sigma^{p-1}$$

ungeändert; diese sind sämtlich gleich Φ . Es bleiben folglich alle Werte $\varphi_1, \dots, \varphi_{\sigma^{p-1}}$ für dieselbe Gruppe Φ ungeändert und daher lassen sie sich sämtlich als rationale Functionen von φ darstellen.

Als notwendige Bedingung dafür, dass die p te Potenz einer Function φ von $p \cdot q$ Werten nur q -wertig sei, haben wir also gefunden,

es müsse die Gruppe Ψ aus Φ durch Hinzunahme einer zu Φ permutabeln Substitution σ ableitbar sein, wo σ^p die niedrigste Potenz von σ ist, welche in Φ auftritt.

Diese Bedingung ist aber auch hinreichend, so dass, wenn es zwei Gruppen Φ und $\Psi = [\Phi, \sigma]$ der angegebenen Eigenschaft giebt, eine zu Φ gehörige Function gebildet werden kann, die selbst $p \cdot q$ -wertig, deren p te Potenz jedoch nur q -wertig ist. Denn wenn φ irgend eine zu Φ gehörige Function ist, so gehört, wie wir gesehen haben, zu jeder der p Functionen

$$\varphi_1, \varphi_\sigma, \varphi_{\sigma^2}, \dots, \varphi_{\sigma^{p-1}}$$

dieselbe Gruppe Φ . Bedeutet daher ε irgend eine von 1 verschiedene p te Einheitswurzel, so bleibt auch

$$X = \varphi_1 + \varepsilon \varphi_\sigma + \varepsilon^2 \varphi_{\sigma^2} + \dots + \varepsilon^{p-1} \varphi_{\sigma^{p-1}}$$

für alle Substitutionen von Φ ungeändert; für σ geht der Ausdruck dagegen in

$$X_\sigma = \varphi_\sigma + \varepsilon \varphi_{\sigma^2} + \dots + \varepsilon^{p-2} \varphi_{\sigma^{p-2}} + \varepsilon^{p-1} \varphi_1 = \varepsilon^{-1} X_1$$

über. Es ist daher

$$X_{\sigma^p} = X_1^p,$$

und X^p ändert sich also für keine Substitution $\sigma \in \Phi$ der Gruppe $\Psi = [\Phi, \sigma]$. Folglich genügt $X = R(\varphi)$ der Gleichung

$$X^p = S(\psi)$$

und es ist X^p in der Tat nur q -wertig. Rational ist $X = R(\varphi)$ natürlich nur in Beziehung auf die x , resp., um die in den einleitenden Worten des ersten § angewendete Bezeichnung zu benutzen, nur in Beziehung auf z ; die irrationale Grösse ε ändert daran nichts.

Es ist klar, dass nicht jede zur Gruppe Φ gehörige Function φ dieselbe Eigenschaft wie X hat; aber da auch $\varphi = R_1(X)$ ist, so kann doch φ mit Hülfe von p ten Wurzeln aus rationalen Functionen von ψ dargestellt werden. Die Gleichung, welche zwischen zwei beliebigen Functionen φ und ψ der Gruppen Φ resp. $\Psi = [\Phi, \sigma]$ besteht, und welche nach φ vom p ten Grade ist, lässt sich durch p te Wurzeln lösen.

Durch die letzten Ausführungen ist zugleich der Weg angedeutet, den eine weitere Untersuchung zu nehmen hat. Es wird sich darum handeln, die Bedingungen aufzufinden, unter welchen eine mehrwertige Function φ mit Hülfe von Wurzeln aus wenigerwertigen Functionen abgeleitet werden kann. Auch der Begriff der Wurzeln müsste noch erweitert werden. Denn das Symbol derselben bezweckt ja nichts

anderes, als die Andeutung, dass in die Betrachtung Grössen aufgenommen werden, welche der binomischen Gleichung

$$z^n = F$$

genügen. Statt dieser Gleichung, welche sich lediglich durch besondere Einfachheit der Form auszeichnet, könnten andere in das Bereich der Betrachtung gezogen werden, so dass die allgemeinere Frage lauten würde: Unter welchen Bedingungen lässt sich eine mehrwertige Function Φ mit Hülfe der als bekannt angesehenen Wurzeln einer beliebig gegebenen Gleichung durch wenigerwertige Functionen darstellen? Diese Frage wird dadurch einer grossen Vereinfachung fähig, dass der gesuchte Ausdruck von φ in den Elementen x stets rational bleiben wird, so dass die gesammte Irrationalität in den Coefficienten allein auftritt; die Wurzeln der gegebenen adjungirten Gleichung treten dabei also lediglich zu den elementaren symmetrischen Functionen a der Elemente x_1, \dots, x_n als gleichberechtigt hinzu.

Berlin 25. April 1878.

XV.

Ableitung der Centralprojection aus einer
cotirten Orthogonalprojection.

Von

Emanuel Czuber

in Prag.

I. Man denke sich ein aus dem Punkte O central auf eine Ebene E zu projicirendes Gebilde auf jene Ebene zunächst orthogonal projecirt. Diese eine Projection reicht zur Bestimmung des Gebildes nicht hin, sie werde aber dadurch ergänzt, dass man zu den Projectionen der einzelnen Punkte Zahlen hinschreibt, welche ihre in einer bestimmten Einheit ausgedrückten Abstände von der Ebene E (die Längen der projicirenden Normalen) angeben und positiv oder negativ sind, je nachdem die betreffenden Punkte mit O auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten von E liegen. Man erhält auf diese Weise eine sogenannte „cotirte Projection“ des Gebildes. Desgleichen beziehe man den Punkt O orthogonal auf E , wodurch man den Punkt O , d. i. den Hauptpunkt der Centralprojection erhält; die Gerade OO , ist der Hauptstral, die Strecke $OO = \delta$ die Augdistanz.

Der Punkt a , Fig. 1. sei die orthogonale Projection eines Punktes a , dessen Cote α ist. Beschreibt man aus O , mit dem Radius δ und aus a' mit dem Halbmesser α einen Kreis in E , so ist die Centralprojection a' von a der äussere oder innere Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise, je nachdem α positiv oder negativ war. Die Centrallinie O, a' , ist die Orthogonalprojection des Strales Oa .

Hat man ein ganzes System von Punkten $abc \dots$, denen die Orthogonalprojectionen a, b, c, \dots und die Coten $\alpha \beta \gamma \dots$ zukommen, und verfährt man mit allen auf dieselbe Weise, so sind ihre Centralprojectionen $a'b'c' \dots$ Aehnlichkeitspunkte der aus a, b, c, \dots mit den Radien $\alpha \beta \gamma \dots$ beschriebenen Kreise in Bezug auf den festen, mit δ aus O , beschriebenen Distanzkreis.

Der innere Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise liegt stets im Endlichen, also liegen auch die Centralprojectionen von Punkten, welche auf der entgegengesetzten Seite der Bildebene bezüglich O sich befinden, immer im Endlichen. Dagegen fällt der äussere Aehnlichkeitspunkt zweier gleicher Kreise in's Unendliche, Punkte also, welche mit O auf derselben Seite der Bildebene liegend auch denselben Abstand haben, haben ihre Perspective in unendlicher Ferno.

Angenommen, der numerische Wert der Cote eines Punktes, dessen Orthogonalprojection a , ist Fig. 2., wäre α ; man hat den Distanzkreis und aus a , den Kreis vom Halbmesser α beschrieben und den inneren Aehnlichkeitspunkt a_1' sowie den äusseren a_2' beider Kreise bestimmt; dann ist a_1' das Bild eines um α unter (oder hinter) der Bildebene liegenden Punktes a_1 , a_2' eines um die gleiche Strecke über (oder vor) der Bildebene liegenden Punktes a_2 . Beide Punkte, da sie dieselbe Orthogonalprojection haben, liegen zur Bildebene symmetrisch. Nun wird aber bekanntlich die Strecke O, a , durch die beiden Aehnlichkeitspunkte harmonisch geteilt; demnach:

Die (gemeinschaftliche) Orthogonalprojection zweier zur Bildebene symmetrischer Punkte wird durch deren Centralprojectionen vom Augpunkte harmonisch getrennt.

Denkt man sich ein Raumgebilde, welches durch die Bildebene symmetrisch geteilt wird, so dass jedem Punkte diesseits ein ebensoweit abliegender jenseits derselben entspricht, dann geben je zwei solche zugeordnete Punkte p_1 und p_2 eine einzige Orthogonalprojection p_3 und ihre perspectivischen Bilder trennen O , von p_3 harmonisch. Werden aus den Orthogonalprojectionen die mehrerwähnten Kreise beschrieben und ihre Aehnlichkeitspunkte bezüglich des festen Distanzkreises construirt; dann geben die äusseren die Centralprojection des über, die innern jene des unter der Bildebene gelegenen Theiles. Wäre (neben der Orthogonalprojection) die Perspective des einen Theiles gegeben, so liesse sich die des andern durch harmonische Theilung leicht finden.

Bei gegebenem O , und δ bestimmen die Orthogonalprojection a' und die Perspective a'' , welche beide auf einem Strale durch O , liegen, den Punkt a , d. h. es lässt sich seine Cote quantitativ und qualitativ

ermitteln. Führt man nämlich von a' eine Tangente an den Distanzkreis und fällt auf diese eine Normale aus a_1 , so gibt diese das gesuchte α ; über das Vorzeichen entscheidet die gegenseitige Lage von O_1 , a_1 und a' in bekannter Weise. Uebrigens kann man sich die Tangentenconstruction ersparen, indem man zu einem beliebigen Halbmesser des Distanzkreises eine Parallele durch a_1 führt und den Endpunkt jenes Halbmessers aus a' auf diese projicirt.

II. Wir betrachten die beiden Punkte a , und b , Fig. 3. mit den Coten α und β ; die erste derselben sei positiv, die zweite negativ, dann ist die Centralprojection a' von a der äussere, b' der innere Aehnlichkeitspunkt der betreffenden Kreise. Die Gerade a_1b_1 ist die Orthogonal-, die Gerade $a'b'$ die Centralprojection der Geraden ab . Es ist aber geometrisch $a'b'$ eine der Aehnlichkeitsaxen der drei Kreise O_1 , a_1 , b_1 , geht nach bekannten Beziehungen durch den inneren Aehnlichkeitspunkt d der beiden Kreise a_1 , b_1 und es stellt jener Punkt den Durchstosspunkt von ab mit der Bildebene vor. Für andere Lagen der Punkte a und b lässt sich die Untersuchung leicht führen und ergibt, dass der Durchstosspunkt innerer oder äusserer Aehnlichkeitspunkt der Kreise a_1 und b_1 ist, je nachdem a und b auf entgegengesetzten Seiten liegen oder nicht.

Führt man den Stral aus O nach dem unendlich fernen Punkte von ab , dessen Orthogonalprojection parallel ausfällt zu a_1b_1 , so trifft letztere $a'b'$ in der Centralprojection des unendlich fernen Punktes von ab , d. i. in dem Fluchtpunkte der Geraden, welchen wir mit f' bezeichnen wollen. Die Figur führt nun leicht zu den bekannten Beziehungen:

$$\frac{a'd}{a'f'} = \frac{a'a_1}{a'O_1} = \frac{\alpha}{\delta},$$

$$\frac{b'd}{b'f'} = \frac{b'b_1}{b'O_1} = \frac{\beta}{\delta}.$$

Ferner folgt aus ähnlichen Dreiecken einmal

$$\frac{O_1b'}{b'b_1} = \frac{\delta}{\beta},$$

dann

$$\frac{O_1b'}{b'b_1} = \frac{O_1f'}{db_1} |$$

woraus

$$O_1f' = \frac{db_1}{\beta} \cdot \delta,$$

und da das Verhältniss $\frac{db_1}{\beta}$ die Neigung der Geraden ab gegen die

Bildebene bestimmt, so bleibt O, f' so lange constant, als es die Neigung bleibt, d. h.

Die Fluchtpunkte gegen die Bildebene gleichgeneigter Geraden sind vom Augpunkte gleich weit entfernt, liegen also auf einem aus dem Augpunkte beschriebenen Kreise.

Ein einfacher Schluss führt nun dazu, dass parallele Geraden einen gemeinschaftlichen Fluchtpunkt haben.

So oft der innere (immer im Endlichen liegende) Aehnlichkeitspunkt als Durchstosspunkt fungirt, wird $a'b'$ auch von den durch O , parallel zu a, b , geführten Geraden getroffen, d. h.

Hat eine Gerade den Durchstosspunkt im Endlichen, so liegt auch der Fluchtpunkt in endlicher Entfernung.

Ist aber der Durchstosspunkt ein äusserer Aehnlichkeitspunkt, liegen also die zu seiner Construction verwendeten Punkte zur selben Seite der Bildebene und haben sie überdiess gleiche Coten, so fällt er unendlich weit; es ist aber in diesem Falle die Gerade ab zur Bildebene parallel und es wird $a'b'$ nicht allein von a, b , sondern auch von der aus O , hiezu parallel geführten Geraden unendlich weit getroffen, d. h.

Durchstosspunkt und Fluchtpunkt fallen gleichzeitig in's Unendliche u. z. bei Geraden, welche zur Bildebene parallel liegen.

Wird durch O , ein Parallelstral zu $a'b'$ geführt, so trifft derselbe a, b , in der Orthogonalprojection g , jenes Punktes, dessen Centralprojection g' im Unendlichen sich befindet. Es soll g , der Gegenpunkt von ab heissen. Nach einer früher gemachten Bemerkung ist die Cote von g gleich und gleich bezeichnet mit δ , es liegt dieser Punkt in der durch O zur Bildebene parallel gelegten Ebene.

Ist O , mit δ und die Centralprojection l' , Fig. 3., einer Geraden mit dem Durchstosspunkt d und dem Fluchtpunkt f' gegeben, so ist dadurch die Gerade l bestimmt, man kann ihre Orthogonalprojection ermitteln und cotiren. Bei gegebenem Durchstosspunkt genügt die Cotirung eines Punktes. Führt man nämlich durch d eine Parallele zu O, f' , so stellt diese schon l , vor; zieht man aus O , einen beliebigen Stral, so schneidet derselbe auf l , und l' zwei zugeordnete Punkte a , und a' aus und es ist die Cote von a auf Grund des unter I. Gesagten leicht zu ermitteln.

Fassen wir a , Fig. 4., als Projection der beiden symmetrischen Punkte $a(+\alpha)$ und $a(-\alpha)$, ebenso b , als Projection der Punkte $b(+\beta)$

und $b(-\beta)$ auf, so decken sich in $a, b, (\equiv L_1)$ die Projectionen von vier Geraden, nämlich:

$$\begin{aligned} a(+\alpha), \quad b(+\beta) & \dots l_1, \\ a(-\alpha), \quad b(-\beta) & \dots l_2, \\ a(-\alpha), \quad b(+\beta) & \dots l_3, \\ a(+\alpha), \quad b(-\beta) & \dots l_4, \end{aligned}$$

welche paarweise (l_1 mit l_2 und l_3 mit l_4) symmetrisch zur Bildebene liegen. Nach den vorausgeschickten Betrachtungen sind die Centralprojectionen $l_1' l_2' l_3' l_4'$ dieser vier Geraden die vier Aehnlichkeitsachsen der drei Kreise $O, (Rad. \delta), a, (R. \alpha), b, (R. \beta)$. Der äussere Aehnlichkeitspunkt d_{12} der Kreise a , und b , gibt den Durchstosspunkt von l_1 und l_2 , der innere d_{34} den Durchstosspunkt von l_3 und l_4 mit der Bildebene.

In den beiden Geradenpaaren l_1, l_2 und l_3, l_4 haben wir zwei gegen die Bildebene symmetrische Gebilde, wie sie unter I. besprochen wurden. Mithin wird nach dem dort Gesagten jeder durch O , geführte Stral in diesem Punkte und in den Schnittpunkten mit $l_2' L, l_1'$ einersits und $l_4' L, l_3'$ andererseits harmonische Punkte ergeben. In jedem solchen Strale liegen also zwei Systeme harmonischer Punkte, welche ein Paar zugeordneter Punkte gemein haben. Dass hierin die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits, welches hier von den Geraden $l_1' l_2' l_3' l_4'$ gebildet wird, mit inbegriffen sind, lehrt ein Blick auf die Zeichnung. Selbstverständlich gilt letztere Betrachtung nicht allein für Stralen aus O , sondern auch für jene aus a , und b , da man auch diese Punkte als Augpunkte (mit den Augdistanzen α bzw. β) auffassen kann.

Der durch O , zu L , parallel geführte Stral λ gibt in seinen Schnittpunkten mit $l_1' l_2' l_3' l_4'$ die Fluchtpunkte $f_1' f_2' f_3' f_4'$ den betreffenden Geraden. Da wieder die Schnittpunkte von λ mit l_2' und l_1' , d. i. f_2' und f_1' von O , und dem Schnittpunkt $\lambda. L$, harmonisch getrennt werden und da letztgenannter Punkt unendlich weit liegt, so befindet sich O , in der Mitte zwischen f_2' und f_1' , ein bekanntes Resultat, welches nichts weiter besagt, als dass gegen die Bildebene symmetrisch gelagene Gerade ihre Fluchtpunkte gleich weit vom Augpunkt entfernt haben. Aehnlich lässt es sich von f_3' und f_4' zeigen.

III. Eine Ebene sei gegeben durch ihre Traco auf der Bildebene und einen ihrer Punkte. Ist die Trace S , Fig. 5., und ein Punkt a durch Orthogonalprojection a , und Cote α gegeben, so lässt sich die Cote eines jeden andern durch seine Orthogonalprojection angenommenen Punktes der Ebene, somit auch seine Centralprojection ermitteln.

Es stelle l , die Orthogonalprojection einer durch den Punkt a in der Ebene gezogenen Geraden dar, dann ist der Schnittpunkt d von l mit S bereits ihr Durchstosspunkt mit der Bildebene und die Verbindungsgerade l' von d mit a' die Perspective von l . Hierin ist zugleich die Lösung der letzt angedeuteten Aufgabe enthalten. Führt man einen Parallelenstrahl zu l , aus O , so trifft er l' im Fluchtpunkte f' von l . Denkt man sich a als Mittelpunkt eines in der Ebene liegenden Strahlenbüschels, so hat jeder einzelne Strahl seinen

Fluchtpunkt, wegen der Constanz des Verhältnisses $\frac{a'd}{a'f'} = \frac{a'a_1}{a'O_1} = \frac{\alpha}{\delta}$ liegen aber alle diese Punkte auf einer zu S parallelen Geraden F' , der Fluchttrace der Ebene, welche als Perspective der unendlich fernen Punkte der Ebene (der unendlich fernen Geraden derselben) aufzufassen ist. — Der Parallelenstrahl zu l' aus O , trifft l , in jenem Punkte g , dessen zugehörige Centralprojection in's Unendliche fällt.

Bemerkt man wieder, dass das Verhältniss $\frac{a,d}{a,g_1} = \frac{a,a'}{a,O_1} = \frac{\alpha}{\delta - \alpha}$ constant bleibt, so folgt, dass auch die Punkte g , aller Stralen des oben berührten Büschels auf einer zu S parallelen Geraden G_1 , der Gegentrace der Ebene, liegen. Ein Blick auf die Zeichnung lehrt zugleich, dass F' von S ebensoweit absteht wie G_1 von O_1 , nur sind die Abstände in entgegengesetzter Richtung gelegen. — Es bedarf keiner besonderen Erklärung, wie bei gegebenem S und F' oder S und G_1 (nebst O und δ) die Coten und Centralprojectionen beliebiger durch Orthogonalprojection gegebener Punkte der Ebene bestimmt werden.

Sind drei Punkte $a_1(\alpha)$, $b_1(\beta)$, $c_1(\gamma)$ gegeben, so bestimmen dieselben eine Ebene, deren Bildtrace eine der Aehnlichkeitsaxen der drei Kreise a, b, c , ist, je nach den Vorzeichen von α , β , γ . Lässt man diese unbestimmt, so repräsentiren die vier Aehnlichkeitsaxen genannter Kreise die Tracen von acht Ebenen, welche in vier zur Bildebene symmetrische Paare zerfallen. Zu jedem solchen Paare gehören zwei gegen den Augpunkt symmetrische Fluchttracen und zwei zur betreffenden Bildtrace symmetrische Gegentracen.

IV. Durch seine Orthogonalprojection, die Bildtrace seiner Ebene und einen cotirten Punkt der letzteren ist ein ebenes Gebilde bestimmt; die Perspective desselben ist dann leicht zu construiren. Ist s , Fig. 6., die Spur der Ebene, und a , mit der (positiven) Cote α gegeben, dann ist der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise O , und a_1 die Centralprojection von a . Um nun die Perspective eines andern Punktes b aus dem ebenen System zu finden, ziehe man zunächst den Strahl O, b_1 , welcher dieselbe enthalten wird, weiters die Gerade b, a_1 , welche im Schnittpunkte d mit s den Durchstosspunkt der Ge-

raden ba liefert, deren Centralprojection durch Verbindung von d mit a' folgt: wo diese den Stral O, b , trifft, ist das gesuchte b' . In gleicher Weise ist mit allen andern Punkten zu verfahren. Man erkennt sofort, dass die Orthogonalprojection und die Perspective collineare und collinear liegende Gebilde sind. Die Verbindungsgeraden von je zwei zugeordneten Punkten (a , und a' , b , und b') gehen durch einen festen Punkt O , das Collineationscentrum, und je zwei zugehörige Gerade (a, b , und a', b') schneiden sich in Punkten einer festen Geraden s , der Collineationsaxe.

Insbesondere sei das zu projicirende Gebilde ein Kegelschnitt, von welchem die Orthogonalprojection K , Fig. 7., die Trace S seiner Ebene, die Orthogonalprojection a , nebst Cote α eines Punktes a der letzteren gegeben ist. Man könnte durch das vorhin angegebene Verfahren beliebig viele Punkte der Centralprojection K' ermitteln. Die folgende Betrachtung wird zur Auffindung der Axen von K' führen*).

Verschafft man sich mit Hilfe von a die Gegentrace G ,, denkt sich von den Punkten derselben an K , Tangentenpaare geführt, so gehen deren Berührungssehnen durch den Pol o , von G , in Bezug auf K . In der Perspective wird jedes solche Tangentenpaar parallel, seine Berührungssehne mithin zu einem Durchmesser, die Perspective o' von o , also zum Mittelpunkt von K' . Ist x , ein Punkt von G ,, so gibt der Stral O, x , die Richtung der in Perspective gesetzten Tangenten xm und xn an K , der Stral O, x , die Richtung der Perspective ihrer Berührungssehne mn , d. h. die Stralen O, x , und O, x , stellen die Richtungen zweier conjugirter Diameter von K' vor. Da nun x , und x , zwei conjugirte Punkte der Involution sind, welche der Geraden G , in Bezug auf den Kegelschnitt K' zukommt, O, x , und O, x , zwei conjugirte Stralen der diese aus O , projicirenden Straleninvolution, so lässt sich folgender Satz aussprechen:

Je zwei zugeordnete Stralen der Straleninvolution, welche die in G , befindliche Punktinvolution aus O , projicirt, geben die Richtungen für ein Paar conjugirter Diameter von K' ; insbesondere liefern die Axen jener Straleninvolution die Axenrichtung von K' .

Die Axenermittlung von K' fällt daher mit der Construction der Axen des Stralensystems bei O , zusammen.

*) Vergl. Dr. Gust. A. V. Peschka, directe Axenbestimmung der perspectivischen Bilder des Kreises. Zeitschr. des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins. 1874. XIV.

Wir unterscheiden folgende Fälle:

1) Die Punktinvolution in G , sei elliptisch, dann ist auch K' eine Ellipse. Um ihre Axen zu finden, verschaffe man sich zwei Paare zugeordneter Punkte in G , Fig. 7., x , und x' , y , und y' , beschreibe über x, x' und y, y' , als Durchmesser Kreise, so schneiden sich diese in zwei Punkten P und Q . Der durch P, Q und O , gelegte Kreis trifft G , in zwei Punkten X , und Y , welche mit O , verbunden die Richtungen der Axen von K' geben. Was die Längen derselben anlangt, so ergeben sich dieselben leicht, wenn man durch o , Sehnen zieht, welche nach X , und Y , verlaufen; die Perspectiven der Endpunkte dieser Sehnen geben die Scheitel von K' .

2) Das Punktsystem in G , sei hyperbolisch, dann ist auch K' eine Hyperbel. Die in den Asymptotenpunkten u , und v , Fig. 8., an K , geführten Tangenten geben in der Perspective die Asymptoten von K' , ihr Schnittpunkt o , zugleich Pol von G , in Bezug auf K , den Mittelpunkt. Die Axenconstruction reducirt sich wieder auf die Ermittlung der rechtwinklig zugeordneten Stralen der Involution in O , welche das Punktsystem in G , projecirt. Wenn man über u, v , als Durchmesser einen Kreis beschreibt, so hat man, um jene Stralen zu finden, denjenigen Orthogonalkreis der eben erwähnten Kreise zu verzeichnen, der durch O , gehend sein Centrum G , hat. Beachtet man aber, dass die Stralen O, u , und O, v , durch jedes andere Paar conjugirter Stralen, also auch durch die gesuchten O, X , und O, Y , harmonisch getrennt werden, nur dass letztere einen rechten Winkel einschliessen, so erkennt man, dass die von ihnen eingeschlossenen Winkel von O, X , und O, Y , halbirt werden. Damit ist die Construction der Punkte X , und Y , sehr erleichtert. Von einem derselben gehen reelle, von dem andern imaginäre Tangenten an K ; die durch den ersten von beiden durch O , geführte Sehne (zugleich Berührungsschne der vom letzten gezogenen Tangenten) führt zur Längenbestimmung der reellen Axe.

3) Ist endlich die Punktreihe in G , parabolisch, dann ist auch die Perspective von K eine Parabel. Diessmal hat man behufs Axenconstruction durch den Mittelpunkt M , der parabolischen Involution, Fig. 9., und den Punkt O , einen Kreis zu führen, welcher sein Centrum in G , hat; dieser schneidet letztere Gerade ausser in M , noch in einem Punkte Y , von welchem an K , ausser G , noch eine zweite Tangente Y, A , geht. Es gibt dann die Perspective von A den Scheitel, der Stral O, M , die Richtung der Axe, jener O, Y , die Richtung der Scheiteltangente der Parabel. Wird z. B. noch eine weitere beliebige Tangente t , an K , geführt und in Perspective gesetzt, was leicht durch ihre Schnittpunkte mit Y, A , und M, A , oder einen dieser Schnittpunkte und den Schnittpunkt mit S geschehen kann, so kann auch der Brennpunkt (F) leicht ermittelt werden.

XVI.

**Vergleichung zweier Annahmen
über die moralische Bedeutung von Geldsummen.**

Von

Emanuel Czuber.

So lange man bei einer Geldsumme auf die Verhältnisse der Person, welche in den Besitz derselben gelangen oder sie verlieren soll, keine Rücksicht nimmt, zieht man die Summe mit ihrem absoluten Betrage in Rechnung und spricht von einem objectiven oder physischen Werte derselben. Es hat aber ohne Zweifel ein und derselbe Geldbetrag für verschiedene Personen je nach den Umständen, unter denen sie sich befinden, verschiedene Bedeutung, und nimmt man hierauf Rücksicht, so kann von einem subjectiven oder moralischen Werte der Geldsumme gesprochen werden. Es erscheint auf den ersten Blick unmöglich, für diesen bei den mannigfachen, der Rechnung meist unzugänglichen Interessen ein auf alle Fälle passendes Mass aufzustellen; lässt man jedoch alle andern Rücksichten bei Seite und beachtet blos das hierbei sehr in's Gewicht fallende physische Vermögen der Person, welche der Gewinn oder Verlust betrifft, so wird sich eine Annahme über die moralische Bedeutung desselben treffen lassen. Diese Annahme muss zwei durch den gemeinen Verstand gestellten Forderungen genügen: die moralische Bedeutung einer Summe muss sich kleiner ergeben, wenn sie Gewinn als wenn sie Verlust bedeutet, und um so kleiner ausfallen, je höher der Betrag des physischen Vermögens der Person ist.

Eine der einfachsten Annahmen, welche dies leistet, besteht darin, dass man die moralische Bedeutung einer Vermögens-

änderung proportional setzt dem Verhältnisse aus ihrem absoluten Betrage und dem durch sie geänderten ursprünglichen Vermögen:

Ist B der Betrag der Vermögensänderung, K das ursprüngliche Vermögen, so verwandelt sich dasselbe in $K+B$ oder $K-B$, je nachdem B einen Gewinn oder Verlust bedeutet; nach obiger Annahme wird nun die moralische Bedeutung des ersteren der Grösse

$$I) \quad V_1 = \frac{B}{K+B} = \frac{\frac{B}{K}}{1 + \frac{B}{K}} = \frac{\nu}{1 + \nu},$$

die moralische Bedeutung des letzteren der Grösse

$$II) \quad T_1 = \frac{B}{K-B} = \frac{\frac{B}{K}}{1 - \frac{B}{K}} = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

proportional angenommen; darin bedeutet jetzt ν das Verhältniss zwischen Vermögensänderung und ursprünglichem Vermögen. Für einen sehr kleinen Wert von ν , also eine sehr geringe Vermögensänderung dB kann man mit Vernachlässigung höherer Potenzen des Verhältnisses $\frac{dB}{K} = \nu$

$$1) \quad V_1 = T_1 = \frac{dB}{K} = \nu$$

setzen.

Teilweise abweichend hiervon setzt Oettinger*) mit Lacroix**) (nach Buffon's Hypothese) die moralische Bedeutung des Gewinnes

$$I') \quad V = \frac{B}{K+B} = \frac{\nu}{1 + \nu},$$

dagegen die eines Verlustes einfach

$$II') \quad T = \frac{B}{K} = \nu.$$

Der Gleichungen I) und II) hat sich zuerst Fries***) bedient.

*) Oettinger, Wahrscheinlichkeitsrechnung, pag. 229.

**) Lacroix, Traité élémentaire du calcul des probabilités, pag. 127. (Deutsche Uebersetzung von Unger, pag. 144.)

***) J. F. Fries, Versuch einer Kritik d. Princ. d. Wahrsch.-R. 1842, pag. 118.

Die Bernoulli'sche Annahme über die Beurteilung der moralischen Bedeutung einer Geldsumme, welcher sich auch Laplace*) und nach ihm andere Mathematiker angeschlossen haben, setzt eine unendlich kleine Vermögensänderung voraus und auf diese wird die Gleichung 1) angewendet; ihre moralische Bedeutung nämlich wird, gleichgiltig ob sie Gewinn oder Verlust bedeutet, dem Verhältnisse aus ihrem absoluten Betrage und dem ursprünglichen Vermögen proportional angenommen. Eine Vermögensänderung von endlichem Betrage wird als Summe solcher unendlich kleiner Beträge angesehen und ihre moralische Bedeutung durch Summierung der moralischen Bedeutungen dieser erhalten.

Bezeichnet demnach K das ursprüngliche Vermögen einer Person und ist dasselbe auf dem eben angegebenen Wege zu dem Betrage $K+x$ angewachsen, so hat das nächste Increment dx die Bedeutung $\frac{dx}{K+x}$ und eine Vergrößerung im Gesamtbetrage B die Wichtigkeit

$$\text{III)} \quad V_2 = \int_0^B \frac{dx}{K+x} = l \frac{K+B}{K} = l(1+\nu);$$

hat sich dagegen das Stammvermögen bis zum Betrage $K-x$ vermindert, so hat der nächste Verlust dx die Bedeutung $\frac{dx}{K-x}$ und der ganze Verlust B die moralische Bedeutung

$$\text{IV)} \quad T_2 = \int_0^B \frac{dx}{K-x} = -l \frac{K-B}{K} = -l(1-\nu).$$

Bei Oettinger**) ist die Ableitung dieses zweiten Ausdruckes unklar. (Man vergleiche daselbst Gl. 4. mit 3.) Er findet $T = l \frac{K-B}{K}$, wonach die moralische Bedeutung eines Verlustes negativ wäre. Uebrigens ist dies auch bei Lacroix***) der Fall.

Unsere Ableitung lässt sich mit der von Laplace, welcher nicht direct die moralische Bedeutung einer Vermögensänderung, sondern die einer physischen Summe überhaupt betrachtet, in Einklang bringen.

*) Laplace, Théorie anal. des probabilités und Essai philos. d. prob.

**) Oettinger, Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1852, pag. 232.

***) Lacroix, l. c., pag. 130.

Bedeutet nämlich — um bei unserer Bezeichnung zu bleiben — K das anfängliche Vermögen einer Person, so ist nach Laplace dessen moralische Bedeutung

$$y = klK + lh,$$

wobei k eine für die in Betracht stehende Person gültige und h eine willkürliche Constante bedeutet, welche letztere sich aus einem Paare zusammengehöriger Werte von y und K berechnen liesse. Hat sich nun das Vermögen der Person um B vermehrt, so ist auch seine moralische Bedeutung um einen gewissen Betrag V_2' gestiegen und dieser stellt offenbar die moralische Bedeutung des Gewinnes B vor; es ist wieder

$$y + V_2' = kl(K + B) + lh;$$

zieht man von dieser Gleichung die vorhergehende ab, so findet man

$$V_2' = kl \frac{K+B}{K}.$$

Ist dagegen das Vermögen um B gesunken, so hat seine moralische Bedeutung einen Betrag T_2' eingebüßt, so dass sie jetzt nur mehr

$$y - T_2' = kl(K - B) + lh$$

beträgt, und es ist T_2' die Bedeutung des Verlustes; zieht man diese Gleichung von der ersten ab, so findet man

$$T_2' = -kl \frac{K-B}{K}$$

und es stimmen V_2' und T_2' mit V_2 und T_2 bis auf die Constante k überein, die wir unterdrückt haben, weil sie aus den später aufzustellenden Relationen ohnehin verschwindet.

Wir wollen zunächst die drei durch die Gleichungspaare I) II), I') II'), III) IV) ausgesprochenen Arten der Messung der moralischen Bedeutung einer Vermögensänderung vergleichen und wählen hierzu den Weg der geometrischen Darstellung.

1) Darstellung von V_1 und T_1 . Trägt man v nach einer willkürlich gewählten Einheit als Abscisse (x) und V_1 , resp. T_1 als Ordinate (y) auf, so hat man die Gleichungen

$$y = \frac{x}{1+x}, \quad y = \frac{x}{1-x}$$

oder

$$(1+x)y = x, \quad (1-x)y = x$$

zu construiren; indem man bei der ersten mit Beibehaltung der Axenrichtungen den Ursprung nach dem Punkte $O_1(-1, +1)$, siehe die

Figur, bei der zweiten nach dem Punkte $O_2(+1, -1)$ verlegt, erhält man die auf diese neuen Coordinatensysteme $X_1O_1Y_1$ resp. $X_2O_2Y_2$ bezogenen Gleichungen

$$xy = 1, \quad xy = 1,$$

welche gleichzeitige Hyperbeln vorstellen, die die betreffenden Coordinatenaxen zu Asymptoten haben; von diesen Hyperbeln kommen für unseren Fall nur die in den ersten Quadranten XOY des Hauptcoordinatensystems fallenden Zweige L_1 und L_2 zur Geltung, welche durch den Ursprung O gehen und daselbst eine unter 45° geneigte gemeinschaftliche Tangente G besitzen.

Nach dieser Darstellung wächst die moralische Bedeutung einer Vermögensvergrößerung mit dem absoluten Betrage derselben von 0 bis 1; ersteren Wert nimmt sie an, wenn jene Vergrößerung gleich Null ist, letzteren Wert erlangt sie, wenn die Vermehrung dem ursprünglichen Vermögen gegenüber unendlich gross ist. Der moralische Wert einer Vermögensabnahme wächst gleichfalls mit ihrem physischen Betrage, ist Null, wenn dieser Betrag Null, und wird unendlich gross, wenn die Verminderung dem ganzen Vermögen gleich kommt.

2) Darstellung der Gleichungen I') und II').

Die Gleichung I') wird durch dieselbe Hyperbel L_1 repräsentirt, welche der Gleichung I) entspricht, die Gleichung II') dagegen durch die im Ursprunge O an jene Hyperbel geführte Tangente G .

Dieser Auffassung gemäss hat jeder Verlust, selbst wenn er über das Vermögen der betreffenden Person hinausgeht, eine endliche und reelle moralische Bedeutung; und doch muss man annehmen — und auch Oettinger tat es (l. c. pag. 233) — dass eine Person nicht mehr wagt und also auch nicht mehr verlieren kann, als ihr Vermögen beträgt. Aus diesem Grunde schon halten wir die durch das Gleichungspaar I') II') angegebene Art der Beurteilung des moralischen Wertes für unrichtig.

3) Darstellung der Gleichungen III) und IV) oder

$$y = l(1+x), \quad y = -l(1-x).$$

Verlegt man in der ersten den Ursprung mit Belassung der Axenrichtungen in den Punkt $O_3(-1, 0)$, in der zweiten nach dem Punkte $O_4(+1, 0)$ und verwechselt in letzterer überdies die negativen Hälften der Coordinatenaxen mit den positiven, so lauten die auf die neuen Systeme $X_3O_3Y_3$ und $X_4O_4Y_4$ transformirten Gleichungen

$$y = lx, \quad y = lx$$

und stellen logarithmische Linien vor, von denen wieder nur die in den Quadranten XOY fallenden Teile L_3 und L_4 zur Geltung kommen; beide gehen wieder durch den Ursprung des Hauptkoordinatensystems XOY , haben daselbst eine den Coordinatenwinkel halbirende gemeinsame Tangente G ; die zweite hat überdies die ihr zugehörige Ordinatenaxe Y_4 zur Asymptote.

Die moralische Bedeutung einer Vermögensänderung wächst nach dieser Annahme ebenfalls mit der Grösse derselben, wird jedoch, im Unterschied zu den früheren zwei Fällen, für einen unendlich grossen Gewinn ebenfalls unendlich gross; die moralische Bedeutung des ganzen Vermögensverlustes erscheint wieder unendlich gross wie im ersten Falle. Ueberhaupt zeigt die erste Annahme mit der dritten eine grosse Uebereinstimmung; nur wächst nach der ersten die Bedeutung des Verlustes, nach der zweiten jene des Gewinnes rascher. Das folgende wird zeigen, dass die Rechnung, auf diese beiden Annahmen gestützt, dem Wesen nach übereinstimmende Resultate liefert.

Unterschied zwischen der moralischen Bedeutung eines Verlustes und der eines dem absoluten Werte nach gleichen Gewinnes. Weil hier für Gewinn und Verlust ν dasselbe ist, hat man

$$3) \quad T_1 - V_1 = \frac{\nu}{1-\nu} - \frac{\nu}{1+\nu} = \frac{2\nu^2}{1-\nu^2}$$

und wenn der Quotient unter der nötigen Voraussetzung $\nu < 1$ in eine Reihe verwandelt wird,

$$4) \quad T_1 - V_1 = 2\nu^2(1 + \nu^2 + \nu^4 + \dots).$$

Nach der anderen Annahme ist

$$3') \quad T_2 - V_2 = -l(1-\nu) - l(1+\nu) = -l(1-\nu^2)$$

oder durch Reihenentwicklung unter der nämlichen Bedingung wie vorhin

$$4') \quad T_2 - V_2 = \nu^2 \left(1 + \frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu^4}{3} + \dots \right);$$

der erwähnte Unterschied ist demnach der ersten Annahme zufolge grösser und zwar in um so höheren Masse, je bedeutender ν wird.

Ein mit einem gegebenen Verlust moralisch äquivalenter Gewinn und umgekehrt. Es sei ν das Verhältniss des gegebenen Verlustes und x jenes des unbekannten Gewinnes zum anfänglichen Vermögen, so ist x_1 aus der Gleichung

$$\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{\nu}{1-\nu}$$

zu berechnen und man findet

$$5) \quad x_1 = \frac{\nu}{1-2\nu},$$

mithin $x_1 > \nu$, wie vorauszusehen war.

Ebenso findet man den einem gegebenen Gewinn ν äquivalenten Verlust ξ_1 aus der Gleichung

$$\frac{\xi_1}{1-\xi_1} = \frac{\nu}{1+\nu},$$

welche

$$6) \quad \xi = \frac{\nu}{1+2\nu}$$

ergibt; es ist also $\xi_1 < \nu$.

Hiernach erscheint der Verlust von einem Zehnteil des Vermögens gleichbedeutend mit dem Gewinn von einem Achtel desselben und andererseits der Gewinn von einem Zehnteil äquivalent mit dem Verluste von einem Zwölftel.

Nach der anderen Annahme hat man zur Lösung derselben Aufgabe die Gleichungen

$$l(1+x_2) = -l(1-\nu)$$

und

$$-l(1-\xi_2) = l(1+\nu),$$

welche

$$5') \quad x_2 = \frac{\nu}{1-\nu}$$

und

$$6') \quad \xi_2 = \frac{\nu}{1+\nu}$$

ergeben. Hier sind die Differenzen nicht so bedeutend; der Verlust von einem Zehnteil und der Gewinn von einem Neuntel einerseits, der Gewinn von einem Zehnteil und der Verlust von einem Eilftel andererseits sind moralisch äquivalent.

Moralischer Wert ungewisser Summen. Wenn auf die Verhältnisse der Person, welche eine von einem ungewissen Ereignisse abhängige Geldsumme gewinnen oder verlieren soll, keine Rücksicht genommen wird, so bringt man an Stelle des physischen Wertes der Summe ihr Product mit der Wahrscheinlichkeit des sie bedingenden Ereignisses in Rechnung und nennt dieses die mathematische Erwartung (Hoffnung oder Furcht, jenachdem die Summe gewonnen oder verloren werden soll) der Person.

Wenn aber das Vermögen, in dessen Besitz sich die Person vor dem Gewinn oder Verlust befindet, beachtet werden soll, dann wird

man in jenem Producte den physischen Wert der fraglichen Geldsumme durch den moralischen ersetzen und es sodann die moralische Erwartung nennen; aus dem Betrage dieser kann wieder die entsprechende physische Geldsumme berechnet werden. Erwartet z. B. jemand den Gewinn einer Summe v (sein Vermögen als Einheit angenommen) mit der Wahrscheinlichkeit w , so ist der mathematische Wert seiner Erwartung

$$E = vw,$$

der moralische dagegen

$$7) \quad H_1 = \frac{v}{1+v} \cdot w;$$

wird die dieser Erwartung entsprechende physische Geldsumme mit x_1 bezeichnet, so hat man zu ihrer Bestimmung die Gleichung

$$\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{vw}{1+v}.$$

woraus

$$8) \quad x_1 = \frac{vw}{1+v(1-w)}$$

folgt, ein Betrag, der kleiner ist als die mathematische Erwartung. Nach dieser Formel entspricht der moralischen Erwartung, wenn eine dem halben Vermögen gleichkommende Summe mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ gewonnen werden soll, $\frac{1}{2} = 0.2$ des Vermögens als physische Summe.

Nach der zweiten Art ist unter den gleichen Verhältnissen die moralische Hoffnung

$$7') \quad H_2 = wl(1+v) = l(1+v)^w$$

und die correspondirende physische Summe wird aus der Gleichung

$$l(1+x_2) = l(1+v)^w$$

gefunden, welche

$$8') \quad x_2 = (1+v)^w - 1$$

ergibt; auf das vorige Beispiel angewendet, gibt diese Formel $x_2 = 0.22474$.

Eine ähnliche Rechnung ist anzulegen, wenn die ungewisse Summe Verlust bedeutet. Wenn dann ξ_1 die der moralischen Furcht im einen, ξ_2 im anderen Falle entsprechende physische Summe bedeutet, so folgt aus den Gleichungen

$$\frac{\xi_1}{1-\xi_1} = \frac{v}{1-v} \cdot w$$

$$-l(1-\xi_2) = -wl(1-v)$$

der erste Wert

$$9) \quad \xi_1 = \frac{vw}{1 - v(1-w)},$$

der zweite

$$9') \quad \xi_2 = -\{(1-v)^w - 1\}.$$

Für $v = \frac{1}{2}$ und $w = \frac{1}{2}$ ergibt die Rechnung

$$\xi_1 = 0.33333$$

$$\xi_2 = 0.29289.$$

Für $v = 1$ geben beide Formeln ohne Rücksicht auf die Grösse von w den Wert 1, wonach also dem mit noch so geringer Wahrscheinlichkeit bevorstehenden Verluste des ganzen Vermögens als physischer Betrag wieder das ganze Vermögen gegenübersteht.

Hat eine Person den Gewinn, resp. Verlust mehrerer Summen $v_1 v_2 v_3 \dots$ mit den Wahrscheinlichkeiten $w_1 w_2 w_3 \dots$ zu erwarten, wobei vorausgesetzt wird, dass $w_1 + w_2 + w_3 + \dots = 1$ ist, so findet man den Gesamtbetrag ihrer moralischen Hoffnung, wenn man die algebraische Summe der einzelnen Erwartungen bildet, wobei die auf Gewinn bezüglichen positiv, die die Verluste betreffenden negativ in Rechnung gezogen werden. Für die Summe v_r hat man also den Betrag

$$+ \frac{v_r}{1 + v_r} \cdot w_r$$

einzustellen, wenn sie Gewinn, und

$$- \frac{v_r}{1 - v_r} \cdot w_r,$$

wenn sie Verlust bedeutet, daher allgemein $\frac{v_r}{1 + v_r} \cdot w_r$, wenn man den Grundsatz befolgt, dass v_r für einen Gewinn positiv, für einen Verlust negativ genommen wird. Nach dieser Bemerkung hat man also für die moralische Hoffnung den Wert

$$10) \quad H_1 = \frac{v_1}{1 + v_1} \cdot w_1 + \frac{v_2}{1 + v_2} \cdot w_2 + \frac{v_3}{1 + v_3} \cdot w_3 + \dots$$

Nach der zweiten Annahme wäre für v_r , sofern es Gewinn bedeutet,

$$+ w_r l(1 + v_r),$$

und

$$- (-w_r l(1 - v_r)) \quad \text{oder} \quad + w_r l(1 - v_r)$$

einzusetzen, wenn es Verlust vorstellt; daher kann wieder, wenn man

dem oben berührten Grundsatz folgt, allgemein $w_r l(1 + v_r)$ geschrieben werden, und damit ergibt sich

$$H_2 = w_1 l(1 + v_1) + w_2 l(1 + v_2) + w_3 l(1 + v_3) + \dots$$

oder

$$10') \quad H_2 = l \{ (1 + v_1)^{w_1} \cdot (1 + v_2)^{w_2} \cdot (1 + v_3)^{w_3} \dots \}.$$

Den physischen Betrag v_{51} , welcher der moralischen Hoffnung im ersten Falle entspricht, findet man aus der Gleichung

$$\frac{v_{51}}{1 + v_{51}} = \frac{v_1}{1 + v_1} w_1 + \frac{v_2}{1 + v_2} w_2 + \frac{v_3}{1 + v_3} w_3 + \dots;$$

die Auflösung ergibt unter Berücksichtigung der Relation $w_1 + w_2 + w_3 + \dots = 1$

$$11) \quad v_{51} = \frac{\frac{w_1}{1 + v_1} v_1 + \frac{w_2}{1 + v_2} v_2 + \frac{w_3}{1 + v_3} v_3 + \dots}{\frac{w_1}{1 + v_1} + \frac{w_2}{1 + v_2} + \frac{w_3}{1 + v_3} + \dots};$$

hiernach erscheint v_{51} als ein Mittelwert der Beträge v_1, v_2, v_3, \dots , wenn diesen die Quotienten $\frac{w_1}{1 + v_1}, \frac{w_2}{1 + v_2}, \frac{w_3}{1 + v_3} \dots$ als Gewichte beigelegt werden.

Nach der anderen Annahme folgt v_{52} aus der Gleichung

$$l(1 + v_{52}) = l \{ (1 + v_1)^{w_1} \cdot (1 + v_2)^{w_2} \cdot (1 + v_3)^{w_3} \dots \},$$

welche dafür den Wert

$$11') \quad v_{52} = (1 + v_1)^{w_1} \cdot (1 + v_2)^{w_2} \cdot (1 + v_3)^{w_3} \dots - 1$$

liefert.

Anwendungen der gewonnenen Formeln.

a) Wagt jemand die Hälfte seines Vermögens und ist $\frac{1}{2}$ die Wahrscheinlichkeit, selbe zu verlieren, und $\frac{1}{2}$ die Wahrscheinlichkeit, eine gleich grosse Summe zu gewinnen, so ist der seiner moralischen Hoffnung entsprechende physische Betrag

$$v_{51} = \frac{\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}} = -\frac{1}{4} = -0.25,$$

$$v_{52} = (1 + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} - 1 = -\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -0.1340;$$

die moralische Hoffnung übergeht hier in die Furcht, 0.25 resp. 0.134 seines Vermögens zu verlieren.

β) Betrachtet man irgend ein Spiel, bei welchem die Einsätze nach den Regeln der mathematischen Hoffnung geordnet sind, welches also mathematisch gleich ist, so kann leicht erwiesen werden, dass es für jeden der Mitspielenden moralisch nachteilig ist.

Gesetzt, ν sei der Einsatz eines Spielers A , w die Wahrscheinlichkeit für ihn, zu gewinnen, also $1-w$ jene für das Verlieren, so ist $\frac{\nu(1-w)}{w}$ der rechtmässige Einsatz des Gegners B oder der Gewinn, welchen A zu erwarten hat. Die moralische Hoffnung für A ist, der ersten Annahme zufolge,

$$\frac{\frac{\nu(1-w)}{w}}{1 + \frac{\nu(1-w)}{w}} w - \frac{\nu}{1-\nu} (1-w) = - \frac{\nu^2(1-w)}{\{w + \nu(1-w)\} (1-\nu)},$$

also negativ, übergeht daher in Furcht und der dieser entsprechende physische Geldbetrag ist

$$- \nu \frac{\nu(1-w)}{\nu(1-w) + w(1-\nu)}.$$

Nach der anderen Annahme ergibt die Rechnung die moralische Hoffnung im Betrage

$$\begin{aligned} w l \left(1 + \frac{\nu(1-w)}{w} \right) + (1-w) l(1-\nu) \\ = - (1-w) \int_0^{\nu} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1 + \frac{1-w}{w} x} \right) dx, \end{aligned}$$

also gleichfalls negativ, weil der Wert des Integrals unter der Bedingung $\nu < 1$ positiv bleibt; der entsprechende physische Geldwert ist

$$- \left(1 - \left(1 + \frac{\nu(1-w)}{w} \right)^w \cdot (1-\nu)^{1-w} \right).$$

γ) Wagt jemand einen Betrag ν , um im günstigen Falle einen gleich grossen zu gewinnen, und ist w_1 die Wahrscheinlichkeit, die er für das Gewinnen, w_1' jene, die er für das Verlieren hat, so befindet er sich moralisch weder im Vor- noch im Nachteile, wenn $\nu_{51} = 0$, d. h. wenn

$$\frac{\frac{vw_1}{1+\nu} - \frac{vw_1'}{1-\nu}}{\frac{w_1}{1+\nu} + \frac{w_1'}{1-\nu}} = 0$$

oder

$$\frac{vw_1}{1+\nu} = \frac{vw_1'}{1-\nu};$$

hieraus ergibt sich unter Beachtung der Bedingung $w_1 + w_1' = 1$

$$\begin{aligned} 12) \quad w_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} \\ w_1' &= \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}. \end{aligned}$$

Nach der anderen Annahme, wenn wir dort die Wahrscheinlichkeiten mit w_2 und w_2' bezeichnen, wird erfordert, dass

$$\nu_{52} = (1+\nu)w_2 \cdot (1-\nu)w_2' - 1 = 0$$

werde und daraus berechnet sich

$$\begin{aligned} 12') \quad w_2 &= \frac{-l(1-\nu)}{l(1+\nu) - l(1-\nu)} = \frac{1}{2} + \frac{\nu \left(1 + \frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu^4}{3} + \frac{\nu^6}{4} + \dots\right)}{4 \left(1 + \frac{\nu^2}{3} + \frac{\nu^4}{5} + \frac{\nu^6}{7} + \dots\right)} \\ w_2' &= \frac{l(1+\nu)}{l(1+\nu) - l(1-\nu)} = \frac{1}{2} - \frac{\nu \left(1 + \frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu^4}{3} + \frac{\nu^6}{4} + \dots\right)}{4 \left(1 + \frac{\nu^2}{3} + \frac{\nu^4}{5} + \frac{\nu^6}{7} + \dots\right)}; \end{aligned}$$

die Entwicklung zeigt, dass man für genügend kleine Werte von ν

$$\begin{aligned} 12'') \quad w_2 &= \frac{1}{2} + \frac{\nu}{4} \\ w_2' &= \frac{1}{2} - \frac{\nu}{4} \end{aligned}$$

setzen könne.

Beide Annahmen führen zu dem Ergebniss, dass die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes in Gewissheit übergehen müsse, wenn die gewagte Summe das ganze Vermögen ausmacht, was mit einer früher gemachten Bemerkung im Einklange steht.

δ) Steht ein Gewinn ν mit der Wahrscheinlichkeit w und ein Verlust ν_1 mit der Gegenwahrscheinlichkeit $w' = 1 - w$ zu erwarten,

so reducirt sich die moralische Erwartung der betreffenden Person auf die Nulle, wenn

$$\frac{vw}{1+\nu} = \frac{\nu_1 w'}{1-\nu_1};$$

aus dieser Relation kann bei gegebenem ν und ν_1 das erforderliche w und w' berechnet werden; man findet

$$\begin{aligned} w &= \frac{\nu_1(1+\nu)}{\nu+\nu_1} \\ 13) \quad w' &= \frac{\nu(1-\nu_1)}{\nu+\nu_1}; \end{aligned}$$

während also für das Verschwinden der mathematischen Erwartung $\frac{w}{w'} = \frac{\nu_1}{\nu}$ sein müsste, ist hier $\frac{w}{w'} = \frac{\nu_1(1+\nu)}{\nu(1-\nu_1)}$, d. h. die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens fällt grösser, jene des Verlierens kleiner aus als dort.

Die Gleichung kann auch dazu verwendet werden, bei gegebenen Wahrscheinlichkeiten Beziehungen zwischen Gewinn und Verlust herzustellen; dieselben lauten:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\nu_1 w'}{w - \nu_1} = \frac{\nu_1 w'}{w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\nu_1}{w}} \\ 14) \quad \nu_1 &= \frac{\nu w}{w' + \nu} = \frac{\nu w}{w'} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\nu}{w'}}; \end{aligned}$$

in diesen Ausdrücken sind $\frac{\nu_1 w'}{w}$ und $\frac{\nu w}{w'}$ die durch die Parität der mathematischen Erwartungen geforderten Beträge und man erkennt, dass für den gegenwärtigen Fall der Gewinn grösser, der Verlust kleiner gefordert wird als dort.

Legt man die andere Annahme zu Grunde, so findet man durch Lösung der Gleichung

$$wl(1+\nu) = -w'l(1-\nu_1)$$

in analoger Weise wie vorhin:

$$\begin{aligned} w &= \frac{-l(1-\nu_1)}{l(1+\nu) - l(1-\nu_1)} \\ 13') \quad w' &= \frac{l(1+\nu)}{l(1+\nu) - l(1-\nu_1)}; \end{aligned}$$

$$14') \quad v = (1 - v_1)^{-\frac{w'}{w}} - 1$$

$$v_1 = -\{(1 + v)^{-\frac{w}{w'}} - 1\}$$

oder

$$14'') \quad v = \frac{v_1 w'}{w} \left(1 + \frac{v_1}{2w} + \dots\right)$$

$$v_1 = \frac{vw}{w'} \left(1 - \frac{v}{2w'} + \dots\right).$$

ε) Wir wollen ferner das von Laplace angeführte Beispiel über den moralischen Vor- oder Nachteil einer Assecuranz nach beiden Annahmen behandeln. Ein Kaufmann hat über See Waaren im Werte v (bezogen auf sein Vermögen als Einheit) zu erwarten, und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schiff der betreffenden Gattung glücklich in den Hafen einläuft, sei der Erfahrung gemäss w . Assecurirt der Kaufmann nicht, so hat er eine Vermögensvergrösserung im Betrage v mit der Wahrscheinlichkeit w zu erwarten, der Wert seiner moralischen Hoffnung ist

$$\frac{vw}{1+v};$$

assecurirt er die Waare, so ist der rechtmässige an die Gesellschaft zu zahlende Betrag $v(1-w)$ und sein Vermögen vergrössert sich mit Gewissheit um $v - v(1-w) = vw$, der Wert seiner moralischen Hoffnung ist jetzt

$$\frac{vw}{1+vw},$$

also grösser als im vorigen Falle, wie man aus einem Blick auf die Nenner erkennt; das Assecuriren ist daher für ihn von moralischem Vorteil. Erst wenn er einen Betrag α_1 über die rechtmässige Gebühr $v(1-w)$ erlegt, der seine Vermögenserhöhung auf $vw - \alpha_1$ herabbringt und aus der Gleichung

$$\frac{vw}{1+v} = \frac{vw - \alpha_1}{1+vw - \alpha_1}$$

zu berechnen ist, hat er von der Assecuranz weder Vor- noch Nachteil; es ergibt sich

$$15) \quad \alpha_1 = v(1-w) \cdot \frac{vw}{1+vw - \alpha_1}.$$

Aus obiger Gleichung könnte auch bei bekanntem w und α_1 das nötige v und aus diesem wieder jenes Vermögen, welches der Kaufmann besitzen muss, damit er trotz der Ueberzahlung keinen Nachteil erleide, berechnet werden.

Legt man dieselbe Rechnung nach der zweiten Annahme an, so findet man als Wert der moralischen Hoffnung bei Unterlassung des Assecurirens:

$$wl(1+v) = w \int_0^v \frac{dx}{1+x}$$

und für den Fall, dass der Kaufmann assecurirt:

$$l(1+vw) = w \int_0^v \frac{dx}{1+wx};$$

die Vergleichung der Integrale lässt sofort erkennen, dass die moralische Hoffnung im zweiten Falle grösser ist als im ersten. Die erlaubte Ueberzahlung α_2 ergibt sich aus der Gleichung

$$l(1+vw-\alpha_2) = wl(1+v),$$

welche

$$15') \quad \alpha_2 = 1+vw - (1+w)^w$$

liefert. Für $v = \frac{1}{20}$ und $w = \frac{1}{20}$ erhält man

$$\alpha_1 = 0.000118 \text{ oder } 0.0474 \text{ der rechtmässigen Gebühr,}$$

$$\alpha_2 = 0.000061 \quad ,, \quad 0.0244 \quad ,, \quad ,, \quad ,,$$

§) Laplace knüpft hieran weiter die Frage, ob es für den Kaufmann moralisch vorteilhaft sei, die Waare, statt sie einem Schiffe anzuvertrauen, auf r Schiffe gleichmässig zu verteilen, welche gleiche Wahrscheinlichkeit w des unversehrten Ankommens haben.

Wenn sich die ganze Waare auf einem Schiffe befindet, so haben wir für die moralische Hoffnung den Wert

$$16) \quad H_1 = \frac{vw}{1+v}.$$

Bei der erwähnten Verteilung kann das Vermögen des Kaufmannes um

$$v \quad \frac{r-1}{r}v \quad \frac{r-2}{r}v \quad \dots \quad \frac{1}{r}v \quad 0$$

sich vermehren, jenachdem von den Schiffen alle, $r-1$, $r-2$, . . . eines oder keines ankömmt, und für diese Ereignisse sind

$$w^r \quad \binom{r}{1} w^{r-1}(1-w) \quad \binom{r}{2} w^{r-2}(1-w)^2 \dots \binom{r}{r-1} w(1-w)^{r-1} \quad (1-w)^r$$

die Wahrscheinlichkeiten; die moralische Hoffnung des Kaufmannes ist daher

$$\begin{aligned}
 17) \quad H_1' &= w^r \frac{\nu}{1+\nu} + \binom{r}{1} w^{r-1}(1-w) \cdot \frac{\frac{r-1}{r}\nu}{1+\frac{r-1}{r}\nu} \\
 &+ \binom{r}{2} w^{r-2}(1-w)^2 \cdot \frac{\frac{r-2}{r}\nu}{1+\frac{r-2}{r}\nu} + \dots + \binom{r}{r-1} w(1-w)^{r-1} \cdot \frac{\frac{1}{r}\nu}{1+\frac{1}{r}\nu} + 0.
 \end{aligned}$$

Zur Vergleichung von H_1 und H_1' fügen wir der ersteren Grösse den Factor 1 in Form der Reihe

$$\begin{aligned}
 w^{r-1} + \binom{r-1}{1} w^{r-2}(1-w) + \binom{r-1}{2} w^{r-3}(1-w)^2 + \dots \\
 + \binom{r-1}{r-2} w(1-w)^{r-2} + \binom{r-1}{r-1} (1-w)^{r-1}
 \end{aligned}$$

zu und schreiben:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= w^r \frac{\nu}{1+\nu} + \binom{r-1}{1} w^{r-1}(1-w) \cdot \frac{\nu}{1+\nu} \\
 &+ \binom{r-1}{2} w^{r-2}(1-w)^2 \cdot \frac{\nu}{1+\nu} + \dots + \binom{r-1}{r-1} w(1-w)^{r-1} \cdot \frac{\nu}{1+\nu}.
 \end{aligned}$$

Nun lautet das s te Glied aus H_1'

$$\binom{r}{s} w^{r-s}(1-w)^s \cdot \frac{\frac{r-s}{r}\nu}{1+\frac{r-s}{r}\nu},$$

jenes aus dem Ausdrucke für H_1

$$\binom{r-1}{s} w^{r-s}(1-w)^s \cdot \frac{\nu}{1+\nu}$$

und die Differenz der abweichenden Factoren dieser Glieder ist

$$r \cdot \frac{\frac{r-s}{r}\nu}{1+\frac{r-s}{r}\nu} - (r-s) \frac{\nu}{1+\nu} = \frac{\nu^2(r-s) \frac{s}{r}}{\left(1+\frac{r-s}{r}\nu\right)(1+\nu)},$$

also immer positiv; nur für $s=0$ verschwindet sie. Demnach ist, da alle Glieder von H_1' grösser sind als die correspondirenden von H_1 , auch

$$H_1' > H_1$$

und die Verteilung erscheint als moralisch vorteilhafter.

Legt man die zweite Annahme zu Grunde, so ist ohne Verteilung der Waare

$$16') \quad H_2 = wl(1+\nu),$$

und wenn die Waare verteilt wird, die moralische Hoffnung

$$17') \quad H_2' = w^r l(1+\nu) + \binom{r}{1} w^{r-1} (1-w) l \left(1 + \frac{r-1}{r} \nu\right) \\ + \binom{r}{2} w^{r-2} (1-w)^2 l \left(1 + \frac{r-2}{r} \nu\right) + \dots + \binom{r}{r-1} w (1-w)^{r-1} l \left(1 + \frac{1}{r} \nu\right) + 0;$$

verfährt man mit H_2 in derselben Weise wie oben, so kann

$$H_2 = w^r l(1+\nu) + \binom{r-1}{1} w^{r-1} (1-w) l(1+\nu) \\ + \binom{r-1}{2} w^{r-2} (1-w)^2 l(1+\nu) + \dots + \binom{r-1}{r-1} w (1-w)^{r-1} l(1+\nu)$$

geschrieben werden. Der Unterschied der abweichenden Factoren correspondirender Glieder ist jetzt

$$rl \left(1 + \frac{r-s}{r} \nu\right) - (r-s) l(1+\nu) = (r-s) \int_0^\nu \frac{dx}{1 + \frac{r-s}{r} x} - (r-s) \int_0^\nu \frac{dx}{1+x} \\ = (r-s) \frac{s}{r} \int_0^\nu \frac{x dx}{\left(1 + \frac{r-s}{r} x\right) (1+x)},$$

ebenfalls durchwegs positiv; mithin ist wie im vorigen Falle

$$H_2' > H_2.$$

Die geführten Betrachtungen haben gezeigt, dass alle allgemeinen Resultate, welche die Einführung des Begriffes der moralischen Bedeutung einer Geldsumme und der moralischen Hoffnung in die Mathematik geliefert hat, auch ohne die Bernoulli'sche Hypothese der continuirlichen Vermögensänderung abgeleitet werden können; und diese allgemeinen Resultate sind es, welche Anspruch auf Berechtigung erheben dürfen, indem sie mit den Eingebungen des gesunden Menschenverstandes im Einklange stehen, während doch den

speciellen Zahlenergebnissen, ob nach dieser oder jener Annahme gerechnet, nur geringere Wichtigkeit, namentlich für den einzelnen Fall, zugesprochen werden kann. Die nähere Vergleichung zeigt, dass die Annahme der plötzlichen Vermögensänderung — die übrigens in manchen Fällen, so bei Wetten und Spielen, nicht ganz unbegründet sein dürfte — die Verhältnisse strenger beurteilt, den Gewinn weniger wichtig, dagegen den Verlust bedeutender erscheinen lässt als Bernoulli's Hypothese.

Zur Ableitung der allgemeinen Resultate sind also beide Annahmen gleich dienlich, die erste hat den Vorteil, dass sie einen einfacheren Rechnungsmechanismus erfordert.

XVII.

Propriétés relatives des polyèdres réguliers,
qui sont conjugués entre eux.

Par

Georges Dostor.

1. Dans le Tome LIX, 1876, de ces Archives, nous avons fait connaître quelques propriétés nouvelles des polyèdres réguliers (pages 50 à 58), qui reposent sur l'introduction, dans les calculs, du rayon de la sphère tangente aux arêtes.

A la fin de notre article (pages 57 et 58) nous avons trouvé que, si deux polyèdres réguliers conjugués sont inscrits dans la même sphère, leurs volumes sont entre eux comme les rayons des deux sphères, qui sont tangentes aux arêtes de nos deux polyèdres.

Nous avons été conduit à ce résultat par la comparaison des valeurs numériques, que nous avons obtenues pour ces volumes et pour les rayons des deux sphères.

Or cette proposition n'est que la conséquence d'un théorème général qui s'applique aussi aux polyèdres réguliers conjugués, lorsque ceux-ci sont étoilés.

Pour établir ce théorème et l'appliquer aux volumes, nous conserverons les notations de l'article cité et nous ferons usage de la même figure, que le lecteur est prié de construire.

2. **Théorème général.** Lorsque deux polyèdres réguliers, convexes ou étoilés, sont conjugués entre eux, les

cotangentes des demi-inclinaisons mutuelles des faces adjacentes sont entre eux comme les cosinus des demi-angles au centre de ces faces.

Considérons un polyèdre régulier, dont les faces soient des polygones de n côtés et de l'espèce q , et dont les angles solides aient m faces et soient de l'espèce p .

La demi-inclinaison mutuelle I des faces adjacentes du polyèdre sera donnée par la formule

$$(1) \quad \sin I = \frac{\cos \frac{p\pi}{m}}{\sin \frac{q\pi}{n}}.$$

Le polyèdre régulier, conjugué du précédent, sera terminé par des polygones de m côtés et de l'espèce p , et par des angles solides de n faces et de l'espèce q . La demi-inclinaison mutuelle I' des faces adjacentes de ce second polyèdre sera

$$(2) \quad \sin I' = \frac{\cos \frac{q\pi}{n}}{\sin \frac{p\pi}{m}}.$$

Puisqu'on a, en général,

$$\cot^2 x = \cos^2 x - 1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1,$$

les formules (1) et (2) nous donnent

$$\begin{aligned} \cot^2 I &= \frac{\sin^2 \frac{q\pi}{n}}{\cos^2 \frac{p\pi}{m}} - 1 = \frac{\sin^2 \frac{q\pi}{n} - \cos^2 \frac{p\pi}{m}}{\cos^2 \frac{p\pi}{m}}, \\ \cot^2 I' &= \frac{\sin^2 \frac{p\pi}{m}}{\cos^2 \frac{q\pi}{n}} - 1 = \frac{\sin^2 \frac{p\pi}{m} - \cos^2 \frac{q\pi}{n}}{\cos^2 \frac{q\pi}{n}}, \end{aligned}$$

d'où on tire

$$\begin{aligned} \cot^2 I \cdot \cos^2 \frac{p\pi}{m} &= \sin^2 \frac{q\pi}{n} - \cos^2 \frac{p\pi}{m}, \\ \cot^2 I' \cdot \cos^2 \frac{q\pi}{n} &= \sin^2 \frac{p\pi}{m} - \cos^2 \frac{q\pi}{n}. \end{aligned}$$

Mais les seconds membres de ces égalités sont égaux, en vertu de la relation

$$1 = \sin^2 \frac{q\pi}{n} + \cos^2 \frac{q\pi}{n} = \sin^2 \frac{p\pi}{m} + \cos^2 \frac{p\pi}{m};$$

donc les premiers le sont aussi, et il vient

$$\cot I \cdot \cos \frac{p\pi}{m} = \cot I' \cdot \cos \frac{q\pi}{m},$$

d'où l'on tire la proportion

$$(I) \quad \frac{\cot I}{\cot I'} = \frac{\cos \frac{q\pi}{m}}{\cos \frac{p\pi}{m}},$$

qu'il fallait établir.

Si les polyèdres réguliers sont convexes, on aura

$$q = 1, \quad p = 1;$$

et par suite

$$(II) \quad \frac{\cot I}{\cot I'} = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{m}}.$$

3. Volume d'un polyèdre régulier convexe en valeur des rayons des trois sphères. Soit a l'arête d'un polyèdre régulier convexe de F faces ayant chacune n côtés et s le rayon de la sphère inscrite. Nous avons trouvé (page 56, loc. cit.), que le volume V du polyèdre est

$$(III) \quad V = \frac{1}{12} n F a^2 r \cot \frac{\pi}{n}.$$

Représentons par R le rayon de la sphère circonscrite, par ϱ celui de la sphère tangente aux arêtes, nous avons (même page)

$$a = 2R \cot \frac{\pi}{m} \cot I,$$

$$a = 2\varrho \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\cos \frac{\pi}{n}} \cot I,$$

où m désigne le nombre des arêtes issues de chaque sommet et I la demi-inclinaison mutuelle des faces adjacentes.

Le produit de ces deux valeurs de a sera

$$a^2 = 4Rq \frac{\cos^2 \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{m} \cos \frac{\pi}{n}} \cot^2 I.$$

Mettant cette valeur de a^2 dans l'expression (III), nous obtiendrons pour le volume la nouvelle expression

$$(IV) \quad V = \frac{1}{3} n F R r q \cdot \frac{\cos^2 \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{m} \sin \frac{\pi}{n}} \cdot \cot^2 I.$$

4. Rapport des volumes de deux polyèdres réguliers conjugués, qui sont inscrits dans la même sphère. Lorsque deux polyèdres réguliers conjugués sont inscrits dans la même sphère, on sait qu'ils sont aussi circonscrits à la même. Donc si R a la même valeur pour les deux polyèdres, il en sera de même de r et de même aussi du produit $\sin \frac{\pi}{m} \sin \frac{\pi}{n}$. D'ailleurs le produit nF aura aussi même valeur pour les deux polyèdres: car s'il est $4.6 = 24$ pour l'hexaèdre, il sera $3.8 = 24$ pour l'octaèdre; de même, s'il est $5.12 = 60$ pour le dodocaèdre, il sera $3.20 = 60$ pour l'icosaèdre.

Cela posé, soient V et V' les volumes de deux polyèdres réguliers conjugués qui sont inscrits dans la même sphère de rayon R ; r le rayon commun de la sphère inscrite; q et q' les rayons des deux sphères tangentes aux arêtes; I et I' les demi-inclinaisons mutuelles des faces adjacentes; n et m les nombres de côtés de leurs faces; F et F' les nombres de ces faces. Nous avons, d'après (IV),

$$V = \frac{1}{3} n F R r q \cdot \frac{\cos^2 \frac{\pi}{m} \cot^2 I}{\sin \frac{\pi}{m} \sin \frac{\pi}{n}},$$

$$V' = \frac{1}{3} m F' R r q' \cdot \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n} \cot^2 I'}{\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{m}}.$$

Divisant membre à membre et observant que $nF = mF'$, il vient

$$\frac{V}{V'} = \frac{q}{q'} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\pi}{m} \cot^2 I}{\cos^2 \frac{\pi}{n} \cot^2 I'}$$

Mais l'égalité (II) donne

$$\cos \frac{\pi}{n} \cot I = \cos \frac{\pi}{n} \cot I;$$

Donc il reste

$$(V) \quad \frac{V}{V'} = \frac{S}{S'}.$$

Ainsi, Lorsque deux polyèdres réguliers sont conjugués, s'ils se trouvent inscrits dans une même sphère, leurs valeurs seront entre eux comme les rayons des sphères tangentes aux arêtes.

Il s'ensuit que leurs surfaces sont dans le même rapport.

Paris. 10 novembre 1877.

XVIII.

Nouvelle Méthode pour déterminer les foyers des Courbes du second degré.

Par

Georges Dostor.

1. Dans cette méthode, on a besoin de connaître les Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polynôme entier du second degré à deux variables soit un carré.

Considérons d'abord le polynôme

$$(1) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + 1$$

dans lequel le terme constant est égal à l'unité. Pour que ce polynôme soit un carré, il faut et il suffit que sa racine soit de la forme

$$mx + ny + 1.$$

Nous devons donc avoir, quels que soient x et y ,

$$\begin{aligned} & ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + 1 \\ &= m^2x^2 + 2mnxy + n^2y^2 + 2mx + 2ny + 1. \end{aligned}$$

Cette identité ne saurait avoir lieu, que si

$$a = m^2, \quad b = mn, \quad c = n^2, \quad d = m, \quad e = n$$

Eliminant les deux indéterminées m et n entre ces cinq égalités, nous obtenons les trois relations de condition

$$(I) \quad d^2 - a = 0, \quad e^2 - c = 0, \quad de - b = 0.$$

Ces conditions (I) sont donc nécessaires. Elles sont d'ailleurs suffisantes: car, si elles sont remplies, le polynôme (1) sera évidemment le carré du trinôme $dx + ey + 1$.

Prenons maintenant un polynôme

$$(2) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F,$$

dans lequel le terme constant F est quelconque.

Ce polynôme pouvant s'écrire

$$F \left(\frac{A}{F}x^2 + 2\frac{B}{F}xy + \frac{C}{F}y^2 + 2\frac{D}{F}x + 2\frac{E}{F}y + 1 \right),$$

on voit, d'après (I), que la partie entre parenthèses sera un carré, si l'on a

$$\frac{D^2}{F^2} - \frac{A}{F} = 0, \quad \frac{E^2}{F^2} - \frac{C}{F} = 0, \quad \frac{DE}{F^2} - \frac{B}{F} = 0,$$

ou, si

$$(II) \quad D^2 - AF = 0, \quad E^2 - CF = 0, \quad DE - BF = 0.$$

Donc, Pour que le polynôme du second degré (2), à deux variables x et y , soit un carré, à un facteur constant près, il faut et il suffit que ses coefficients satisfont aux trois relations de condition (II).

2. Système des deux équations, qui donnent les foyers des courbes du second degré. Supposons que l'équation

$$(3) \quad f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

représente une conique quelconque. Transportons l'origine en un point quelconque du plan, dont les coordonnées soient α et β .

L'équation de la courbe, rapportée à la nouvelle origine, sera

$$(4) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + xfa' + yf\beta' + f(\alpha, \beta) = 0.$$

Supposons que la nouvelle origine des coordonnées soit un foyer. Dans ce cas la distance à cette origine

$$\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$$

d'un point quelconque (x, y) de la conique (4) devra être une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées x et y de ce point.

Or, si nous appelons λ un facteur arbitraire, l'équation (4) donne

$$(5) \quad \begin{aligned} \lambda\delta^2 &= \lambda(x^2 + y^2) \\ &= (A + \lambda)x^2 + 2Bxy + (C + \lambda)y^2 + xfa' + yf\beta' + f(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Nous voyons ainsi que la nouvelle origine sera un foyer de la conique (3), si les coordonnées α et β de cette origine sont telles que le second membre de l'équation (5) est, à un facteur constant près, un carré parfait. Cette condition sera évidemment remplie, si les trois relations, qui correspondent à (II), sont satisfaites.

Il faut et il suffit donc que l'on ait

$$(6) \quad \frac{1}{4}fa'^2 - (A + \lambda)f(\alpha, \beta) = 0,$$

$$(7) \quad \frac{1}{4}f\beta'^2 - (C + \lambda)f(\alpha, \beta) = 0,$$

$$(8) \quad \frac{1}{4}fa'f\beta' - Bf(\alpha, \beta) = 0.$$

Ces trois équations ont lieu entre les coefficients de l'équation (3) de la conique donnée, entre les coordonnées α et β du foyer rapporté à la même origine que la conique (3) et entre le facteur arbitraire λ , qui n'entre que dans les deux équations (6) et (7).

Si nous retranchons (7) de (6), nous éliminerons λ , et nous obtiendrons l'équation

$$(9) \quad \frac{1}{4}fa'^2 - \frac{1}{4}f\beta'^2 - (A - C)f(\alpha, \beta) = 0,$$

Les deux équations qui déterminent les coordonnées α et β des foyers sont donc

$$(III) \quad \frac{1}{4}fa'f\beta' - Bf(\alpha, \beta) = 0,$$

$$(IV) \quad \frac{1}{4}fa'^2 - \frac{1}{4}f\beta'^2 - (A - C)f(\alpha, \beta) = 0.$$

Cette méthode, si simple et si élégante, a été exposée tout récemment dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*; 2^{ème} Série, tome XVII, page 26, par M. E. G., ancien élève du lycée de Reims. L'auteur se borne à l'établissement des deux équations (III) et (IV). Nous verrons au n° 4 que l'une de ces équations peut être remplacée par l'équation aux axes de la conique, équation qui n'est qu'une conséquence du système précédent.

3. Développement du système des équations aux foyers. L'équation (3) nous donne

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 2D\alpha + 2E\beta + F \\ \frac{1}{2}f'_\alpha(\alpha, \beta) &= A\alpha + B\beta + D, \\ \frac{1}{2}f'_\beta(\alpha, \beta) &= B\alpha + C\beta + E. \end{aligned}$$

Si nous substituons ces expressions dans les équations (III) et (IV), elles deviendront, après réductions,

$$(V) \quad (AC - B^2)\alpha\beta + (AE - BD)\alpha + (CD - BE)\beta + DE - BF = 0,$$

$$(VI) \quad (AC - B^2)(\alpha^2 - \beta^2) + 2(CD - BE)\alpha - 2(AE - BD)\beta + (D^2 - AF) - (E^2 - CF) = 0.$$

Si l'on suppose que α et β expriment des coordonnées courantes, ces deux équations (V) et (VI) représenteront deux coniques, dont les quatre points d'intersection seront les quatre foyers de la courbe du second degré (3).

Admettons que la conique donnée (3) soit une courbe à centre. Le coefficient $AC - B^2$ sera dans ce cas différent de zéro; par suite les deux coniques (V) et (VI) seront aussi à centre. Les coordonnées de leur centre étant données par le système des deux équations

$$\begin{aligned} (AC - B^2)\beta + (AE - BD) &= 0, \\ (AC - B^2)\alpha + (CD - BE) &= 0, \end{aligned}$$

on voit que les deux coniques (V) et (VI) ont même centre que la courbe donnée (3) du second degré.

Il est aisé de voir d'ailleurs que l'équation (V) représente une hyperbole, dont les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées; et que l'équation (VI) est une hyperbole équilatère, dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées. Ces deux hyperboles se coupent en quatre points, deux réels et deux imaginaires, qui sont précisément les foyers de la conique donnée (3).

Si la conique donnée (3) est une parabole l'expression $AC - B^2$ sera nulle, et les équations aux foyers se réduiront aux deux suivantes

$$\begin{aligned} (AE - BD)\alpha + (CD - BE)\beta + DE - BF &= 0, \\ 2(CD - BE)\alpha - 2(AE - BD)\beta + (D^2 - AF) - (E^2 - CF) &= 0, \end{aligned}$$

qui sont du premier degré. Celles-ci déterminent le foyer de la parabole (3).

Puisque $B^2 - AC = 0$, on a $B = \pm\sqrt{AC}$. Supposons que B

soit positif. Si nous remplaçons B par \sqrt{AC} , les deux équations précédentes se réduiront à

$$\alpha\sqrt{A} - \beta\sqrt{C} = \frac{DE - F\sqrt{AC}}{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}},$$

$$\alpha\sqrt{C} + \beta\sqrt{A} = -\frac{(D^2 - AF) - (E^2 - CF)}{2(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})},$$

qui représentent deux droites rectangulaires, dont l'intersection sera précisément le foyer de notre parabole (3).

4. Multiplions les équations (III) et (IV) respectivement par $A - C$ et B , et retranchons le premier produit du second; nous aurons éliminé $f(\alpha, \beta)$, et l'équation résultante sera

$$(VII) \quad Bf_{\alpha}{}'^2 - (A - C)f_{\alpha}'f_{\beta}' - Bf_{\beta}' = 0.$$

Si, dans cette équation, nous regardons α et β comme les coordonnées courantes, elle représentera une conique qui passe par les foyers de la courbe du second degré (3).

Mais cette équation (VII) est précisément l'équation aux axes de la conique (3). Donc

Les foyers d'une courbe du second degré sont situés sur les axes de la courbe.

5. Détermination de l'équation aux axes des courbes du second degré, rapportées à des coordonnées rectangulaires. Il est facile de faire voir que l'équation

$$(VIII) \quad Bf_x{}'^2 - (A - C)f_x'f_y' - Bf_y' = 0$$

fournit les deux axes de la conique (3).

Soient en effet m et m' les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués de la conique (3). Le diamètre conjugué à la direction m étant

$$(10) \quad f_x' + mf_y' = 0,$$

ou

$$Ax + By + D + m(Bx + Cy + E) = 0,$$

il vient

$$m' = -\frac{A + mB}{B + mC}.$$

On a donc, entre m et m' , la relation

$$(11) \quad A + B(m + m') + Cmm' = 0.$$

Si nos deux diamètres conjugués sont les axes de la courbe (3), on aura $mm' = -1$, ou $m' = -\frac{1}{m}$, ce qui transforme la relation précédente dans l'équation du second degré en m ,

$$(12) \quad Bm^2 + (A - C)m - B = 0.$$

Résolvant cette équation et substituant dans (10) les valeurs obtenues pour m , on obtiendra les équations des deux axes de notre conique (3).

Si l'on avait éliminé directement m entre (10) et (12), on aurait obtenu l'équation du second degré, qui donne les deux axes de la conique. Cette équation est précisément l'équation (VIII).

Pour résoudre l'équation (VIII), on posera

$$f_x' = z f_y'$$

elle devient

$$Bz^2 - (A - C)z - B = 0,$$

et donne

$$z = \frac{A - C \pm \sqrt{4B^2 - (A - C)^2}}{2B},$$

ou

$$(IX) \quad \frac{Ax + By + D}{Bx + Cy + E} = \frac{A - C \pm \sqrt{4B^2 - (A - C)^2}}{2B}.$$

On a ainsi deux équations du premier degré en x et y . En accouplant chacune de ces deux équations avec l'une ou l'autre des équations du second degré (III) et (IV), on déterminera aisément les foyers de la conique (3).

6. Détermination de l'équation aux axes des courbes du second degré, rapportées à des coordonnées obliques. Si les axes de coordonnées comprennent entre eux un angle θ , les coefficients angulaires m et m' des deux axes de la conique (8) satisfont à la fois aux deux relations

$$(13) \quad A + B(m + m') + Cmm' = 0,$$

$$(14) \quad 1 + \cos \theta (m + m') + mm' = 0,$$

dont la première exprime que les deux axes de la courbe sont des diamètres conjugués, et la seconde que ces deux diamètres sont rectangulaires.

Si le second de nos axes est représenté par l'équation

$$(15) \quad f_x' + m' f_y' = 0,$$

nous pourrons éliminer d'abord m' entre les équations (13), (14) et (15), ce qui nous fournit les deux équations

$$\begin{aligned} m(Cf_x' - Bf_y') &= Af_x' - Bf_y', \\ m(f_x' - \cos \theta f_y') &= f_y' - \cos \theta f_x', \end{aligned}$$

qu'il suffit de diviser membre à membre pour avoir l'équation aux axes

$$\frac{Af_x' - Bf_y'}{f_y' - \cos \theta f_x'} = \frac{Cf_x' - Bf_y'}{f_x' - \cos \theta f_y'},$$

ou

$$(X) \quad (B - C \cos \theta) f_x'^2 - (A - C) f_x' f_y' - (B - A \cos \theta) f_y'^2 = 0.$$

XIX.

Bewegung eines am Faden hangenden Stabes.

Von

R. Hoppe.

Ein Faden, d. i. eine gewichtlose, undeformable Gerade, sei im einen Eckpunkt fest und trage am andern einen Stab, d. i. eine starre Gerade mit beliebig verteilter Masse. Der Befestigungspunkt am Stabe sei beliebig, nur soll er nicht dessen Schwerpunkt sein. Auf den Stab wirke allein die Schwere. Im Folgenden sollen einige Fragen in Betreff seiner Bewegung untersucht werden.

§. 1. Allgemeine Differentialgleichungen der Bewegung.

Der feste Endpunkt O des Fadens $OE = a$ sei Anfang der rechtwinkligen xyz , die x vertical nach unten gerichtet, das andre Ende E Anfang der Abscissen u längs dem Stabe, positiv nach dem Schwerpunkt F hin. Ist ∂m ein Element der Masse m im Punkte u , so möge sein

$$\int u \partial m = hm; \quad \int u^2 \partial m = bcm$$

die Integrale über den ganzen Stab ausgedehnt.

Für die Folge wird die Bemerkung notwendig sein, dass stets

$$c > b$$

ist. Dies erhellt leicht, wenn man die Massenelemente m_1, m_2, m_3, \dots in unendlich nahen Punkten u_1, u_2, u_3, \dots concentrirt denkt. Dann ist

$$bm = b \sum m_k = \sum u_k m_k$$

$$bcm = bc \sum m_k = \sum u_k^2 m_k$$

daher

$$\begin{aligned} b(c-b)m^2 &= \sum m_k \sum u_k^2 m_k - (\sum u_k m_k)^2 \\ &= \sum u_k^2 m_k^2 + \sum \sum (u_k^2 + u_h^2) m_k m_h \\ &\quad - (\sum u_k^2 m_k^2 + \sum \sum 2u_k u_h m_k m_h) \\ &= \sum \sum (u_k - u_h)^2 m_k m_h > 0. \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Sind $x_1 y_1 z_1$ die Richtungscosinus des Fadens, $x_2 y_2 z_2$ die des Stabes, so sind die Coordinaten des Stabelements

$$\begin{aligned} x &= ax_1 + ux_2 \\ y &= ay_1 + uy_2 \\ z &= az_1 + uz_2 \end{aligned}$$

Von den Bewegungsgleichungen sind zwei Integrale bekannt, die Gleichung der constanten Flächengeschwindigkeitsprojection

$$\int (yz' - zy') \partial m = Hm$$

und die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\int (x'^2 + y'^2 + z'^2) \partial m - 2g \int x \partial m = 2Km \quad (1)$$

wo der Accent die Differentiation nach der Zeit ausdrückt.

Aus der letztern lassen sich leicht die 4 unabhängigen Differentialgleichungen 2. Ordnung durch partielle Differentiation ableiten, die aus den 6 Bewegungsgleichungen eines starren Systems auszusondern eine sehr umständliche Rechnung erfordern würde.

Setzt man

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \varphi & x_2 &= \cos \lambda \\ y_1 &= \sin \varphi \cos \psi & y_2 &= \sin \lambda \cos \mu \\ z_1 &= \sin \varphi \sin \psi & z_2 &= \sin \lambda \sin \mu \end{aligned}$$

so sind $\varphi, \psi, \lambda, \mu$ die 4 unabhängig variirenden topischen Grössen, so dass, wenn man das Differential der Gl. (1) in der Form

$$\partial K = \Phi \partial \varphi + \Psi \partial \psi + \Lambda \partial \lambda + M \partial \mu$$

darstellt, und zwar nach Anleitung des Alembert'schen Princip

$$\frac{\partial x'^2}{\partial \varphi} = 2x'' \frac{\partial x}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial x'^2}{\partial \psi} = 2x'' \frac{\partial x}{\partial \psi} \text{ etc.}$$

setzt,

$$\Phi = 0; \quad \Psi = 0; \quad \Lambda = 0; \quad M = 0$$

die 4 unabhängigen Gleichungen sind, die $\varphi, \psi, \lambda, \mu$ bestimmen. Man findet, wenn zur Abkürzung $\psi - \mu = \delta$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}\Phi = & \alpha \{ a(\varphi'' - \psi'^2 \sin \varphi \cos \varphi) + b(\sin \varphi \sin \lambda + \cos \varphi \cos \lambda \cos \delta) \lambda'' \\ & + b(\sin \varphi \cos \lambda - \cos \varphi \sin \lambda \cos \delta) \lambda'^2 - b a'^2 \cos \varphi \sin \lambda \cos \delta \\ & + b \cos \varphi \sin \delta (2 \lambda' \mu' \cos \lambda + \mu'' \sin \lambda) + g \sin \varphi \} \quad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi = & \alpha \{ a(2 \varphi' \psi' \cos \varphi + \psi'' \sin \varphi) - b[\lambda'' \cos \lambda - (\lambda'^2 + \mu'^2) \sin \lambda] \sin \delta \\ & + b \cos \delta (2 \lambda' \mu' \cos \lambda + \mu'' \sin \lambda) \} \sin \varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = & b \{ a(\sin \varphi \sin \lambda + \cos \varphi \cos \lambda \cos \delta) \varphi'' \\ & + a(\cos \varphi \sin \lambda - \sin \varphi \cos \lambda \cos \delta) \varphi'^2 - a \psi'^2 \sin \varphi \cos \lambda \cos \delta \\ & - a \cos \lambda \sin \delta (2 \varphi' \psi' \cos \varphi + \psi'' \sin \varphi) + c(\lambda'' - \mu'^2 \sin \lambda \cos \lambda) + g \sin \lambda \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M = & b \{ a \sin \delta [\varphi'' \cos \varphi - (\varphi'^2 + \psi'^2) \sin \varphi] + a \cos \delta (2 \varphi' \psi' \cos \varphi + \psi'' \sin \varphi) \\ & + c(2 \lambda' \mu' \cos \lambda + \mu'' \sin \lambda) \} \sin \lambda\end{aligned}$$

so wie die 2 Integrale

$$\begin{aligned}H = & ab \sin \delta (\varphi' \cos \varphi \sin \lambda - \lambda' \sin \varphi \cos \lambda) \\ & + a \sin \varphi (a \sin \varphi + b \sin \lambda \cos \delta) \psi' + b \sin \lambda (c \sin \lambda + a \sin \varphi \cos \delta) \mu' \quad (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2K = & a^2(\varphi'^2 + \psi'^2 \sin^2 \varphi) + 2ab \{ (\sin \varphi \sin \lambda + \cos \varphi \cos \lambda \cos \delta) \varphi' \lambda' \\ & + \sin \delta (\varphi' \mu' \cos \varphi \sin \lambda - \lambda' \psi' \sin \cos \lambda) \\ & + \psi' \mu' \sin \varphi \sin \lambda \cos \delta \} + bc(\lambda'^2 + \mu'^2 \sin^2 \lambda) - 2g(a \cos \varphi + b \cos \lambda) \quad (4)\end{aligned}$$

§. 2. Permanente Rotation.

Man könnte zunächst fragen, ob und unter welchen Bedingungen der Stab (oder seine Verlängerung) beständig durch die Verticale gehen kann, so dass die Ebene zwischen Faden und Stab vertical bleibt. In diesem Falle müsste $\sin \delta = 0$ sein. Dies gäbe:

$$\Psi = \alpha \{ a(2 \varphi' \mu' \cos \varphi + \mu'' \sin \varphi) \pm b(2 \lambda' \mu' \cos \lambda + \mu'' \sin \lambda) \} \sin \varphi = 0$$

$$M = b \{ c(2 \lambda' \mu' \cos \lambda + \mu'' \sin \lambda) \pm a(2 \varphi' \mu' \cos \varphi + \mu'' \sin \varphi) \} \sin \lambda = 0$$

oder, da c nicht $= b$ sein kann:

$$2 \varphi' \mu' \cos \varphi + \mu'' \sin \varphi = 0$$

$$2 \lambda' \mu' \cos \lambda + \mu'' \sin \lambda = 0$$

und nach Integration entweder

$$\mu' = \frac{\alpha}{\sin^2 \varphi} = \frac{\beta}{\sin^2 \lambda}$$

oder

$$\varphi = \text{const.}; \quad \lambda = \text{const.}; \quad \mu' = \text{const.} \quad (*)$$

Die erstere Lösung reducirt die topischen Variablen auf eine, in Bezug auf welche dann die Gleichungen $\Phi = 0$ und $\mathcal{A} = 0$ identisch werden müssen. Das Integral $H = \text{const.}$ zeigt sich als bedingungslos

erfüllt, kann aber keine der 2 Gleichungen ersetzen. Die Untersuchung erfordert eine langwierige Rechnung; da diese bloss ergibt, dass die Gleichungen nur für $a = b = c$ identisch werden würden, dass folglich die in Rede stehende Bewegung unmöglich ist, so lasse ich die Frage fallen und wende mich zur Lösung (*). Für diese braucht jedoch nicht $\sin \delta = 0$ vorausgesetzt zu werden; ich stelle vielmehr hier die Frage so auf:

Unter welchen Bedingungen findet eine permanente Rotation um die Verticale statt?

Die permanente Rotation erfordert, dass φ , λ und δ constant sind. Unter dieser Voraussetzung wird

$$\begin{aligned}\Psi &= a\{(a \sin \varphi + b \sin \lambda \cos \delta)\mu'' + b\mu'^2 \sin \lambda \sin \delta\} \sin \varphi = 0 \\ M &= b\{(c \sin \lambda + a \sin \varphi \cos \delta)\mu'' - a\mu'^2 \sin \varphi \sin \delta\} \sin \lambda = 0 \\ \Psi + M &= \{(a \sin \varphi + b \sin \lambda \cos \delta)^2 + b \sin^2 \lambda (c - b \cos^2 \delta)\} \mu'' = 0\end{aligned}$$

Da der Coefficient von μ'' stets > 0 ist, so folgt $\mu'' = 0$, und die Gleichungen geben übereinstimmend:

$$ab\mu'^2 \sin \varphi \sin \lambda \sin \delta = 0$$

Wenn also, wie wir annehmen, μ' , φ , λ nicht null sind, so muss $\sin \delta = 0$ sein.

Eine permanente Rotation kann also nur in einer Rotation der beständig verticalen Ebene zwischen Faden und Stab mit constanter Geschwindigkeit bestehen.

Die Gleichung $\sin \delta = 0$ lässt die 2 Fälle zu, wo $\delta = 0$ und wo $\delta = 2R$ ist. Ihnen entsprechend werden die 2 allein noch zu erfüllenden Gleichungen $\Phi = 0$ und $\mathcal{A} = 0$:

$$\left. \begin{aligned} a \sin \varphi \pm b \sin \lambda &= \frac{g}{\mu'^2} \operatorname{tg} \varphi \\ c \sin \lambda \pm a \sin \varphi &= \frac{g}{\mu'^2} \operatorname{tg} \lambda \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

woraus:

$$\frac{c \sin \lambda \pm a \sin \varphi}{a \sin \varphi \pm b \sin \lambda} = \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \varphi} = p \quad (6)$$

Die Grössen φ , λ , μ' sind demnach durch eine jede von ihnen bestimmt, doch erfordert die explicite Darstellung die Auflösung einer Gleichung 6. Grades. Diese vermeiden wir, indem wir alle drei in p ausdrücken, wodurch allerdings eine Untersuchung des von p zu durchlaufenden Intervalls nötig wird.

Die Bedingung $c > b$ sei erfüllt durch

$$c = b(1 + h^2) \quad (7)$$

Ausserdem sei durch

$$a = \frac{b}{k} (hk + 1)(h - k) \quad (8)$$

a ohne Beschränkung seiner Werte auf k zurückgeführt; es braucht dann k nur von 0 bis h variiren. Zur Abkürzung sei

$$q = k \frac{h^2 + 1 \mp p}{(hk + 1)(h - k)(p \mp 1)} \quad (9)$$

dann wird nach (6)

$$\sin \varphi = q \sin \lambda$$

woraus:

$$\sin^2 \varphi = \frac{q^2 \operatorname{tg}^2 \lambda}{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda} = \frac{p^2 q^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + p^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{p^2 q^2 \sin^2 \varphi}{1 + (p^2 - 1) \sin^2 \varphi}$$

also

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \frac{p^2 q^2 - 1}{p^2 - 1}; & \cos^2 \varphi &= p^2 \frac{1 - q^2}{p^2 - 1} \\ \sin^2 \lambda &= \frac{p^2 q^2 - 1}{q^2 (p^2 - 1)}; & \cos^2 \lambda &= \frac{1 - q^2}{q^2 (p^2 - 1)} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Nach (5) ist

$$\frac{g}{\mu' z} = a \cos \varphi \pm b \cos \lambda \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \varphi} = a \cos \varphi \pm bp \cos \lambda \quad (11)$$

Jetzt sind die 2 oben bezeichneten Fälle zu trennen.

I. $\delta = 0$.

Hier divergirt EF gegen die x Axe. Das obere Zeichen ist gültig. Variirt p von 0 bis ∞ , so wechselt q zweimal sein Vorzeichen, erst bei $p = 1$, dann bei $p = 1 + h^2$, im mittleren Intervall ist es positiv. Da letzteres bereits alle Werte von φ , λ , μ' umfasst, so können wir festsetzen, dass

$$1 < p < 1 + h^2; \quad q > 0$$

sei. Dann werden $\sin \varphi$, $\sin \lambda$, $\cos \varphi$, $\cos \lambda$ reell sein, wenn $qp > 1$, $q < 1$, also

$$\frac{1}{p} < q < 1$$

ist, und zwar variiren gleichzeitig φ und λ von 0 bis R , wenn q von $\frac{1}{p}$ bis 1 variirt. Da

$$q = \frac{k}{(hk+1)(h-k)} \left(\frac{h^2}{p-1} - 1 \right)$$

$$pq = \frac{k}{(hk+1)(h-k)} \left(\frac{h^2}{p-1} + h^2 - p \right)$$

ist, so erhellt, dass q und pq beständig abnehmen, wenn p wächst; gleichzeitig muss dann auch $\sin^2 \varphi$ beständig abnehmen; daher entspricht jedem φ nur ein p , und es genügt, die äussersten Werte von p , bestimmt durch

$$pq = 1 \quad (\varphi = 0), \quad q = 1 \quad (\varphi = R)$$

zu entwickeln. Diese Gleichungen lauten nach (9) (oberes Zeichen):

$$kp(h^2+1-p) = (hk+1)(h-k)(p-1) \quad (\text{grösstes } p)$$

$$k(h^2+1-p) = (hk+1)(h-k)(p-1)$$

oder

$$\left(hk - k + h \frac{1-k^2}{2} \right)^2 = \left(h \frac{1+k^2}{2} \right)^2$$

$$(hk+1-k^2)p = hk+1$$

Die erste hat nur eine positive Wurzel:

$$p = hk+1 \quad \text{für } \varphi = 0 \quad (12)$$

die andere giebt:

$$p = \frac{hk+1}{hk+1-k^2} \quad \text{für } \varphi = R \quad (13)$$

Dem entsprechen die Werte:

$$q = \frac{1}{hk+1} \quad \text{für } \varphi = 0 \quad (14)$$

$$q = \frac{h^2k+h+k}{k(hk+1)} = \frac{h}{k} + \frac{1}{hk+1} \quad \text{für } \varphi = R \quad (15)$$

ferner nach (11) (oberes Zeichen):

$$\frac{g}{\mu'^2} = a + bp = \frac{b}{k}(hk+1)(h-k) + b(hk+1)$$

$$= bh \frac{hk+1}{k} \quad \text{für } \varphi = 0$$

$$\frac{g}{\mu'^2} = 0 \quad \text{für } \varphi = R$$

oder

$$\mu' = \sqrt{\frac{g}{bh} \frac{k}{hk+1}} \quad (\varphi = 0); \quad \mu' = \infty \quad (\varphi = R) \quad (16)$$

II. $\delta = 2R$.

Hier convergirt EF gegen die x Axe und schneidet sie. Das untere Zeichen gilt, daher ist q von selbst beständig positiv. Es ist

$$q = \frac{k}{(hk+1)(h-k)} \left(\frac{h^2}{p+1} + 1 \right)$$

$$pq = \frac{k}{(hk+1)(h-k)} \left(h^2 - \frac{h^2}{p+1} + p \right)$$

also nimmt q ab, und wächst pq bei wachsendem p , und in den Ausdrücken (10) wachsen Zähler und Nenner gleichzeitig, so dass nicht zu ersehen, ob die \sin oder die \cos wachsen, mithin die Entwicklung der Endwerte nicht ausreichend ist.

Die Bedingungen $pq > 1$, $q < 1$ geben:

$$kp(h^2+1+p) > (hk+1)(h-k)(p+1)$$

$$k(h^2+1+p) < (hk+1)(h-k)(p+1)$$

oder

$$\left(kp + k - h \frac{1-k^2}{2} \right)^2 > \left(h \frac{1+k^2}{2} \right)^2$$

$$\{(hk+1)(h-k) - k\}(p+1) > h^2k$$

Die erste Bedingung lässt die 2 Fälle zu:

$$-k(p+1) > hk^2 \quad \text{und} \quad k(p+1) > h$$

da ersterer unmöglich ist, so folgt ausschliesslich:

$$p > \frac{h-k}{k} \quad (17)$$

Die zweite Bedingung verlangt, dass der Coefficient von $p+1$ positiv, dass also $a > b$ sei. Dies vorausgesetzt muss ferner

$$p > \frac{h^2k}{(hk+1)(h-k) - k} - 1 \quad (18)$$

sein.

Von diesen 2 untern Grenzen der p , welche den Werten $\varphi = 0$ und $\varphi = R$ entsprechen, kann nur die grössere annähernd erreicht werden, während die kleinere durch ein endliches Intervall abgesperrt ist. Von der grösseren an variirt p bis ∞ , und hiermit gleichzeitig λ bzw. von 0 oder R bis R , während φ bzw. von 0 oder R bis zu einem Werte φ_0 , bestimmt durch

$$\sin \varphi_0 = q = \frac{k}{(hk+1)(h-k)}$$

variirt.

Vergleicht man die untern Grenzen (17) (18), so ergibt sich:

$$\frac{h-k}{k} - \left(\frac{h^2 k}{(hk+1)(h-k)-k} - 1 \right) = \frac{h(hk+1)(h-2k)}{k\{(hk+1)(h-k)-k\}}$$

Hiernach wird p durch (17) oder (18) begrenzt, jenachdem $k <$ oder $> \frac{1}{2}h$ ist. Diese 2 Fälle sind zu trennen.

$$1) \quad k < \frac{1}{2}h.$$

Die Bedingung $a > b$, das ist

$$(hk+1)(h-k)-k = (hk+1)(h-2k) + hk^2 > 0$$

ist ohne Weiteres erfüllt; φ variiert von 0 bis φ_0 , λ von 0 bis R. Der Wert φ_0 wird jedoch schon erreicht und überschritten, ehe $p = \infty$ wird.

Stellt man nämlich den Ausdruck (10) in der Form

$$\sin^2 \varphi = \left\{ \frac{k}{(hk+1)(h-k)} \right\}^2 (1+P) = \sin^2 \varphi_0 (1+P)$$

dar, so ist die Grösse

$$P = \frac{\frac{2h^2 p^2}{p+1} \left(2 + \frac{h^2}{p+1} \right) - \frac{a^2}{b^2} + 1}{p^2 - 1} \quad (19)$$

für $\varphi=0$, das ist für das kleinste p , $=-1$, dagegen wird für $p=\infty$ der Zähler $=\infty$; folglich muss, für irgend ein $p=p_1$, P verschwinden und für hinreichend grosse p positiv werden. Es folgt dann, dass

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 \quad \text{für } p = p_1 \quad \text{und für } p = \infty$$

und

$$\sin \varphi > \sin \varphi_0 \quad \text{für } p > \text{irgend ein } p_a \stackrel{=}{=} p_1$$

hieraus wieder, dass $\sin \varphi$ für irgend einen Wert $p=p_2 > p_0$ ein Maximum hat.

Die Gleichungen, welche p_1 , p_0 , p_2 bestimmen, sind vom 3. Grade; nämlich jede Wurzel der Gleichung

$$h^2 p^3 (2p+2+h^2) - \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) (p+1)^2 = 0 \quad (20)$$

innerhalb der Grenzen der p ist ein Wert von p_1 , die grösste unter ihnen ist $= p_0$. Ferner ergibt die Differentiation von (10):

$$\partial \sin^2 \varphi = \frac{b^2}{a^2} \frac{2p \partial p \cdot Q}{(p^2-1)^2 (p+1)^2}$$

wo

$$Q = \frac{a^2}{b^2} (p+1)^2 - (p+1+h^2) [p+1+h^2(p^2-p+1)] \quad (21)$$

gesetzt ist. An der untern Grenze $p = \frac{h}{k} - 1$ wird, wie auch selbstverständlich, da $\sin^2 \varphi$ von 0 an nicht abnehmen kann,

$$Q = h^2(hk+1)(h-2k) \frac{1+k^2}{h^4} > 0$$

für $p = \infty$ hingegen < 0 .

Hat nun die Gleichung $Q = 0$ nur 1 reelle Wurzel, so ist diese $= p_2$, sie ist $> p_0 = p_1$, und bestimmt den absolut grössten Wert von φ . Das gleiche findet statt, wenn von 3 reellen Wurzeln nur eine $> \frac{h}{k} - 1$ ist.

Ausser diesem Falle bleibt nur möglich, dass 3 reelle Wurzeln $> \frac{h}{k} - 1$ existiren. Dann hat φ zwei Maxima φ_2, φ_3 und ein Minimum φ_4 , entsprechend p_2, p_3 und p_4 , so dass

$$\frac{h}{k} - 1 < p_3 < p_4 < p_2; \quad \varphi_2 > \varphi_0; \quad \varphi_2 > \varphi_4; \quad \varphi_3 > \varphi_4$$

ist. Es entstehen nun folgende Fragen.

1) Ist $\varphi_4 >$ oder $< \varphi_0$?

Für $\varphi_4 > \varphi_0$ würde $p_0 = p_1 < p_3$ sein, die Gl. (20) würde 2 imaginäre Wurzeln haben, angezeigt durch das Minimum φ_4 . Die Frage wird daher am leichtesten aus Gl. (20) entschieden.

2) Ist $\varphi_3 >$ oder $< \varphi_2$? Oder, welchen absolut grössten Wert erreicht φ ?

Wenn $\varphi_4 < \varphi_0$, so hat die Gl. (20) 3 reelle Wurzeln, p_1, p_1', p_0 , so dass

$$\frac{h}{k} - 1 < p_1 < p_3 < p_1' < p_4 < p_0 < p_2$$

wird.

Die obigen 2 Fragen entscheiden sich verschieden für verschiedene h, k . Die Grenzen werden durch hohe Gleichungen bestimmt, die die allgemeine Untersuchung schwierig machen. Es mag daher der Gegenstand der Specialrechnung für numerisch gegebene h, k überlassen bleiben.

Um noch μ' zu bestimmen, so hat man:

$$\cos \lambda = \frac{\cos \varphi}{pq}$$

daher nach Gl. (11)

$$\frac{g}{\mu'^2} = \left(a - \frac{b}{q}\right) \cos \varphi = a \left(1 - \frac{p+1}{p+1+h^2}\right) \cos \varphi = \frac{ah^2 \cos \varphi}{p+1+h^2}$$

$$\mu' = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{g}{a} \frac{p+1+h^2}{\cos \varphi}} \quad (22)$$

das ist für $\varphi = 0$:

$$\mu' = \sqrt{\frac{g}{a} \frac{hk+1}{hk}} = \sqrt{\frac{g}{bh(h-k)}} \quad (23)$$

Von da an wächst μ' beständig mit p , soweit φ kein Maximum überschreitet, und kann auch darüber hinaus nie seinen Anfangswert wieder erreichen. Daher ist dieser der absolut kleinste, bei dem eine permanente Bewegung möglich ist.

$$2) \quad \frac{1}{2}h < k < h.$$

Die Bedingung $a > b$ beschränkt die obere Grenze noch weiter; denn nach ihr ist

$$(hk+1)(h-k)-k > 0 \quad \text{oder} \\ (2hk+2-h^2)^2 < 4+h^4 \quad \text{daher} \\ k < \frac{1}{2h} (\sqrt{4+h^4} - 2 + h^2)$$

Diese obere Grenze ist $< h$; denn $\sqrt{4+h^4}$ ist $< 2+h^2$; daher werden die Grenzen:

$$\frac{1}{2}h < k < \frac{1}{2h} (\sqrt{4+h^4} - 2 + h^2)$$

Jetzt hat man:

$$p > \frac{h^2k}{(hk+1)(h-k)-k} - 1 = \frac{h(k^2-1)+2k}{h^2k-h(k^2-1)-2k} = p_5$$

Während p von hier an bis ∞ wächst, variirt φ von R bis φ_0 , und λ von R bis R .

Im Anfang kann φ nur abnehmen; da für hinreichend grosse endliche p die Grösse P (s. Gl. (19)) positiv, also $\varphi > \varphi_0$ ist, so kann φ auch am Ende seines Intervalls nur abnehmen, folglich kann es nur entweder beständig abnehmen oder erst ein Minimum, dann ein Maximum haben. Das Minimum ist dann > 0 , das Maximum $< R$; ersteres, weil der einzige Wert von p , für welchen $pq = 1$

wird, $< p_5$ ist; letzteres, weil die Gleichung $q = 1$ linear in p ist, daher allein durch $p = p_5$ erfüllt wird.

Demnach ist nur zu untersuchen, ob φ ein Minimum hat, und ob dasselbe $>$ oder $< \varphi_0$ ist. Nur im letzten Falle würde φ_0 nicht der kleinste Wert von φ sein.

Da λ anfänglich abnimmt, zuletzt wächst, so kann es nur entweder 1 Minimum oder 2 Minima und 1 Maximum haben.

Für μ' gilt noch der Ausdruck (22); es ist anfänglich und zuletzt $= \infty$, ist also in Betreff der Maxima in gleichem Falle mit λ .

$$3) \quad k = \frac{1}{2}h.$$

In diesem Grenzfalle wird

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{2}h^2; \quad q = 1 - \frac{h^2}{2+h^2} \frac{p-1}{p+1} \quad (24)$$

daher

$$pq = 1 + \left(1 + \frac{2p}{2+h^2}\right) \frac{p-1}{p+1} \quad (25)$$

daher

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \frac{pq+1}{(p+1)^2} \left(1 + \frac{2p}{2+h^2}\right); & \cos^2 \varphi &= \frac{h^2 p^2}{2+h^2} \frac{1+q}{(p+1)^2} \\ \sin^2 \lambda &= \frac{pq+1}{(p+1)^2 q^2} \left(1 + \frac{2p}{2+h^2}\right); & \cos^2 \lambda &= \frac{h^2}{2+h^2} \frac{1+q}{(p+1)^2 q^2} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Dies differentiirt giebt:

$$\partial \sin^2 \varphi = - \frac{2h^2 p (4p+4+3h^2)}{(2+h^2)^2 (p+1)^4} \partial p$$

$$\partial \sin^2 \lambda = \frac{h^2 (4+h^2) (p+1)^2 + 3h^2 (p+1) + h^4}{(p+1)^2 (p+1+h^2)^3} \partial p$$

Demnach nimmt beständig φ ab, und wächst λ bei wachsendem p . Die Anfangswerte sind

$$p = 1; \quad q = 1; \quad \sin^2 \varphi = \sin^2 \lambda = \frac{4+h^2}{2+h^2} \quad (27)$$

die Endwerte

$$p = \infty; \quad q = \frac{2}{2+h^2}; \quad \sin^2 \varphi = \left(\frac{2}{2+h^2}\right)^2; \quad \sin^2 \lambda = 1 \quad (28)$$

Für $p = 1$ wird nach (22)

$$\mu' = \sqrt{\frac{g}{b} \frac{2h(2+h^2)^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}}} \quad (29)$$

für $p = \infty$ wird $\mu' = \infty$.

Differentiirt man Gl. (22), so kommt:

$$\partial\mu' = \frac{h\sqrt{g \cdot pS}}{2(2+h^2)\sqrt{a(p+1)^4 \cos^2 \varphi} \sqrt{(p+1+h^2)\cos \varphi}}$$

wo

$$S = (4+h^2)(p-1)^2 + (16+7h^2)[(p-1)^2 + p-1] - h^2(7+3h^2) \quad (30)$$

Hieraus ersieht man, dass μ' im Anfang bis zu einem Minimum abnimmt, dann beständig wächst.

§. 3. Stabilität der verticalen Lage.

Seien φ , λ unendlich klein, φ' , λ' , δ' anfänglich null, seien also Faden und Stab unendlich wenig aus der verticalen Lage gerückt, ohne einen andern Anstoss als den einer Rotation; dann werden die 4 Bewegungsgleichungen nach Weglassung aller unendlich kleinen Terme höherer Ordnung:

$$\frac{\Phi}{a} = 0 = a(\varphi'' - \varphi\psi'^2) + b(\lambda'' - \lambda\mu'^2) \cos \delta + b\lambda\mu'' \sin \delta + g\varphi$$

$$\frac{\Psi}{a\varphi} = 0 = -b(\lambda'' - \lambda\mu'^2) \sin \delta + a\varphi\psi'' + b\lambda\mu'' \cos \delta$$

$$\frac{A}{b} = 0 = a(\varphi'' - \varphi\psi'^2) \cos \delta + b(1+h^2)(\lambda'' - \lambda\mu'^2) - a\varphi\psi'' \sin \delta + g\lambda$$

$$\frac{M}{b\lambda} = 0 = a(\varphi'' - \varphi\psi'^2) \sin \delta + a\varphi\psi'' \cos \delta + b(1+h^2)\lambda\mu''$$

woraus:

$$\left. \begin{aligned} \varphi'' &= \varphi \left(\psi'^2 - \frac{g}{a} \frac{1+h^2}{h^2} \right) + \lambda \frac{g \cos \delta}{ah^2} \\ \lambda'' &= \lambda \left(\mu'^2 - \frac{g}{bh^2} \right) + \varphi \frac{g \cos \delta}{bh^2} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\varphi\psi'' = -\lambda \frac{g \sin \delta}{ah^2}; \quad \lambda\mu'' = \varphi \frac{g \sin \delta}{bh^2} \quad (32)$$

Sind φ' , λ' nicht absolut null, sondern unendlich klein, so treten nur $\varphi\psi'' + 2\varphi'\psi'$, $\lambda\mu'' + 2\lambda'\mu'$ an die Stelle der linken Seiten der 2 letzten Gleichungen. Die 2 ersten, welche dabei unverändert bleiben, kann man ebendeshalb solange fortgelten lassen, als φ , λ , φ' , λ' unendliche kleine Grenzen nicht überschreiten. In denselben Gl. (31) sind ferner ψ'^2 , μ'^2 , $\cos \delta$ als Constante zu betrachten, weil ihre Variation den Wert der rechten Seite nur in 2. Ordnung beeinflusst. Aus gleichem Grunde ist die Differenz $\psi' - \mu' = \delta'$ zu vernachlässigen, also $\psi' = \mu'$ zu setzen.

Integriert man die in diesem Sinne irgend eine zeitlang dauernden Gl. (31), so sind die Integrale von der Form:

$$\varphi = \Sigma A e^{\alpha t}; \quad \lambda = \Sigma B e^{\alpha t}$$

Nach Einsetzung ergeben sich zur Bestimmung der α die 2 Gleichungen:

$$A \left(\alpha^2 - \mu'^2 + \frac{g}{a} \frac{1+k^2}{h^2} \right) = B \frac{g \cos \delta}{a h^2}$$

$$B \left(\alpha^2 - \mu'^2 + \frac{g}{b h^2} \right) = A \frac{g \cos \delta}{b h^2}$$

woraus nach Elimination von A, B :

$$\left(\alpha^2 - \mu'^2 + \frac{g}{a} \frac{1+k^2}{h^2} \right) \left(\alpha^2 - \mu'^2 + \frac{g}{b h^2} \right) = \frac{g^2 \cos^2 \delta}{a b h^4}$$

Setzt man

$$\sin \eta = \frac{2k \sin \delta}{h(1+k^2)} \sqrt{\frac{a}{b}}$$

so ergibt die Auflösung:

$$\alpha^2 = \mu'^2 - g \frac{2hk + 1 - k^2 \pm (1+k^2) \cos \eta}{2bh(hk+1)(h-k)}$$

Da

$$\cos^2 \eta = \frac{\{h(1-k^2) - 2k^2\}^2 + 4k(hk+1)(h-k) \cos^2 \delta}{h^2(1+k^2)^2}$$

so ist η stets reell; folglich sind von den 4 Wurzeln α entweder 2 positiv und 2 negativ oder 1 positiv und 1 negativ reell oder keine reell. In den ersten beiden Fällen haben φ und λ Terme, welche beständig wachsen, im letzten sind alle Terme periodisch, so dass φ und λ , wenn sie anfänglich unendlich klein waren, es beständig bleiben. Der letzte Fall ist es also, in welchem die verticale Lage stabil ist.

Demnach lautet für gegebenes δ die Bedingung der Stabilität:

$$\mu'^2 < g \frac{2(h-k)k + (1+k^2)(1 - \cos \eta)}{2bh(hk+1)(h-k)}$$

Da aber δ willkürlich ist, so findet die Stabilität erst statt, wenn die Bedingung für alle η , das ist für $\eta = 0$, entsprechend $\sin \delta = 0$ erfüllt ist, wo sie lautet:

$$\mu'^2 < \frac{gk}{bh(hk+1)}$$

Nach §. 2. war die Bedingung permanenter Rotation um die Verticale für $\varphi > 0$ bei divergirendem Stabe

$$\mu'^2 > \frac{gk}{bh(hk+1)} \quad (33)$$

bei convergirendem Stabe

$$\mu'^2 > \frac{g}{bh(h-k)}; \quad a > b \quad (34)$$

Daher beginnt bei divergirendem Stabe die Möglichkeit permanenter Rotation genau da, wo die Stabilität der verticalen Lage aufhört. Bei convergirendem Stabe hingegen bleibt das Intervall

$$\frac{g}{bh\left(h+\frac{1}{k}\right)} < \mu'^2 < \frac{g}{bh(h-k)}$$

übrig, wo weder die verticale Lage stabil ist, noch eine permanente Rotation stattfinden kann. Es ist also nur denkbar, dass wenn der Stab bei vermehrter Rotation über die Grenze (33) hinaus aus der verticalen Lage in eine convergente übergeht, dies durch Vermittelung einer windschiefen Lage, wo δ nicht null ist, geschieht.

Die Anfangswerte von φ , δ scheinen hiernach dem Zufall überlassen. Dass, wie es, wenigstens für $a > b$, der Erfahrung gemäss ist, der hinreichend schnell rotirende verticale Stab nie in die divergente Lage ausweicht, sondern nach äusserst kurzer Zeit in convergenter Lage, anscheinend permanent, rotirt, wird durch die vorstehende, bloss statische Untersuchung nicht erklärt und lässt sich offenbar auf statischem Wege nicht erklären.

XX.

Die geschlossene Form der periodischen
Kettenbrüche.

Von

Herrn **K. E. Hoffmann**,
Gymnasiallehrer in Zweibrücken.

Im 55ten Teil (Abhandl. XXXIII.) dieser Zeitschrift hat Herr Günther die Darstellung eines zweigliederig periodischen Kettenbruches in geschlossener Form dadurch gegeben, dass er denselben auf einen einfach periodischen reducirte, dessen geschlossene Form bereits bekannt war.

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass sich jeder periodische Kettenbruch auf einen einfach periodischen zurückführen und folglich in geschlossener Form angeben lässt.

Ehe wir an die Lösung dieser Aufgabe gehen, wollen wir noch einige der wichtigsten Eigenschaften der sogenannten Kettenbruchdeterminante angeben. Bezeichnet man die Determinante

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ -1 & z_2 & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & -1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & -1 & z_n \end{vmatrix}$$

mit $D_{1,n}$, wobei also die Indices von D den ersten und letzten Index der Glieder der Diagonalreihe angeben, so ist bekanntlich der Kettenbruch:

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n}}.$$

Durch Entwicklung der Determinante nach Elementen der ersten und letzten Reihe ergeben sich zunächst die Recursionsformeln:

$$1) \quad D_{1,n} = z_1 D_{2,n} + D_{3,n}$$

$$2) \quad D_{1,n} = z_n D_{1,n-1} + D_{1,n-2};$$

ferner durch Zerlegung der Determinante in Producte von partialen Determinanten s ten und $(n-s)$ ten Grades:

$$3) \quad D_{1,n} = D_{1,s} D_{s+1,n} + D_{1,s-1} D_{s+2,n};$$

ferner mittelst wiederholter Anwendung der 1)

$$4) \quad D_{2,n} D_{1,n-1} - D_{2,n-1} D_{1,n} = (-1)^{n-1},$$

das bekannte Gesetz, welchem die Zähler und Nonner der Näherungswerte eines Kettenbruches genügen.

Endlich wollen wir noch angeben, welchen Wert $D_{1,n}$ annimmt, wenn sämtliche Elemente der Diagonalreihe einander gleich ($= z$) werden; wir setzen in diesem Falle die Determinante $= D_n$ und erhalten aus 1)

$$D_n = z D_{n-1} + D_{n-2};$$

setzt man nun $D_n = x^n$, so folgt nach Division mit x^{n-2}

$$x^2 = zx + 1$$

und daraus:

$$x = \frac{z \pm \sqrt{z^2 + 4}}{2};$$

bezeichnet man die beiden Wurzeln der Gleichung mit x_1 und x_2 , wobei die Quadratwurzel in x_1 das positive Zeichen haben soll, so ist die vollständige Lösung:

$$D_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n;$$

Die Constanten c_1 und c_2 bestimmen sich aus den Bedingungen $D_0 = 1$; $D_1 = z$; man findet:

$$c_1 = \frac{x_1}{\sqrt{z^2 + 4}} \quad \text{und} \quad c_2 = -\frac{x_2}{\sqrt{z^2 + 4}},$$

folglich:

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{z^2+4}} \cdot \left[\left(\frac{z+\sqrt{z^2+4}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{z-\sqrt{z^2+4}}{2} \right)^{n+1} \right]. *)$$

Dies vorausgesetzt, gehen wir nun zur Lösung der Aufgabe, einen Kettenbruch von r Perioden $(z_1 z_2 \dots z_n)$ auf einen einfach periodischen zu reduciren.

Man erhält aus 2)

$$\frac{D_{2,n}}{D_{1,n}} = \frac{z_n D_{2,n-1} + D_{2,n-2}}{z_n D_{1,n-1} + D_{1,n-2}};$$

bezeichnet man nun mit Z_r und N_r resp. Zähler und Nenner des Kettenbruches von r Perioden und setzt man in dieser Formel

$z_n + \frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}}$ an die Stelle von z_n , so erhält man links $\frac{Z_r}{N_r}$; folglich:

$$\begin{aligned} \frac{Z_r}{N_r} &= \frac{\left(z_n + \frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}} \right) D_{2,n-1} + D_{2,n-2}}{\left(z_n + \frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}} \right) D_{1,n-1} + D_{1,n-2}} \\ &= \frac{N_{r-1}(z_n D_{2,n-1} + D_{2,n-2}) + Z_{r-1} D_{2,n-1}}{N_{r-1}(z_n D_{1,n-1} + D_{1,n-2}) + Z_{r-1} D_{1,n-1}} \end{aligned}$$

oder nach 2):

$$6) \quad \frac{Z_r}{N_r} = \frac{N_{r-1} D_{2,n} + Z_{r-1} D_{2,n-1}}{N_{r-1} D_{1,n} + Z_{r-1} D_{1,n-1}};$$

Da diese Brüche irreductibel sind, kann man ihre Zähler und ihre Nenner einander gleichsetzen und erhält so:

$$7) \quad Z_r = N_{r-1} D_{2,n} + Z_{r-1} D_{2,n-1} \quad \text{und}$$

$$8) \quad N_r = N_{r-1} D_{1,n} + Z_{r-1} D_{1,n-1};$$

aus 7) und 8) ergeben sich dann unter Berücksichtigung von 4) nach leichter Umformung die Recursionsformeln:

$$9) \quad Z_{r+1} = Z_r(D_{1,n} + D_{2,n-1}) + (-1)^{n-1} Z_{r-1} \quad \text{und}$$

$$10) \quad N_{r+1} = N_r(D_{1,n} + D_{2,n-1}) + (-1)^{n-1} N_{r-1}$$

d. h. für Zähler und Nenner dieselbe Formel; zugleich ersieht man,

*) Es ist dies genau dasselbe Verfahren, durch welches Nachreiner (Beziehungen zwischen Determinanten und Kettenbrüchen, München 1871) die Anzahl der Glieder des Nenners eines regelmässigen Kettenbruches bestimmt hat; setzt man nämlich $z=1$, so erhält man für diese Anzahl

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

dass Z_r und N_r nach demselben Bildungsgesetz wie Zähler und Nenner eines Kettenbruches entstehen; dies ergibt mit Berücksichtigung von $Z_1 = D_{2,n}$ und $N_1 = D_{1,n}$

$$11) \quad \frac{Z_r}{N_r} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{(D_{1,n} + D_{2,n-1})} + \frac{(-1)^{n-1}}{(D_{1,n} + D_{2,n-1})} + \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(D_{1,n} + D_{2,n-1}) \cdot (r-1)}$$

Dieser Kettenbruch ist aber vom zweiten Glied an einfach periodisch und lässt sich daher sofort in geschlossener Form angeben. Bezeichnet man nämlich die Determinante

$$\begin{vmatrix} (D_{1,n} + D_{2,n-1}) & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n-1} & (D_{1,n} + D_{2,n}) & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (-1)^{n-1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & (-1)^{n-1} & (D_{1,n} + D_{2,n-1}) & \dots & \dots \end{vmatrix} (r)$$

mit A_r , so erhält man

$$\frac{Z_r}{N_r} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{A_{r-2}}{A_{r-1}}}$$

oder, indem man in ganz analoger Weise wie oben D_n in 5) auch A_r berechnet:

$$12) \quad \frac{Z_r}{N_r} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{\left(\frac{D_{1,n} + D_{2,n-1} + \sqrt{(D_{1,n} + D_{2,n-1})^2 + (-1)^{n-1} \cdot 4}}{2} \right)^{r-1}}{\left(\frac{D_{1,n} + D_{2,n-1} + \sqrt{(D_{1,n} + D_{2,n-1})^2 + (-1)^{n-1} \cdot 4}}{2} \right)^r} - \frac{\left(\frac{D_{1,n} + D_{2,n-1} - \sqrt{(D_{1,n} + D_{2,n-1})^2 + (-1)^{n-1} \cdot 4}}{2} \right)^{r-1}}{\left(\frac{D_{1,n} + D_{2,n-1} - \sqrt{(D_{1,n} + D_{2,n-1})^2 + (-1)^{n-1} \cdot 4}}{2} \right)^r}}$$

und dies ist der gesuchte Ausdruck.

Die Formeln 7) und 8) lassen sich auch mit Hilfe der 3) ableiten; schreibt man nämlich Zähler und Nenner des periodischen Kettenbruches in Determinantenform, so kann man setzen:

$$13) \quad Z_r = D_{2,nr} \quad \text{und} \quad N_r = D_{1,nr};$$

Zerlegt man nun $D_{2,nr}$ und $D_{1,nr}$ in Producte von partialen Determinanten n ten und $n(r-1)$ ten Grades, so findet man nach 3)

$$\begin{aligned} D_{2,nr} &= D_{2,n} D_{n+1,nr} + D_{2,n-1} D_{n+2,nr} \\ D_{1,nr} &= D_{1,n} D_{n+1,nr} + D_{1,n-1} D_{n+2,nr} \end{aligned}$$

oder, da $z_{n+1} = z_1$, $z_{n+2} = z_2$ etc. folglich $D_{n+1,nr} = D_{1,n(r-1)} = N_{r-1}$ und $D_{n+2,nr} = D_{2,n(r-1)} = Z_{r-1}$ ist,

$$\begin{aligned} Z_r &= D_{2,n} N_{r-1} + D_{2,n-1} Z_{r-1} \quad \text{und} \\ N_r &= D_{1,n} N_{r-1} + D_{1,n-1} Z_{r-1}. \end{aligned}$$

Auch die 12) lässt sich mittels der 3) oder 7) und 8) angeben, indem man recurrend Z_r und N_r durch vorausgehende Z und N ausdrückt. Man findet der Reihe nach:

$$\begin{aligned} N_r &= D_{1,n} N_{r-1} + D_{1,n-1} Z_{r-1} \\ &= D_{1,n} (D_{1,n} N_{r-2} + D_{1,n-1} Z_{r-2}) + D_{1,n-1} (D_{2,n} N_{r-2} + D_{2,n-1} Z_{r-2}) \\ &= (D_{1,n}^2 + D_{1,n-1} D_{2,n}) N_{r-2} + D_{1,n-1} (D_{1,n} + D_{2,n-1}) Z_{r-2} \end{aligned}$$

oder, indem man $D_{1,n-1} D_{2,n}$ aus 4) berechnet und die oben definirte Determinante A_r einführt:

$$N_r = (D_{1,n} A_1 + (-1)^{n-1}) N_{r-2} + D_{1,n-1} A_1 Z_{r-2}$$

und in derselben Weise weiter:

$$N_r = (D_{1,n} A_2 + (-1)^{n-1} A_1) N_{r-3} + D_{1,n-1} A_2 Z_{r-3}$$

und allgemein:

$$N_r = (D_{1,n} A_s + (-1)^{n-1} A_{s-1}) N_{r-s-1} + D_{1,n-1} A_s Z_{r-s-1},$$

wie sich durch eine vollständige Induction leicht nachweisen lässt; schliesslich erhält man (für $s = r-2$) unter Berücksichtigung der Werte $N_1 = D_{1,n}$ und $Z_1 = D_{2,n}$

$$\begin{aligned} N_r &= (D_{1,n} A_{r-2} + (-1)^{n-1} A_{r-3}) D_{1,n} + D_{2,n} D_{1,n-1} A_{r-2} \\ &= (D_{1,n} A_{r-2} + (-1)^{n-1} A_{r-3}) D_{1,n} + D_{2,n-1} D_{1,n} A_{r-2} + (-1)^{n-1} A_{r-3} \end{aligned}$$

$$14) \quad N_r = D_{1,n} A_{r-1} + (-1)^{n-1} A_{r-2}.$$

Genau in derselben Weise entwickelt man:

$$Z_r = D_{2,n} A_s N_{r-s-1} + (D_{2,n-1} A_s + (-1)^{n-1} A_{r-3}) Z_{r-s-1}$$

und für $s = r-2$

$$Z_r = D_{2,n} D_{1,n} A_{r-2} + (D_{2,n-1} A_{r-2} + (-1)^{n-1} A_{r-3}) D_{2,n}$$

$$15) \quad Z_r = D_{2,n} \cdot A_{r-1}.$$

Folglich:

$$\frac{Z_r}{N_r} = \frac{D_{2,n} A_{r-1}}{D_{1,n} A_{r-1} + (-1)^{n-1} A_{r-2}} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{A_{r-2}}{A_{r-1}}},$$

woraus sich dann wie oben die 12) ergibt.

Bezeichnet man nun wieder wie oben die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 = (D_{1,n} + D_{2,n-1})x + (-1)^{n-1}$ resp. mit x_1 und x_2 , so dass

$$\frac{Z_r}{N_r} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x_1^{r-1} - x_2^{r-1}}{x_1^r - x_2^r}}$$

ist, so hat man

$$\frac{x_1^{r-1} - x_2^{r-1}}{x_1^r - x_2^r} = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{r-1}}{1 - \frac{x_2}{x_1}},$$

wobei $\frac{x_2}{x_1}$ ein echter Bruch ist; für $r = \infty$ wird dann $\lim \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^r = 0$;

folglich reducirt sich obiger Bruch auf $\frac{1}{x_1}$, so dass

$$\begin{aligned} \left(\frac{Z_r}{N_r}\right)_{r=\infty} &= \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} + \frac{(-1)^{n-1}}{x_1}} \quad \text{oder, da } x_1 x_2 = -(-1)^{n-1} \text{ ist,} \\ &= \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} - x_2} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} - \frac{(D_{1,n} + D_{2,n-1}) - \sqrt{(D_{1,n} + D_{2,n-1})^2 + (-1)^{n-1} \cdot 4}}{2}} \\ &= \frac{2D_{2,n}}{D_{1,n} - D_{2,n-1} + \sqrt{\dots}}; \end{aligned}$$

oder, indem man den Nenner rational macht und dabei 4) berücksichtigt:

$$\left(\frac{Z_r}{N_r}\right)_{r=\infty} = \frac{-(D_{1,n} - D_{2,n-1}) + \sqrt{(D_{1,n} + D_{2,n-1})^2 + (-1)^{n-1} \cdot 4}}{2D_{1,n-1}}.$$

woraus ersichtlich, dass der unendliche periodische Kettenbruch eine Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$D_{1,n-1}x^2 + (D_{1,n} - D_{2,n-1})x - D_{2,n} = 0$$

darstellt.

Die Formel 12) gestattet noch eine Umformung in dem Falle, dass n eine gerade Zahl ist; da nämlich in diesem Falle $(-1)^{n-1} = -1$ wird, lässt sich der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen als Differenz zweier Quadrate in ein Product zerlegen; beachtet man dann die Identität

$$\frac{D_{1,n} + D_{2,n-1} \pm \sqrt{(D_{1,n} + D_{2,n-1})^2 - 4}}{2} = \left(\frac{\sqrt{D_{1,n} + D_{2,n-1} + 2} \pm \sqrt{D_{1,n} + D_{2,n-1} - 2}}{2} \right)^2,$$

so folgt, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{\sqrt{D_{1,n} + D_{2,n-1} + 2} + \sqrt{D_{1,n} + D_{2,n-1} - 2}}{2} = y_1$$

und

$$\frac{\sqrt{D_{1,n} + D_{2,n-1} + 2} - \sqrt{D_{1,n} + D_{2,n-1} - 2}}{2} = y_2 \text{ setzt,}$$

$$\frac{Z_r}{N_r} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} - \frac{y_1^{2r-2} - y_2^{2r-2}}{y_1^{2r} - y_2^{2r}}}$$

und dies ist die Form, mittelst der man die obenerwähnte Günther'sche Formel für den zweigliederig periodischen Kettenbruch erhält.

XXI.

Sechs Punkte eines Kegelschnittes.

Von

Herrn **August Scholtz**,

Professor in Buda-Pest.

1. Sechs Punkte: 123456, deren homogene Coordinaten $x_i y_i z_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ sind, liegen auf demselben Kegelschnitte, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1 x_1 & z_1 x_1 & x_1 y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2 x_2 & z_2 x_2 & x_2 y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3 x_3 & z_3 x_3 & x_3 y_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4 x_4 & z_4 x_4 & x_4 y_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5 x_5 & z_5 x_5 & x_5 y_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6 x_6 & z_6 x_6 & x_6 y_6 \end{vmatrix} \quad 1)$$

verschwindet. Diese sechs Punkte bilden ein Sechseck, in welchem nach dem Pascal'schen Satze die drei Paare gegenüberliegender Seiten sich in drei Punkten schneiden, welche in gerader Linie liegen. Es ist bekannt, dass man aus den sechs Punkten sechzig verschiedene Sehecke bilden kann und für jedes gilt der genannte Satz. Irgend eines dieser Sehecke möge $iklmnp$ und die drei Paare seiner gegenüberliegenden Seiten ik und mn , lm und pi , np und kl sein. Die homogenen Coordinaten dieser Geraden bezeichnen wir mit $\xi_a \eta_a \zeta_a$; $\xi_{mn} \eta_{mn} \zeta_{mn}$ u. s. w., wobei $\xi_a = y_{ak} - y_{ki}$, $\eta_a = x_{ik} - x_{ki}$, $\zeta_a = x_{iy} - x_{yi}$, u. s. w. Die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten haben die Coordinaten

$$\begin{aligned} \eta_{ik}\xi_{mn} - \eta_{mn}\xi_{ik}, \quad \xi_{ik}\xi_{mn} - \xi_{mn}\xi_{ik}, \quad \xi_{ik}\eta_{mn} - \xi_{mn}\eta_{ik}; \\ \eta_{lm}\xi_{pi} - \eta_{pi}\xi_{lm}, \quad \xi_{lm}\xi_{pi} - \xi_{pi}\xi_{lm}, \quad \xi_{lm}\eta_{pi} - \xi_{pi}\eta_{lm}; \\ \eta_{np}\xi_{ki} - \eta_{ki}\xi_{np}, \quad \xi_{np}\xi_{ki} - \xi_{ki}\xi_{np}, \quad \xi_{np}\eta_{ki} - \xi_{ki}\eta_{np}. \end{aligned}$$

Nach dem Pascal'schen Satze muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} \eta_{ik}\xi_{mn} - \eta_{mn}\xi_{ik} & \xi_{ik}\xi_{mn} - \xi_{mn}\xi_{ik} & \xi_{ik}\eta_{mn} - \xi_{mn}\eta_{ik} \\ \eta_{lm}\xi_{pi} - \eta_{pi}\xi_{lm} & \xi_{lm}\xi_{pi} - \xi_{pi}\xi_{lm} & \xi_{lm}\eta_{pi} - \xi_{pi}\eta_{lm} \\ \eta_{np}\xi_{ki} - \eta_{ki}\xi_{np} & \xi_{np}\xi_{ki} - \xi_{ki}\xi_{np} & \xi_{np}\eta_{ki} - \xi_{ki}\eta_{np} \end{vmatrix} \quad 2)$$

verschwinden.

Weiterhin wissen wir, dass für $iklmnp$ als sechs Punkte desselben Kegelschnittes das Strahlenbüschel il , im , in , ip projectiv ist mit dem Strahlenbüschel kl , km , kn , kp . Bezeichnen wir die Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_l & y_l & z_l \\ x_m & y_m & z_m \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_l & y_l & z_l \\ x_m & y_m & z_m \end{vmatrix}$$

mit (ilm) und (olm) , so können die Strahlen des Büschels in i , bezüglich in k durch die Gleichungen

$$(oil) = 0 \qquad (okl) = 0$$

$$(oin) = 0 \qquad (okn) = 0$$

$$(oil) - \frac{(ilm)}{(inn)} \cdot (oin) = 0 \qquad (okl) - \frac{(klm)}{(knm)} \cdot (okn) = 0$$

$$(oil) - \frac{(ilp)}{(inp)} \cdot (oin) = 0 \text{ beziehungsweise } (okl) - \frac{(klp)}{(knp)} \cdot (okn) = 0$$

ausgedrückt werden. Die Projectivität der genannten Strahlenbüschel ist alsdann durch

$$\frac{(ilm)}{(inn)} : \frac{(ilp)}{(inp)} = \frac{(klm)}{(knm)} : \frac{(klp)}{(knp)}$$

oder indem wir

$$D_{ik} = (ilm)(inp)(klp)(knm) - (ilp)(inn)(klm)(knp)$$

setzen, durch die Gleichung

$$D_{ik} = 0$$

ausgedrückt.

Das Verschwinden der Determinante unter 1) und 2), sowie des Ausdruckes D_{ik} ist sonach die analytische Bedingung für dieselbe geometrische Tatsache: dass die Punkte 123456 auf demselben

Kegelschnitte liegen. Man darf daher erwarten, dass zwischen diesen algebraischen Gebilden ein gewisser Zusammenhang existiert. Die Aufgabe dieser Zeilen ist, diesen Zusammenhang nachzuweisen. Wir werden finden, dass

$$\varepsilon \cdot S = \Delta_{iklmnp} = D_{ik} \quad 3)$$

Hier bedeutet S die Determinante 1), Δ_{iklmnp} die Determinante 2) und ε die positive oder negative Einheit, je nachdem die Anzahl der Inversionen in $iklmnp$ ungerade oder gerade ist. Der Beweis für das Stattfinden der Gleichung 3) ist zugleich ein Beweis des Pascalschen Satzes und zwar in der Steiner'schen Allgemeinheit, sowie ein Beweis des Satzes betreffend die Projectivität der Strahlenbüschel, welche entstehen, wenn man irgend zwei Punkte eines Kegelschnittes mit denselben vier Punkten des Kegelschnittes verbindet. Denn die Gleichung 3) macht ersichtlich, dass das Verschwinden von S auch das Verschwinden von Δ_{iklmnp} und D_{ik} nach sich zieht. Dem Beweise schicken wir einige Determinanten-Relationen voraus.

2. Es sei

$$r = \begin{vmatrix} x_i^2 & y_i^2 & z_i^2 & 2x_ix_l & 2x_ix_n & 2x_iy_l \\ x_l^2 & y_l^2 & z_l^2 & 2y_ly_l & 2y_ly_n & 2x_ly_l \\ x_n^2 & y_n^2 & z_n^2 & 2y_nz_n & 2x_nx_n & 2x_ny_n \\ x_lx_n & y_ly_n & z_lz_n & y_lz_n + y_nz_l & z_lx_n + z_nx_l & x_ly_n + x_ny_l \\ x_nx_i & y_ny_i & z_nz_i & y_nz_i + y_lz_n & z_nx_i + z_lx_n & x_ny_i + x_ly_n \\ x_ix_l & y_iy_l & z_iz_l & y_iz_l + y_lz_i & z_ix_l + z_lx_i & x_iy_l + x_ly_i \end{vmatrix}$$

so beweisen wir, dass

$$r = (iln)^4.$$

Zu dem Ende multipliciren wir die Elemente der ersten Zeile in r mit ξ_{in} , die der zweiten mit ξ_{ni} , die der dritten mit ξ_{il} , den den Elementen x_i , x_l , x_n zugehörigen Minoren der Determinante (iln) und addiren hierauf zu den Elementen der ersten Zeile die mit ξ_{in} , resp. ξ_{ni} multiplicirten Elemente der fünften und sechsten Zeile, in den Elementen der zweiten Zeile die mit ξ_{in} , resp. ξ_{il} multiplicirten Elemente der sechsten und vierten Zeile, schliesslich zu den Elementen der dritten Zeile die mit ξ_{ni} , resp. ξ_{il} multiplicirten Elemente der vierten und fünften Zeile. Wir gelangen dadurch zur Gleichung

$$\xi_{in} \cdot \xi_{ni} \cdot \xi_{il} \cdot r = \begin{vmatrix} x_l \cdot (iln) & 0 & 0 & 0 & z_l(iln) & y_l(iln) \\ x_l \cdot (iln) & 0 & 0 & 0 & z_l(iln) & y_l(iln) \\ x_n \cdot (iln) & 0 & 0 & 0 & z_n(iln) & y_n(iln) \\ x_ix_n & y_ly_n & z_lz_n & y_lz_n + y_nz_l & z_lx_n + z_nx_l & x_ly_n + x_ny_l \\ x_nx_i & y_ny_i & z_nz_i & y_nz_i + y_lz_n & z_nx_i + z_lx_n & x_ny_i + x_ly_n \\ x_ix_l & y_iy_l & z_iz_l & y_iz_l + y_lz_i & z_ix_l + z_lx_i & x_iy_l + x_ly_i \end{vmatrix}$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\xi_{in}\xi_{ni}\xi_{il}r = (iln)^3 \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_l & y_i \\ x_l & x_i & y_l \\ x_n & x_n & y_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_ly_n & x_lx_n & y_lx_n + y_nx_l \\ y_ny_i & x_nx_i & y_nx_i + y_ix_n \\ y_ly_l & x_lx_l & y_ly_l + y_lx_l \end{vmatrix}$$

Da nun

$$\begin{vmatrix} y_ly_n & x_lx_n & y_lx_n + y_nx_l \\ y_ny_i & x_nx_i & y_nx_i + y_ix_n \\ y_ly_l & x_lx_l & y_ly_l + y_lx_l \end{vmatrix} = -\xi_{in}\xi_{ni}\dots\xi_{il}$$

ist, so haben wir den angekündigten Satz

$$r = (iln)^4 \quad 4)$$

Es seien ferner $\eta_{in}\eta_{ni}\eta_{il}$ und $\xi_{in}\xi_{ni}\xi_{il}$ die übrigen Minoren von (iln) , so besteht nach 4)

$$\begin{vmatrix} \xi_{in}^2 & \eta_{in}^2 & \xi_{in}^2 & 2\eta_{in}\xi_{in} & 2\xi_{in}\xi_{in} & 2\xi_{in}\eta_{in} \\ \xi_{ni}^2 & \eta_{ni}^2 & \xi_{ni}^2 & 2\eta_{ni}\xi_{ni} & 2\xi_{ni}\xi_{ni} & 2\xi_{ni}\eta_{ni} \\ \xi_{il}^2 & \eta_{il}^2 & \xi_{il}^2 & 2\eta_{il}\xi_{il} & 2\xi_{il}\xi_{il} & 2\xi_{il}\eta_{il} \\ \xi_{ni}\xi_{il} & \eta_{ni}\eta_{il} & \xi_{ni}\xi_{il} & \eta_{ni}\xi_{il} + \eta_{il}\xi_{ni} & \xi_{ni}\xi_{il} + \xi_{il}\xi_{ni} & \xi_{ni}\eta_{il} + \xi_{il}\eta_{ni} \\ \xi_{il}\xi_{in} & \eta_{il}\eta_{in} & \xi_{il}\xi_{in} & \eta_{il}\xi_{in} + \eta_{in}\xi_{il} & \xi_{il}\xi_{in} + \xi_{in}\xi_{il} & \xi_{il}\eta_{in} + \xi_{in}\eta_{il} \\ \xi_{in}\xi_{ni} & \eta_{in}\eta_{ni} & \xi_{in}\xi_{ni} & \eta_{in}\xi_{ni} + \eta_{ni}\xi_{in} & \xi_{in}\xi_{ni} + \xi_{ni}\xi_{in} & \xi_{in}\eta_{ni} + \xi_{ni}\eta_{in} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_{in} & \eta_{in} & \xi_{in} \\ \xi_{ni} & \eta_{ni} & \xi_{ni} \\ \xi_{il} & \eta_{il} & \xi_{il} \end{vmatrix}^4 \quad 5)$$

und da

$$\begin{vmatrix} \xi_{in} & \eta_{in} & \xi_{in} \\ \xi_{ni} & \eta_{ni} & \xi_{ni} \\ \xi_{il} & \eta_{il} & \xi_{il} \end{vmatrix} = (iln)^2,$$

so haben wir

$$R = (iln)^8 \quad 6)$$

wo R die Determinante der linken Seite in der Gleichung 5) bedeutet. Die Gleichung 6) ist eine der angemeldeten Determinanten-Relationen.

Die zweite Relation ist in der Gleichung

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha'\beta'\gamma') - (\alpha\beta\gamma')(\alpha'\beta'\gamma) = \begin{vmatrix} \xi_{\alpha\beta} & \eta_{\alpha\beta} & \xi_{\alpha\beta} \\ \xi_{\alpha'\beta'} & \eta_{\alpha'\beta'} & \xi_{\alpha'\beta'} \\ \xi_{\gamma\gamma'} & \eta_{\gamma\gamma'} & \xi_{\gamma\gamma'} \end{vmatrix} \quad 7)$$

ausgesprochen, von deren Richtigkeit man sich überzeugt, wenn man das Product von

und

$$(\alpha\beta\gamma) = \xi_{\alpha\beta} \cdot x_\gamma + \eta_{\alpha\beta} \cdot y_\gamma + \zeta_{\alpha\beta} \cdot z_\gamma$$

und

$$(\alpha'\beta'\gamma') = \xi_{\alpha'\beta'} \cdot x_{\gamma'} + \eta_{\alpha'\beta'} \cdot y_{\gamma'} + \zeta_{\alpha'\beta'} \cdot z_{\gamma'}$$

bildet und davon das Product von

und

$$(\alpha\beta\gamma') = \xi_{\alpha\beta} \cdot x_{\gamma'} + \eta_{\alpha\beta} \cdot y_{\gamma'} + \zeta_{\alpha\beta} \cdot z_{\gamma'}$$

$$(\alpha'\beta'\gamma) = \xi_{\alpha'\beta'} \cdot x_\gamma + \eta_{\alpha'\beta'} \cdot y_\gamma + \zeta_{\alpha'\beta'} \cdot z_\gamma$$

subtrahirt und sich erinnert, dass

$$\xi_{\gamma\gamma'} = y_\gamma z_{\gamma'} - y_{\gamma'} z_\gamma, \quad \eta_{\gamma\gamma'} = z_\gamma x_{\gamma'} - z_{\gamma'} x_\gamma, \quad \zeta_{\gamma\gamma'} = x_\gamma y_{\gamma'} - x_{\gamma'} y_\gamma.$$

Ist in der Gleichung 7) z. B. $\alpha = \gamma'$, so haben wir

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha'\beta'\alpha) = \begin{vmatrix} \xi_{\alpha\beta} & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \xi_{\alpha'\beta'} & \eta_{\alpha'\beta'} & \zeta_{\alpha'\beta'} \\ \xi_{\gamma\alpha} & \eta_{\gamma\alpha} & \zeta_{\gamma\alpha} \end{vmatrix} \quad 8)$$

Ist dagegen in derselben Gleichung 7) z. B. $\beta = \beta'$, so ist die Determinante rechter Hand in das Product zweier Determinanten zerlegbar. Nämlich:

$$\begin{vmatrix} \xi_{\alpha\beta} & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \xi_{\alpha'\beta} & \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \\ \xi_{\gamma\beta} & \eta_{\gamma\beta} & \zeta_{\gamma\beta} \end{vmatrix} = \frac{1}{x_\beta} \cdot \begin{vmatrix} x_\beta \cdot \xi_{\alpha\beta} & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ x_\beta \cdot \xi_{\alpha'\beta} & \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \\ x_\beta \cdot \xi_{\gamma\beta} & \eta_{\gamma\beta} & \zeta_{\gamma\beta} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{x_\beta} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ 0 & \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \\ (\beta\gamma\beta) & \eta_{\gamma\beta} & \zeta_{\gamma\beta} \end{vmatrix} = \frac{(\beta\gamma\beta)}{x_\beta} \cdot \begin{vmatrix} \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \end{vmatrix}$$

In der zweiten Determinante werden zu den Elementen der ersten Colonne die mit y_β , bezüglich z_β multiplicirten Elemente der zweiten und dritten Colonne addirt und berücksichtigt, dass

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha\beta} \cdot x_\beta + \eta_{\alpha\beta} \cdot y_\beta + \zeta_{\alpha\beta} \cdot z_\beta &\equiv 0 \\ \xi_{\alpha'\beta} \cdot x_\beta + \eta_{\alpha'\beta} \cdot y_\beta + \zeta_{\alpha'\beta} \cdot z_\beta &\equiv 0 \\ \xi_{\gamma\beta} \cdot x_\beta + \eta_{\gamma\beta} \cdot y_\beta + \zeta_{\gamma\beta} \cdot z_\beta &= (\beta\gamma\beta). \end{aligned}$$

Da nun

$$\begin{vmatrix} \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \end{vmatrix} = x_\beta \cdot (\beta\alpha\alpha'),$$

erhalten wir den Satz:

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha'\beta'\gamma') - (\alpha\beta\gamma')(\alpha'\beta'\gamma) = (\beta\alpha\alpha')(\beta\gamma\gamma') \quad 9)$$

3) Mit Hülfe der Gleichungen 6), 8) und 9) lässt sich der Satz 3) auf folgende Art beweisen. Es ist

$$\varepsilon . S = \begin{vmatrix} x_i^2 & y_i^2 & z_i^2 & y_i z_i & z_i x_i & x_i y_i \\ x_l^2 & y_l^2 & z_l^2 & y_l z_l & z_l x_l & x_l y_l \\ x_n^2 & y_n^2 & z_n^2 & y_n z_n & z_n x_n & x_n y_n \\ x_m^2 & y_m^2 & z_m^2 & y_m z_m & z_m x_m & x_m y_m \\ x_p^2 & y_p^2 & z_p^2 & y_p z_p & z_p x_p & x_p y_p \\ x_k^2 & y_k^2 & z_k^2 & y_k z_k & z_k x_k & x_k y_k \end{vmatrix}$$

wenn $\varepsilon = +1$, oder $\varepsilon = -1$, jenachdem in $ilmnpk$ die Anzahl der Inversionen gerade oder ungerade ist. Die linke Seite der letzten Gleichung multipliciren wir mit $(iln)^2$, die rechte Seite mit der Determinante R , welche Grössen nach 6) gleich sind. Das Product ist

$$\varepsilon . S . (iln)^2 = \begin{vmatrix} (iln)^2 & 0 & 0 & (mln)^2 & (pnl)^2 & (kln)^2 \\ 0 & (iln)^2 & 0 & (mni)^2 & (pni)^2 & (kni)^2 \\ 0 & 0 & (iln)^2 & (mil)^2 & (pil)^2 & (kil)^2 \\ 0 & 0 & 0 & (mni)(mil) & (pni)(pil) & (kni)(kil) \\ 0 & 0 & 0 & (mil)(mln) & (pil)(pln) & (kil)(kln) \\ 0 & 0 & 0 & (mln)(mni) & (pln)(pni) & (kln)(kni) \end{vmatrix}$$

oder

$$\varepsilon . S . (iln)^2 = \begin{vmatrix} (mni)(mil) & (pni)(pil) & (kni)(kil) \\ (mil)(mln) & (pil)(pln) & (kil)(kln) \\ (mln)(mni) & (pln)(pni) & (kln)(kni) \end{vmatrix} \quad 10)$$

oder auch

$$\varepsilon . S . (iln)^2 = \begin{vmatrix} (pln)(kln) & (pni)(kln) & (pln)(kil) \\ (kni)(mln) & (kni)(mni) & (kil)(mni) \\ (mln)(pil) & (mil)(pni) & (mil)(pil) \end{vmatrix} \quad 11)$$

Auf Grund von 8) finden folgende Gleichungen Statt:

$$(pln)(kln) = \begin{vmatrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \zeta_{ln} \\ \xi_{np} & \eta_{np} & \zeta_{np} \\ \xi_{kl} & \eta_{kl} & \zeta_{kl} \end{vmatrix}, \quad (pni)(kln) = \begin{vmatrix} \xi_{ni} & \eta_{ni} & \zeta_{ni} \\ \xi_{np} & \eta_{np} & \zeta_{np} \\ \xi_{kl} & \eta_{kl} & \zeta_{kl} \end{vmatrix},$$

$$(pln)(kil) = \begin{vmatrix} \xi_{il} & \eta_{il} & \zeta_{il} \\ \xi_{np} & \eta_{np} & \zeta_{np} \\ \xi_{kl} & \eta_{kl} & \zeta_{kl} \end{vmatrix},$$

$$(kni)(mln) = \begin{vmatrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \zeta_{ln} \\ \xi_{ik} & \eta_{ik} & \zeta_{ik} \\ \xi_{mn} & \eta_{mn} & \zeta_{mn} \end{vmatrix}, \quad (kni)(mni) = \begin{vmatrix} \xi_{ni} & \eta_{ni} & \zeta_{ni} \\ \xi_{ik} & \eta_{ik} & \zeta_{ik} \\ \xi_{mn} & \eta_{mn} & \zeta_{mn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 (kil)(mni) &= \begin{vmatrix} \xi_{il} & \eta_{il} & \xi_{il} \\ \xi_{ik} & \eta_{ik} & \xi_{ik} \\ \xi_{mn} & \eta_{mn} & \xi_{mn} \end{vmatrix}, \\
 (mln)(pil) &= \begin{vmatrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \xi_{ln} \\ \xi_{lm} & \eta_{lm} & \xi_{lm} \\ \xi_{pi} & \eta_{pi} & \xi_{pi} \end{vmatrix}, \quad (mil)(pni) = \begin{vmatrix} \xi_{ni} & \eta_{ni} & \xi_{ni} \\ \xi_{lm} & \eta_{lm} & \xi_{lm} \\ \xi_{pi} & \eta_{pi} & \xi_{pi} \end{vmatrix}, \\
 (mil)(pil) &= \begin{vmatrix} \xi_{il} & \eta_{il} & \xi_{il} \\ \xi_{lm} & \eta_{lm} & \xi_{lm} \\ \xi_{pi} & \eta_{pi} & \xi_{pi} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Substituiert man diese Determinanten in die auf der rechten Seite der Gleichung 11) stehende Determinante, so erkennt man diese letztere als das Product von

$$\begin{vmatrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \xi_{ln} \\ \xi_{ni} & \eta_{ni} & \xi_{ni} \\ \xi_{il} & \eta_{il} & \xi_{il} \end{vmatrix} \text{ in } \begin{vmatrix} \eta_{np}\xi_{ki} - \eta_{ki}\xi_{np} & \xi_{np}\xi_{ki} - \xi_{ki}\xi_{np} & \xi_{np}\eta_{ki} - \xi_{ki}\eta_{np} \\ \eta_{ik}\xi_{mn} - \eta_{mn}\xi_{ik} & \xi_{ik}\xi_{mn} - \xi_{mn}\xi_{ik} & \xi_{ik}\eta_{mn} - \xi_{mn}\eta_{ik} \\ \eta_{lm}\xi_{pi} - \eta_{pi}\xi_{lm} & \xi_{lm}\xi_{pi} - \xi_{pi}\xi_{lm} & \xi_{lm}\eta_{pi} - \xi_{pi}\eta_{lm} \end{vmatrix},$$

von denen die erste $(iln)^2$, die zweite Δ_{iklmnp} gleich ist. Demnach folgt aus 11)

$$\varepsilon \cdot S = \Delta_{iklmnp} \quad 3)$$

Nach dem Obigen bedeutet ε die positive oder negative Einheit, jenachdem die Anzahl der Inversionen in $ilnmpk$ gerade oder ungerade ist. Um den Wert von ε von der in der Gleichung 3) ausgedrückten Permutation abhängig zu machen, haben wir nur hinzuweisen, dass die Permutationen $iklmnp$ und $ilnmpk$ verschiedenen Classen angehören. Wir dürfen daher ε in der schon ausgesprochenen Weise bestimmen, dass $\varepsilon = +1$ oder -1 ist, jenachdem die Zahl der Inversionen in $iklmnp$ ungerade oder gerade ist.

4. Nun werden wir nachweisen, dass die Minoren der Reciprocal-Determinante der auf der rechten Seite der Gleichung 10) stehenden Determinante von den Functionen, deren Verschwinden die Projectivität der Strahlenbüschel ausdrückt, welche entstehen, wenn irgend zwei Punkte des Kegelschnittes mit denselben vier Punkten desselben verbunden werden, nur durch gewisse Factoren sich unterscheiden. Es sei Δ die Determinante rechter Seite von 10), ihre Elemente

$$\begin{aligned}
 (mni)(mil) &= a_1, & (pni)(pil) &= b_1, & (kni)(kil) &= c_1, \\
 (mil)(mln) &= a_2, & (pil)(pln) &= b_2, & (kil)(kln) &= c_2, \\
 (mln)(mni) &= a_3, & (pln)(pni) &= b_3, & (kln)(kni) &= c_3,
 \end{aligned}$$

ihre Minoren

$$\begin{aligned} b_2 c_3 - b_3 c_2 &= \alpha_1, & c_2 a_3 - c_3 a_2 &= \beta_1, & a_2 b_3 - a_3 b_2 &= \gamma_1 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 &= \alpha_2, & c_3 a_1 - c_1 a_3 &= \beta_2, & a_3 b_1 - a_1 b_3 &= \gamma_2 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 &= \alpha_3, & c_1 a_2 - c_2 a_1 &= \beta_3, & a_1 b_2 - a_2 b_1 &= \gamma_3 \end{aligned}$$

und ∇ ihre Reciprocal-Determinante, dann ist

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \gamma_1} = c_1 \cdot (iln)^2 \cdot D_{ik}.$$

Nach der Gleichung 9) ist nämlich

$$\begin{aligned} (pln)(kil) - (pil)(kln) &= (iln)(kpl) \\ (pni)(kln) - (pln)(kni) &= (iln)(kpn) \\ (kln)(mil) - (kil)(mln) &= (iln)(mkl) \\ (kni)(mln) - (kln)(mni) &= (iln)(mkn). \end{aligned}$$

Daher wird

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= (iln)(kni)(kpl)(pni) \\ \beta_2 &= (iln)(kni)(mkl)(mni) \\ \alpha_3 &= (iln)(kil)(kpn)(pil) \\ \beta_3 &= (iln)(kil)(mkn)(mil), \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \gamma_1} = \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 = (iln)^2 \cdot (kni)(kil) \cdot [(kpl)(pni)(mkn)(mil) - (mkl)(mni)(kpn)(pil)],$$

oder

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \gamma_1} = c_1 \cdot (iln)^2 \cdot D_{ik}.$$

Nun ist bekannt, dass

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \gamma_1} = c_1 \mathcal{A},$$

mithin

$$\mathcal{A} = (iln)^2 \cdot D_{ik}.$$

Aus dieser Gleichung und 10) folgt

$$\varepsilon S = D_{ik}.$$

Die Gleichung 3) zeigt zugleich, dass die Gebilde S , \mathcal{A}_{iklmnp} und D_{ik} invariante Functionen der sechs Reihen von Grössen $x_i y_j$, ($i = 123456$) sind.

XXII.

Aufgabe über Construction eines Kegelschnitts.

Von

Herrn **Gustav Mamke**

in Leipzig.

In dem Folgenden habe ich versucht, eine geometrische Aufgabe, welche sich zwar in mehreren Werken *) angeführt findet, doch dort keine weitere Ausarbeitung erfahren hat, in etwas eingehenderer Weise elementar synthetischer zu behandeln und einige hieraus folgende Lehrsätze über Kegelschnitte aufzustellen.

A. Aufgabe: Einen Kegelschnitt zu zeichnen, welcher drei gegebene Geraden berührt und einen gegebenen Punkt zum Brennpunkt hat.

B. Wie ändert sich der Charakter des Kegelschnitts, wenn eine der gegebenen Tangenten um einen festen Punkt gedreht wird?

C. Wie bewegt sich bei dieser Drehung das Centrum des Kegelschnitts?

A. Auflösung: Man fälle von dem gegebenen Punkte (F) aus Senkrechte auf die Tangenten und ziehe durch die drei Fußpunkte derselben einen Kreis. Dieser Kreis ist dann der Centralkreis des Kegelschnitts, d. h. der dem Kegelschnitte concentrische Kreis, welcher ihn in den Scheiteln berührt. Das Centrum desselben ist also zugleich Mittelpunkt des Kegelschnitts. Der 2. Brennpunkt liegt auf

*) Besant: Conic Sections pag. 255. N. 38. (für die Ellipse),
Steiner (Geiser.): pag. 63. und pag. 156.

der Verbindungslinie des ersten Brennpunktes mit dem Centrum, in demselben Abstände von letzterm, als der erste. Der Durchmesser des Centralkreises ist die grosse Axe des Kegelschnitts.

B. Die Art des Kegelschnitts wird durch die Lage des gegebenen Punktes zum Centralkreis bedingt, und zwar ist derselbe eine Ellipse, wenn der gegebene Punkt innerhalb des Centralkreises, eine Hyperbel, wenn der Punkt ausserhalb desselben liegt, und eine Parabel, wenn der Kreis zur Geraden wird. Will man daher die Aenderung der Art des Kegelschnitts bei der Drehung der einen Tangente untersuchen, so braucht man nur die Lage des Punktes F zum Centralkreise zu betrachten.

In Fig. 1. seien AB , BC und AC die gegebenen Tangenten und F der gegebene Punkt. Man fälle also von F aus auf die Tangenten Senkrechte; die Fusspunkte dieser seien U , V und W . Wird nun die Tangente BC um den Punkt D gedreht, so ändert hierbei auch V seine Lage, und da Wkl. $DVF = R$ ist, so bewegt sich V auf der Peripherie des Kreises um DF ; die beiden andern Fusspunkte U und W bleiben fest liegen. Verbindet man D mit A , dem Schnittpunkte der beiden festen Tangenten, und schneidet AD den Kreis um DF noch in G , so ist $UFWGA$ ein Sehnenfünfeck mit AF als Durchmesser; ausserdem ziehe man noch UW , so dass es den Kreis um DF in E und H schneidet.

Die Tangente DB beginne ihre Drehung als Durchmesser des Kreises um DF und zwar so, dass sich V in der Richtung des ausserhalb des Kreises um AF befindlichen Bogens FG bewegt. In der Anfangslage liegt V in F , folglich geht der Kreis um UVW durch F , was bei keinem Kegelschnitte der Fall sein kann. Bewegt sich nun V auf dem Bogen FE , so bleibt es mit F noch auf derselben Seite von UW , da V aber aus dem Kreise um AF heraustritt, so wird jetzt Wkl. $UVW < UFW$. Wird also um UVW der Kreis gezogen, so schliesst dieser den Punkt F ein. Der Kegelschnitt ist also, so lange V auf dem Bogen FE liegt, eine Ellipse. Kommt V nach E , so wird Wkl. $UVW = 0^\circ$ oder $UWV = 2R$. Das Centrum des Kreises um UWV liegt aber dann im Unendlichen. Der Kegelschnitt ist in diesem Falle eine Parabel mit F als Brennpunkt und UWV als Scheiteltangente.

Durchläuft nun V den Bogen EG , so tritt es auf die andere Seite von UW , bleibt aber jetzt immer noch ausserhalb des Kreises um AF , d. h. Wkl. UVW ist jetzt $< UAW$, mithin auch Wkl. $UVW + UFW < 2R$. Wenn man also um UVW den Kreis beschreibt, so bleibt F ausserhalb desselben. Der Kegelschnitt ist aber dann eine Hyperbel.

Liegt V in G , so gehen nach Construction die 3 Tangenten durch einen Punkt; dann ist aber kein Kegelschnitt möglich.

V bewegt sich nun bei der Drehung der Tangenten weiter auf dem Bogen GH und kommt somit in den Kreis um AF zu liegen, folglich wird jetzt Wkl. $UVW + UFW > 2R$. Der Kreis um UVW schliesst also den Punkt F in sich ein; der Kegelschnitt ist aber dann wieder eine Ellipse.

Bei H tritt derselbe Fall ein, wie bei E ; Wkl. UVW ist $= 2R$, der Kegelschnitt ist also wieder eine Parabel und zwar dieselbe, wie bei E .

Durchläuft nun V den Bogen HF , so tritt es wieder auf die andere Seite von UW ; da es aber immer noch innerhalb des Kreises um AF liegt, so ist Wkl. $UVW > UFW$; F liegt also ausserhalb des Kreises um UVW . Der Kegelschnitt ist also hier wiederum eine Hyperbel.

Es treten also bei der Drehung der Tangente DCB sämtliche Kegelschnitte auf, und zwar in geordneter Reihenfolge, nämlich:

1. kein Kegelschnitt (bei F),
2. Ellipse (von F bis E),
3. Parabel (bei E),
4. Hyperbel (von E bis G),
5. kein Kegelschnitt (bei G),
6. Ellipse (von G bis H),
7. Parabel (bei H),
8. Hyperbel (von H bis F).

Nehmen die Fusspunkte U und W andere Lagen zum Kreis um DF ein, als in dem eben betrachteten Falle, so treten die Kegelschnitte in ähnlicher Weise auf, nur ist ihre Reihenfolge dann oft anders, und in gewissen Fällen fehlen einzelne Kegelschnitte.

C. Wie bewegt sich bei dieser Drehung das Centrum des Kegelschnitts? Um das Centrum des Kegelschnitts zu finden, hat man nach A vom gegebenen Punkte aus Senkrechte auf die Tangenten zu fallen und zu den Verbindungslinien der Fusspunkte dieser Mittelsenkrechte zu ziehen; der Schnittpunkt der letzteren ist der verlangte Mittelpunkt. Da nun aber bei der Drehung einer Tangente die beiden andern und mithin auch die Fusspunkte der Senkrechten auf diese fest liegen bleiben, so ist die Mittelsenkrechte zur Verbindungslinie der letzteren der geometrische Ort für das Centrum des Kegelschnitts. Bewegt sich nun V auf dem Kreis um DF (Fig. 1.), so werden, nach der Lage der Punkte U und W zu diesem Kreise, durch die Mittelsenkrechten zu UV und VW verschiedene Kegelschnitte eingehüllt. Liegt z. B. der Fusspunkt U ausserhalb des Kreises und W innerhalb, so entstehen durch die Mittelsenkrechten zu UV und WV eine Hyperbel und eine Ellipse. Diese beiden Kegel-

schnitte haben den betreffenden Punkt U oder W und das Centrum des Kreises zu Brennpunkten und den Radius ($\frac{1}{2}DF$) zur grossen Axe.

Es werde nun zunächst der Fall betrachtet, dass die beiden Fusspunkte U und W ausserhalb des Kreises um DF liegen. Es entstehen also dann durch die Mittelsenkrechten auf UV und WV zwei Hyperbeln. Nach der Lage der Mittelsenkrechten auf UW zu den zwei Hyperbeln können nun hier wieder 3 Fälle unterschieden werden. Dieselbe kann nämlich 1. zwei, 2. einer, und 3. keiner Hyperbeltangente parallel sein, und zwar jenachdem UW oder die Verlängerung hiervon den Kreis um DF schneidet, berührt oder ausserhalb desselben liegt.

Im 1. Falle (Fig. 2.), wenn also UW den Kreis in E und H schneidet, ist die Mittelsenkrechte zu UW parallel denen zu UE und UH oder WE und WH . In beiden Fällen liegt sie aber ausserhalb der betreffenden Tangenten, sie kann also nur je einen Ast der Hyperbeln schneiden. Auf dieser beiden Hyperbeln gemeinsamen Sehne können nun aber keine Schnittpunkte mit Hyperbeltangenten liegen, mithin kann sich auch das Centrum des Kegelschnitts nicht auf derselben befinden. Das Centrum durchläuft also in diesem Falle die ganze Mittelsenkrechte zu UW mit Ausnahme der Hyperbelsehne, und zwar zweimal, wie leicht ersichtlich ist, wenn man die Bewegung der Tangente BC verfolgt.

2. (Fig. 3.) Berührt UW oder die Verlängerung den Kreis um DF in E , so geht dann die Mittelsenkrechte zu UW zwei Asymptoten parallel; sie schneidet daher beide Hyperbeln nur in einem und demselben Punkt. Das Centrum durchläuft also jetzt zweimal das einseitig begrenzte Stück der Mittelsenkrechten zu UW , welches ausserhalb der Hyperbeln liegt.

Im 3. Falle, wo also die Mittelsenkrechte zu UW keiner Hyperbeltangente parallel sein kann (Fig. 4.), durchschneidet diese dann beide Aeste der Hyperbeln. Das Centrum kann also in diesem Falle nur die zwischen den Hyperbelästen gelegene Strecke der Mittelsenkrechten zu UW zweimal durchlaufen.

Die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten zu UW mit einer der Hyperbeln sind als Schnittpunkte zweier Mittelsenkrechten zu den Verbindungslinien der Fusspunkte (U, V, W) zugleich Punkte der andern Hyperbel; die Hyperbeln schneiden sich also auf der Mittelsenkrechten zu WU . Hieraus geht der Lehrsatz hervor: Haben zwei Hyperbeln einen Brennpunkt gemeinsam und gleiche grosse Axen, so geht die Mittelsenkrechte zur Verbindungslinie der andern Brennpunkte durch die Schnittpunkte der Hyperbeln.

In dem folgenden Falle seien die beiden festen Punkte U und W innerhalb des Kreises um DF gelegen (Fig. 5.).

Schneidet UW den Kreis wieder in E und H , so liegt die Mittelsenkrechte zu UW in diesem Falle zwischen den parallelen Mittelsenkrechten zu WH und WE oder UH und UE . Letztere sind aber Tangenten zweier Ellipsen, welche das Centrum des Kreises als gemeinsamen und U oder W als je zweiten Brennpunkt und den Radius ($\frac{1}{2}DF$) zur grossen Axe haben. Die Mittelsenkrechte zu UW schneidet also die Ellipsen. Das Centrum durchläuft wieder diese Mittelsenkrechte zweimal, mit Ausnahme der Ellipsensehne.

Der oben für Hyperbeln aufgestellte Satz gilt also auch für zwei Ellipsen, welche jene Bedingungen erfüllen.

Tritt endlich der Fall ein, dass sich einer der Fusspunkte U und W innerhalb, der andere ausserhalb des Kreises um DF befindet, so liegt dann die Mittelsenkrechte zu UW ausserhalb zweier paralleler Ellipsen und innerhalb zweier paralleler Hyperbeltangenten, sie kann also weder die Ellipse noch die Hyperbel schneiden. Das Centrum durchläuft also dann die ganze Mittelsenkrechte zu UW zweimal.



XXIII.

Miscellen.

1.

Beitrag zur Trigonometrie.

Gegeben sei das Dreieck ABC , dessen Seiten $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, und die Winkel bezeichnen wir mit dem griechischen Buchstaben der Ecke. Projiciren wir nun je zwei Seiten des Dreiecks in die dritte Seite, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} b \cos \gamma + c \cos \beta &= a \\ c \cos \alpha + a \cos \gamma &= b \\ a \cos \beta + b \cos \alpha &= c \end{aligned} \tag{1}$$

Diese Gleichungen geben uns Relationen an, denen die Seiten und Winkel eines beliebigen Dreiecks genügen müssen, somit enthalten sie die Auflösung eines Dreiecks aus drei Bestimmungsstücken.

Aus den Gleichungen (1) können wir nämlich ableiten: 1) durch Elimination der Seiten, 2) durch Elimination einer Seite und des gegenüberliegenden Winkels, 3) durch Elimination zweier Winkel neue Relationen, welche uns in Gleichungsform die allgemeinen Bedingungen darstellen, denen die Seiten und Winkel jedes Dreiecks genügen müssen. Wir wollen nun diese Relationen entwickeln.

1) Die Elimination der Seiten gibt

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos \gamma & \cos \beta \\ \cos \gamma & -1 & \cos \alpha \\ \cos \beta & \cos \alpha & -1 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

welche Gleichung wir auch schreiben können

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1 = 0$$

oder

$$(\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta)^2 = (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta),$$

somit

$$-\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

oder

$$\cos(\pi - \gamma) = \cos(\alpha + \beta),$$

d. h.

$$\pi = \alpha + \beta + \gamma. \quad (3)$$

Die Gleichung (2) gibt uns somit die allgemeine Bedingungsgleichung zwischen den Winkeln des Dreiecks, nämlich dass ihre Summe zwei Rechte beträgt.

2) Die Elimination einer Seite und des gegenüberliegenden Winkels z. B. c , γ , oder c , $\cos \gamma$ gibt:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & a & -b \\ \cos \beta & b & -a \\ -1 & 0 & a \cos \beta + b \cos \alpha \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

oder entwickelt nach den Elementen der zweiten Colonne:

$$-a \begin{vmatrix} \cos \beta & -a \\ -1 & a \cos \beta + b \cos \alpha \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} \cos \alpha & -b \\ -1 & a \cos \beta + b \cos \alpha \end{vmatrix} = 0$$

oder durch weitere Ausführung

$$a^2(1 - \cos^2 \beta) - b^2(1 - \cos^2 \alpha) = 0,$$

daher

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

Die Elimination von a und $\cos \alpha$ würde ergeben

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

somit ist

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (5)$$

welches uns den bekannten Sinussatz liefert, nämlich durch Gleichung ausgedrückte allgemeine Bedingung zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks, dass der grösseren Seite, ein grösserer Winkel gegenüberliegt.

3) Die Elimination zweier Winkel z. B. α , β oder $\cos \alpha$, $\cos \beta$ gibt eine Relation zwischen einem Winkel und den Seiten des Dreiecks, nämlich:

$$\begin{vmatrix} b & a & -c \\ 0 & c & b \cos \gamma - a \\ c & 0 & a \cos \gamma - b \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

oder

$$-\begin{vmatrix} b & a & c \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} \cos \gamma = 0, \quad (7)$$

aus welcher Gleichung wir $\cos \gamma$ berechnen können, nämlich:

$$\cos \gamma = \frac{\begin{vmatrix} b & a & c \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}}.$$

Entsprechend würden wir die Ausdrücke für $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ bekommen. Da nun

$$\begin{vmatrix} b & a & c \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} = c(b^2 + a^2 - c^2), \quad \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = 2abc$$

ist, so können wir die Gleichung (7) schreiben mit Kürzung von c

$$-(b^2 + a^2 - c^2) + 2ab \cos \gamma = 0,$$

woraus sich ergibt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \quad (8)$$

Entsprechend würden wir bekommen durch Elimination von $\cos \beta$, $\cos \gamma$, dann von $\cos \gamma$, $\cos \beta$

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \end{aligned} \quad (8')$$

Die Gleichung (8) gibt uns den bekannten Carnot'schen Lehrsatz, welcher uns in Gleichungsform die allgemeine Bedingung zwischen den Seiten des Dreiecks ausdrückt, nämlich dass die Summe zweier Seiten grösser ist als die dritte Seite.

Somit haben wir erkannt, dass das System (1) die drei allgemeinen Bedingungen zwischen den Winkeln und Seiten eines Dreiecks ausdrückt, dass wir somit aus drei gegebenen Stücken (wegen (3) muss wenigstens eine Seite gegeben sein) das Dreieck auflösen d. i. mittelst (1) oder dessen Ableitung [(3), (5), (8)] die übrigen drei Stücke berechnen oder geometrisch: aus drei Bestimmungsstücken das Dreieck construiren können.

2.

Correctionsgewichte.

Um bei feinsten Gewichtsbestimmungen die Wägungsergebnisse auf den allein massgebenden Fall der Wägung in einem von jeder schweren Materie freien Raum zu reduciren, ist neben der Kenntniss der Ausdehnungsverhältnisse der Stoffe, aus denen einerseits die zu wägenden Objecte und andererseits die in Gebrauch genommenen Gewichte bestehen, die der Luftschwere erforderlich, wie sie grade zur Zeit der Wägung stattfand. Das jeweilige Gewicht der atmosphärischen Luft in einem Raume lässt sich bestimmen durch directes Abwiegen, dann aber auch mit grösserer oder geringerer Genauigkeit durch Berechnung aus den Angaben der die Zustände der Luft in Bezug auf Zusammensetzung, Temperatur und Druck anzeigenden Instrumente. Ein drittes Verfahren, welches die wenigsten Umstände machen und dabei die sichersten Resultate liefern dürfte, ist das von mir in Vorschlag gebrachte der indirecten Wägung der Luft mit Hilfe der von mir construirten und für das deutsche Reich patentirten Correctionsgewichte.

Meine, von mir so benannten Correctionsgewichte sind 2 Gewichte von gleicher absoluten Schwere, aber verschiedenen, in einheitlicher Beziehung zu einander stehenden Volumen *). Ist die Volumendifferenz gleich einem Liter und ihr Gewicht im luftleeren Raume je 200 g (die beim Patentamte eingereichte Zeichnung stellte solche als Beispiel dar), so wird nach dem archimedischen Princip im luft erfüllten Raume der grössere Körper genau so viel leichter erscheinen, als das Gewicht des von ihm mehr als von dem kleineren Körper aus der Stelle gedrängten Liter Luft beträgt. Die Gewichts Differenz ist zugleich das augenblickliche Luftgewicht, dessen Kenntniss zur Correction der Wägungsergebnisse eben erforderlich ist.

Eine Correction ist bei feinen Wägungen aber bekanntlich deshalb unerlässlich, wenn sie eine, der hohen Empfindlichkeit der zu wissenschaftlichen Untersuchungen benutzten analytischen Wagen entsprechende Genauigkeit haben sollen, weil die Wägungen allemal zum Zwecke der Massenbestimmung oder Massenvergleiche vorgenommen werden, die Wago aber nur den Druck bestimmen und vergleichen lässt, den ein Körper auf seine Unterlage ausübt und der durch den Auftrieb der Luft je nach der Dichte dieser und der Grösse der Körper mehr oder weniger aufgehoben wird. Bei Stoffen von demselben oder dem der angewandten Gewichte nahezu gleichem spec.

*) Patentanspruch.

Gewichte wird der Gewichtsverlust unberücksichtigt bleiben können, weil er zu jeder Zeit auf beiden Seiten der Wage derselbe sein wird. Bestimmt man aber z. B. unter Anwendung von Messinggewichten die Masse eines Kilogramm Wasser, so wird der Fehler, falls man den Luftauftrieb ausser Acht lässt, über 1 g betragen mit Schwankungen bis zu 50 mg in ungünstigen Fällen, welche ihre Ursache in dem wechselnden Gewicht der Luft haben. Letzteres lässt sich in jedem einzelnen Falle für den Moment der Wägung, aber wohl am bequemsten und zuverlässigsten durch meine Correctionsgewichte feststellen.

Der grössere Körper meiner (messingnen) Correctionsgewichte mit 1 l Volumendifferenz und 200 g Gewicht, welcher in Form eines umgekehrten, abgestumpften Kegels hohl anzufertigen und des wechselnden Luftdrucks wegen, wie überhaupt zu vergrösserter Widerstandsfähigkeit innerlich gehörig zu versteifen ist, und dessen Masse beziehentlich Höhe, oberem und unterem Durchmesser ich als 13,11 und 9 cm angenommen hatte, findet bequem auf meinen Wagen für 200 g Platz und lässt deren Empfindlichkeit — 0,000 001 der mittleren Belastung — eine Bestimmung des Luftgewichts bis auf Zehntel Milligramme zu. Den Instrumenten, die die Spannung, die Temperatur, den Feuchtigkeitsgehalt der Luft angeben, reihen sich meine Correctionsgewichte in Bezug auf das Gewicht der Luft an, und werden sie überall, wo die Kenntniss der Luftschwere notwendig ist, wie zur Correctur der Wägungsergebnisse die besten Dienste leisten.

Die Figur zeigt die Correctionsgewichte in $\frac{1}{2}$ Grösse, das hohle Gewicht zur Hälfte im Durchschnitt dargestellt. Sie sind von Messing, vergoldet, je 200 g schwer, Volumendifferenz = 1 l und haben die Form eines umgekehrten, abgestumpften Kegels, a ist der Hohlraum, welcher mit Blei und Aluminium angefüllt wird.

Alfred Theod. Heinr. Verbeck,
Mechaniker in Löbtau-Dresden.

3.

Zur Summirung der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Diese Summe ist der Coefficient von t^n in der Entwicklung von e^{et} nach Potenzen von t . Es ist:

$$\begin{aligned}
 e^{et} &= \sum_0^{\infty} \frac{(et)^n}{n!} = \sum_0^{\infty} \frac{e^n t^n}{n!} \\
 &= \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{n^m t^m}{n! m!} \\
 &= 1 + \frac{t}{1} \sum_0^{\infty} \frac{n}{n!} + \frac{t^2}{2!} \sum_0^{\infty} \frac{n^2}{n!} + \dots \frac{t^m}{m!} \sum_0^{\infty} \frac{n^m}{m!} + \dots
 \end{aligned}$$

Setzt man $y = e^{et}$, so ist $y_0 = e$ und

$$\frac{dy}{dt} = e^{et} e^t = ye^t$$

also

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = e.$$

Aus der vorstehenden Gleichung ergibt sich:

$$\frac{d^m y}{dt^m} = e^t \sum_0^{m-1} (m-1)_r \frac{d^r y}{dt^r}$$

also

$$\left(\frac{d^m y}{dt^m}\right)_0 = \sum_0^{m-1} (m-1)_r \left(\frac{d^r y}{dt^r}\right)_0.$$

Hieraus:

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)_0 = 2e$$

$$\left(\frac{d^3 y}{dt^3}\right)_0 = 5e$$

$$\left(\frac{d^4 y}{dt^4}\right)_0 = 15e$$

$$\left(\frac{d^5 y}{dt^5}\right)_0 = 52e$$

$$\left(\frac{d^6 y}{dt^6}\right)_0 = 203e$$

$$\left(\frac{d^7 y}{dt^7}\right)_0 = 877e$$

$$\left(\frac{d^8 y}{dt^8}\right)_0 = 4140e \text{ etc.}$$

Kiel, den 9. Decbr. 1877.

Ligowski.

4.

Eine partielle Differentialgleichung.

Ein leichtes Uebungsbeispiel für Integration bietet folgende partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(u) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$$

Dividirt man durch $\frac{\partial u}{\partial x}$, so kommt:

$$\frac{\partial}{\partial y} \log \frac{\partial u}{\partial x} = f(u) \frac{\partial u}{\partial y}$$

Dies integrirt giebt:

$$\log \frac{\partial u}{\partial x} = \int f(u) \partial u + \log \varphi'(x)$$

wo der letzte Term willkürliche Function von x ist. Hieraus erhält man:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x) e^{\int f(u) \partial u}$$

oder

$$e^{-\int f(u) \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x)$$

und nach neuer Integration:

$$\int \partial u \cdot e^{-\int f(u) \partial u} = \varphi(x) + \psi(y).$$

R. Hoppe.

Litterarischer Bericht

CCXLVII.

Methode und Principien.

Die Ausdehnungslehre von 1844 oder Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert von Hermann Grassmann. Zweite, im Text unveränderte Auflage. Mit 1 Tafel. Leipzig 1878. Otto Wigand. 301 S.

Der Verfasser will durch einige Einführungen zu einer einfachern, mehr harmonischen Gestaltung der Elemente der Mathematik und der genannte Zweige gelangt sein. Als Summe von Punkten betrachtet er ihren Schwerpunkt, als Producte von 2, 3, 4 Punkten bzw. die Verbindungsstrecke, die Dreiecksfläche, den Tetraederinhalt, als Producte von Linien und Ebenen deren Schnitte. Bei Vertauschung der Factoren müsse das Vorzeichen beider gewechselt werden. Der Winkel soll erst im 2. Teile vorkommen, der noch zu erwarten ist. Da das Buch in 1. Auflage bereits genügende Aufmerksamkeit und Würdigung erfahren hat, so möchte es überflüssig sein die Frage, ob es einen wirklichen Fortschritt enthalte, aufs neue zu beleuchten. Wenn jemand sich lieber mit Symbolen als mit eigentlichen Grössen und Gebilden beschäftigt, so müssen wir ihm das als Geschmackssache überlassen, jeden Versuch aber damit einen Einfluss auf den Elementarunterricht zu üben als verderblich bezeichnen.

H.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der Algebra für die oberen Klassen der Mittelschulen. Von Dr. F. J. Studnička, o. ö. Professor der Mathematik an der k. k. Universität zu Prag. Mit 11 Figuren in Holzschnitt. Prag 1878. Ed. Grégr. 212 S.

Das Lehrbuch ist für 3 Classen der Oberabteilung der Mittelschulen, von unten herauf wieder mit erster beginnend, bestimmt, und der Lehrstoff auf je 2 Semester verteilt. Der Verfasser entwickelt im Vorwort seine Ansicht, der gemäss er einer Anzahl Thematika eine veränderte Stellung im Lehrkursus gegeben habe. Den binomischen Satz will er in die Anfangsgründe der Potenzlehre aufgenommen wissen. Sollte man hiernach erwarten, dass er eine so leichtfassliche Methode gefunden habe, den Satz in voller Allgemeinheit für den betreffenden Standpunkt zum Verständniss zu bringen, so giebt uns die Ausführung Aufschluss nach ganz anderer Seite hin. Gleich im Anfang ist es auffällig, dass manche sehr allgemeine Begriffe ohne Erklärung als geläufig vorausgesetzt werden. Bald aber übersteigt die Hinwegsetzung über die pädagogischen Erfordernisse alles Mass. Operationen mit Summen- und Productzeichen werden unbedenklich wie in der Analysis vollzogen, Erklärung und Anleitung geht nicht voraus. Sollten die nötigen Vorkenntnisse in der Unterabteilung der Mittelschule erworben sein, so müssten die Schüler derselben auf Universitäten studirt haben. Bei einem so unbedachten Zuwerkegehen erklärt es sich freilich, dass auch der binomische Satz in den Elementen der Potenzlehre Platz finden konnte. Der Verfasser will dagegen die Lehre von den Kettenbrüchen von den Elementen fern halten, weil zu deren Bewältigung ein reiferes Urtheil nötig sei. Dabei ist aber nicht beachtet, dass die Theorie der Kettenbrüche kein vollendetes Ganze ist, von dessen Bewältigung schlechthin die Rede sein könnte. Sofern die Kettenbruchdarstellung gemeiner Brüche zur Ermittlung des gemeinsamen Factors von Zähler und Nenner dient, lässt sie sich mit der Lehre von den Brüchen sehr wol mit Nutzen verbinden und wird durch die leichte Anwendung verständlich. Um nicht durch sie das Pensum der Arithmetik beschweren zu müssen, geben manche Lehrbücher die Reduction der Brüche unvollständig, vielleicht aus gleichem Grunde die Addition der Brüche ganz mangelhaft. Dennoch will der Verfasser nicht bloss die Lehre von den Decimalbrüchen, was gewiss ganz berechtigt ist, sondern auch die von den gewöhnlichen Brüchen, ausschliesslich auf die Unterabteilung verweisen. Dann fragt man doch, ob er dabei jenen dürftigen Unterricht im Sinne hat, und ein Bedürfniss in der Oberabteilung darüber hinaus zu gehen nicht kennt. Ferner empfiehlt der Verfasser die Auf-

nahme der Lehre von den complexen Zahlen, die Anfänge der Determinantenlehre und des Gebrauchs von Symbolen. Die einzelnen Abtheilungen des Lehrbuchs behandeln die niederen, die höheren Rechnungsarten, die complexen Zahlen, die Logarithmen, die Verhältnisse und Proportionen nebst Benutzung in der national-ökonomischen Arithmetik, die Gleichungen 1. und 2. Grades, die arithmetischen und geometrischen Reihen ersten und n ten Grades, die Kettenbrüche, die Complexionen (Combinationsrechnung) und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Logarithmen sind nicht etwa bloss aus didaktischem Grunde von den Rechnungsarten getrennt, sondern bei den Inversionen geradezu vergessen, und es wird ausdrücklich die sich natürlich ergebende Zahl der Rechnungsarten auf 6 angegeben. Die geometrischen Reihen n ten Grades sind nach Analogie der arithmetischen erdacht ohne ersichtliche Anwendung. Von Anfang bis Ende findet sich keine Spur von methodischer Berücksichtigung des Fassungsvermögens der Schüler. Der Verfasser beabsichtigt mit der Herausgabe des gegenwärtigen Lehrbuchs überhaupt für neue Ideen in der Methode Bahn zu brechen und würde es seinem Zwecke entsprechend finden, wenn es den Anlass böte, dass recht viele Versuche die Methode zu bessern ans Licht träten. Obwol diese Absicht sehr anerkennenswert ist, so möchte doch mit dem Vorliegenden schwerlich ein Schritt zu weiterer Nachfolge getan sein. H.

Leitfaden der Arithmetik nebst Uebungsbeispielen. Von Adolf Sickenberger, Studienlehrer am k. Ludwigs-Gymnasium in München. Zweite Auflage. München 1878. Theodor Ackermann. 180 S.

Die 1. Auflage ist im 228. litterarischen Bericht S. 33. besprochen. In der zweiten ist als Vermehrung zu nennen, dass die Multiplication und Division der gemeinen Brüche ausführlicher behandelt, und das Princip der Mischungsrechnung auf Terminrechnung ausgedehnt ist. Ausserdem sind in den Aufgaben Fehler berichtigt, und in einigen unwichtigen Punkten Verbesserungsvorschläge berücksichtigt. Die Aufgaben sind dieselben geblieben. H.

Decimalbrüche nebst einigen Andeutungen über abgekürztes und praktisches Rechnen für Gymnasien, Realschulen, Seminarier und Elementarschulen. Von Dr. Eisenhuth. Halle 1878. Buchhandlung des Waisenhauses. 67 S.

Das Buch behandelt die Lehre von den Decimalbrüchen für den Standpunkt der untern Classen vollständig und mit Zuziehung aller Umstände, welche beim elementaren Rechnen zustatten kommen, mit

Ausführlichkeit, Sorgfalt und exactem, verständlichem Ausdruck. Unterscheidend aber ist, dass hier die Decimalbrüche, sowie in der Erklärung als auch in allen Herleitungen und Beweisen, aus den gemeinen Brüchen hervorgehen. Warum der Verfasser diesen beschwerlichen Weg gewählt hat, ist im Vorwort nicht ausgesprochen, so dass man nicht umhin kann zu vermuten, er habe die in den meisten neueren Lehrbüchern befolgte Methode, welche die Decimalbruchrechnung durch Ausdehnung des Decimalprinzips ohne alle Reflexion auf gemeine Brüche entwickelt, überhaupt nicht gekannt. Doch diese brauchte er kaum gekannt zu haben; die eigene Erfahrung beim Bearbeiten des Buchs musste ihm, wie man denken sollte, die einfachere Methode an die Hand geben; denn jeder der umständlichen Beweise lässt es in die Augen fallen, dass die Brüche im gewöhnlichen, allgemeinen Sinne darin ein überflüssiges Element und einzige Ursache der Umständlichkeit sind. Die hier gewählte Methode ist indes nicht bloss beschwerlich, sondern auch mit Nachteilen für den Erfolg verbunden. Auffallend ist schon, dass die Einführung der Nennerform ziemlich unmotivirt erscheint und ihr Grund wol vielen Anfängern kaum deutlich werden kann. Wichtiger aber ist es, dass die Decimalbruchrechnung sich so dem Schüler nicht in ihrer natürlichen Einfachheit darstellt, dass daher der Unterricht nicht dazu dienen kann ihr Eingang im Volke zu schaffen, wie es bei dem Reichs-Mass- und Münzsystem gewünscht werden muss. Dieser letztgenannte Gesichtspunkt hat andere Bearbeiter dazu bestimmt das Pensum der Decimalbrüche vor das der gemeinen Brüche zu setzen, woraus dann die Methode selbstverständlich folgte. Hiervon ist gewiss kein Grund wieder abzugehen. Möchten wir denn ein in diesem Sinne mit dem Gaben und dem Fleisse des Verfassers bearbeitetes Lehrbuch besitzen.

H.

Lehrbuch der ebenen Geometrie für Untergymnasien und verwandte Lehranstalten. Von Jos. Schram, Professor am Communal-, Real- und Obergymnasium in Mariahilf. Wien 1878. Alfred Hölder. 115 S.

Das hier Vorgetragene ist eine Anschauungslehre; in dieser Eigenschaft nimmt das Buch eine hervorragende Stelle ein. Vor allem muss die vollkommene Originalität der Bearbeitung anerkannt werden; sie lehnt sich an kein früheres Erzeugniss ähnlichen Inhalts an; alles ist selbstdurchdacht, die Methode mit eigner Erfindsamkeit dem Zwecke entsprechend frei gewählt. Besonders Wert erhält aber diese Eigenschaft durch den Tact und die Umsicht, welche sich in der Wahl des Lehrstoffs und in der Behandlungsweise kund giebt; der Lehrstoff bleibt bei reicher Entfaltung immer in den Grenzen eines vom Schüler

beherrschbaren Gebiets, und in der Behandlungsweise ist das Bedürfniss einer ihm leicht zugänglichen Begründung sorgfältig berücksichtigt. Hierzu kommt die Einfachheit und Genauigkeit des Ausdrucks, welche im Ganzen walten. Einige Ausstellungen mögen zum Schluss verspart werden; für jetzt sei Tadellosigkeit vorausgesetzt, indem wir mit Bezugnahme auf folgende Aeusserung des Verfassers im Vorwort auf die Frage eingehen, ob durch eine derartige, noch so vorzügliche Anschauungslehre der Zweck des mathematischen Elementarunterrichts erfüllt werden kann. Er sagt: „Auf die Zustimmung solcher Leser, welchen die Euklidische Methode für Unterrichtszwecke volle Befriedigung gewährt, werden die leitenden Ideen des Verfassers verzichten müssen, denn sie werden hier die jener Methode eigenthümlichen starren Formen der Demonstration, welche uns historisch überkommen, aber keineswegs mit dem Wesen der Geometrie notwendig verknüpft sind, schwer vermissen.“ Schon öfters in verschiedenen Zeiten ist die hier ausgesprochene Meinung zu Tage getreten, die Euklidische Methode würde nur darum festgehalten, weil man sich vom Ueberkommenen nicht losmachen könnte, ihre Mängel nicht in Betracht gezogen und sich nie darüber Rechenschaft gegeben hätte, ob ihre Eigenthümlichkeit dem Wesen der Geometrie entsprechend, notwendig für den Unterricht wäre. Jedesmal ward die Behauptung leichtfertig hingeworfen; auch der Verfasser des Gegenwärtigen denkt nicht daran sie zu begründen; es fällt ihm nicht ein, dass die Unaufmerksamkeit ebensogut auf seiner Seite liegen kann, und nach dem Grunde zu fragen, warum bis heute, wo die freieren methodischen Ideen hinreichend bekannt sind, und es ihnen an Einfluss nicht gefehlt hat, doch im ganzen die Euklidische Form noch bewahrt und cultivirt wird selbst von Solchen, die selbständig in der Reform der Methode vorgehen. Der Sinn des Gegensatzes, den der Verfasser macht, wird durch die Ausführung unzweifelhaft. Frühere Bearbeitungen, welche es an Begründung fehlen liessen, gaben noch der Deutung Raum, als ob es sich um deren grösseren oder geringeren Wert handelte. Diese will der Verfasser nicht beeinträchtigen; nur die Verkettung der Sätze nach ihrer Beweisfähigkeit ist die starre Form, die er als nicht notwendig bei Seite setzt. Durch die hier entfaltete Methode wird also der Schüler nicht bloss orientirt in jenem kleinen Gebiete elementarer Gebilde und in die Lage versetzt dieselben zu beobachten und ihre Eigenschaften zu studiren, sondern es gelangen auch, dass lässt sich annehmen, die im Lehrbuch berührten Sätze zu wirklicher Evidenz. Wird er aber, nachdem ihn die Kunst des Lehrers an aller Schwierigkeit des Beweissuchens vorbeigeführt und mit dem Einblick in die Werkstatt, nämlich eben jene Verkettung der Beweise, verschont hat, je in den Stand gesetzt werden die Leitung des Lehrers zu entbehren? Von Anfang bis Ende hat er nur gelernt alles Wissen durch Figurbetrach-

tung zu gewinnen, alles ist ihm sofort oder nach geringer Uebersetzung sicher erschienen. Hat er also keinen andern geometrischen Unterricht, so wird er nur überall ein gleiches tun wollen; die Fälle bieten sich bald genug, wo ihn die Figurbetrachtung irre leitet; alsdann aber fehlt ihm jedes Mittel sich Klarheit zu verschaffen, und er gelangt nie zu einem siegesgewissem Vertrauen zu seinem Verstande. Mit einem Worte, die logische Fähigkeit bleibt unentwickelt; diese wird nur durch Ueberwindung, nicht durch Vermeidung der Schwierigkeit erworben, und um sie zu entwickeln und im Bewusstsein zu erhalten, ist die logische Continuität unentbehrlich und darf nicht so sehr verdeckt werden, als es in der Anschauungslehre durch die Menge der Betrachtungen geschieht. Mit dem Vorstehenden wird nicht behauptet, dass die Anschauungslehre überhaupt für den geometrischen Unterricht ungeeignet sei, wol aber gezeigt, wie sie durchaus unzureichend ist dessen Zweck zu erfüllen. Nicht alle Bearbeiter, die von ihr Verwendung machen, haben sie so, wie der Verfasser erklärtermassen es tut, an die Stelle der Euklidischen Methode setzen wollen; vielmehr ist auch der Versuch gemacht, von ihr aus in die letztere einzulernen. In solchem und vielleicht manchem andern Sinne lässt sich ihre Aufstellung wol rechtfertigen. Das Lehrbuch behandelt nach einander die Gerade, die Kreislinie, den Winkel, die Parallelen, das Dreieck, Viereck, Vieleck, die Kreisfläche, die centrische Lage, centrische Gebilde, die symmetrische Lage, symm. Gebilde, die Projection, Eigenschaften geschlossener Figuren, die Flächengleichheit, Verwandlung und Teilung, Längenmessung, Flächenmessung, Proportionalität, die ähnliche Lage, die Congruenz, die Aehnlichkeit. Hierauf folgt eine Sammlung von Übungsaufgaben, eine Anweisung des geometrischen Bestecks und 2 alphabetische Verzeichnisse, der Fremdwörter, abgeleitet und verdeutscht, und der im Buche erklärten Ausdrücke. Man sieht, dass der gewöhnliche Lehrstoff vollständig einbegriffen ist. Nicht alles ist bewiesen, sogar einiges aus höheren Zweigen ohne Beweis angeführt. Bemerkenswert ist, dass z. B. bei den Congruenzsätzen die Beweise ersetzt werden durch die vorher gelösten entsprechenden Constructionsaufgaben. Im Anfang ist einiges, wiewol verschwindend wenig, selbst vom Gesichtspunkt der Anschauungslehre zu tadeln. Was über entgegengesetzte, sich aufhebende Bewegungen gesagt ist, ist zum Verständniss unzulänglich, sogar confus. Erst bedeutet „Strecke“ absolut den Abstand, mithin ist AB und BA nur eine und dieselbe Strecke; bald darauf heissen dieselben entgegengesetzte Strecken, die sich aufheben, und unmittelbar nachher wieder wird bei Addition der Strecken keine Rücksicht hierauf genommen. Die Erörterung des Gegenstands war unzweifelhaft notwendig; dann aber musste sie auch zur Klarheit gefördert werden; einerseits durfte keine Zweideutigkeit bestehen; die Strecke musste

gleich anfangs und durchweg im Sinne einseitiger Richtung erklärt und gebraucht werden; andererseits durfte der Satz nicht fehlen, dass $AB + BC + CD + DE$ bei jeder Lage der Punkte $= AE$ ist, wenn es sich um Addition von Strecken handelt. Die Sache wiederholt sich bei andern Gebilden und wird da ebenso dürftig behandelt. Ferner ist es eine unüberlegte, Collision schaffende Einführung, dass das Wort „Strahl“ die unbegrenzte Gerade mit 2 Richtungen bezeichnen soll, was weder mit dem sonstigen Gebrauch noch mit den vulgären Vorstellungen stimmt. Der Strahl (radius, rayon) geht immer von einem Punkte (Lichtquelle) aus. Auch ist kein Bedürfniss für den Namen in jenem Sinne. „Gerade“ bezeichnet eine Eigenschaft der Linie, die mit den Grenzen nichts zu tun hat. Eine Gerade schlechthin ist daher immer eine unbegrenzte. Der zweite Name für dieselbe Sache ist vom Uebel. In manchen Punkten ist die Terminologie hier correcter als in vielen Lehrbüchern. „Kreis“ statt „Kreisfläche“ zu sagen, lässt jedoch der Verfasser zu, weil der Sinn aus dem Zusammenhang erhelle. Ueberlegt man aber, dass nach richtigen Benennungsgrundsätzen nur die Linie „Kreis“ heissen kann, dass dies auch mit dem vulgären Sinne stimmt, und dass die gesammte Kreislehre mit Ausnahme der Flächenmessung bloss von der Linie handelt, so muss es als Torheit erscheinen, um der Abkürzung in den wenigen Fällen willen den Doppelsinn des kurzen Wortes überall hindurchzuschleppen. An dem Misbrauch ist hier Euklid schuld, der ja für das Gegenwärtige keine Autorität ist.

H.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie für den Schulgebrauch. Von Johann Karl Becker, Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Wertheim am Main. Erstes Buch: Das Pensum der Tertia und Untersecunda. Planimetrie, erste Stufe. Mit 90 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1877. Weidmann. 148 S.

Dieses Lehrbuch bildet den 2. Teil des Gesamtwerks „Lehrbuch der Elementar-Mathematik“ dessen 1. Teil, enthaltend die Arithmetik, im 244. litt. Ber. S. 41. besprochen worden ist. In noch näherer Beziehung aber steht es zu der Schrift: „Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage etc.“, worüber ebenda S. 40. Die in jener entwickelten und durchgeführten Grundsätze sind jetzt in der Bearbeitung eines wirklichen Schulbuchs in Anwendung gebracht. Hier wie dort wird der unmittelbaren Evidenz vor der durch Beweis gewonnenen der Vorzug gegeben, doch lässt sich der Verfasser zu keiner Einseitigkeit verleiten. Charakteristisch sind in dieser Beziehung zwei Aeusserungen (nicht im Vorwort, sondern an die Schüler gerichtet). Erstlich, viele Sätze, die des Beweises nicht bedürften, fänden sich gleichwol unter den bewiesenen Lehrsätzen, weil es an

sich von Wichtigkeit sei, die Sätze als Folgen von einander zu verstehen. Demgemäss zeigt auch die ganze Bearbeitung, dass das Erlernen der mathematischen Logik als ein wesentliches Ziel des Unterrichts betrachtet worden ist. Dass dies bei der genannten Bevorzugung erkannt ist, zeugt von grosser Umsicht. Zweitens wird den Schülern vorgehalten, dass man bei oberflächlicher Betrachtung oft etwas als selbstverständlich ansieht, was nicht einmal allgemein wahr ist. Aus diesem Grunde sei es „üblich“ die Axiome auf die kleinst mögliche Zahl zu beschränken. Factisch hat auch der Verfasser es ratsam gefunden, ein gleiches zu tun. Was ist nun mit „oberflächlicher Betrachtung“ gemeint? Soll es eine accidentelle Schwäche bezeichnen, die bei gehöriger Achtsamkeit zu vermeiden wäre? Wie der Verfasser wiederholt an die Grenzen des philosophischen Gebiets streift, aber stets zur rechten Zeit innehält, wo ein Mehreres der Einsicht nicht förderlich sein würde, so auch hier, doch geschieht es diesmal an einer sehr schlüpfrigen Stelle. In der Tat wird durch den leicht hingeworfenen Tadel seine Meinung scheinbar gerettet, eigentlich sei die Beschränkung der Axiomenzahl ganz unnötig. Ist denn aber je eine Betrachtung von Seiten der Schüler, ist diejenige, zu der das Lehrbuch anleitet, nicht oberflächlich? Das allein macht es ja möglich, Anfänger von der Richtigkeit der Axiome zu überzeugen, dass sie schon bei oberflächlicher Betrachtung einleuchten, eine tiefe Betrachtung darf niemand voraussetzen. Das Axiom III. ist ein schlagender Beleg dafür: „Durch jeden Punkt einer Ebene geht zu jeder nicht durch ihn gehenden Geraden in derselben immer eine und nur eine Parallele“. Dieser Satz wird vielleicht bei sehr oberflächlicher, nicht eben achtsamer Betrachtung selbstverständlich scheinen. Dabei ist er erfahrungsmässig allgemein wahr, sogar apodiktisch richtig, letzteres aber nur auf Grund von Eigenschaften der Ebene, die nicht auf der Hand liegen. Es ist für den Schüler kein Grund ersichtlich, warum die zweite Gerade bei Drehung von der Parallele aus sofort auf einer von beiden Seiten die erste schneiden müsste. Der Verfasser baut also selbst auf eine nicht nur oberflächliche, sondern auch unachtsame Betrachtung, wenn er dem Satze unmittelbare Evidenz zuschreibt. Sein Ausspruch, von dem wir ausgingen, hat demnach eine durchgängige, nicht auf Fälle von momentanem Lapsus beschränkte Gültigkeit. Nicht, wenn einmal die Betrachtung oberflächlich ist, sondern, weil sie bei unmittelbarem Einleuchten stets nur oberflächlich sein kann, ist man der Gefahr ausgesetzt für selbstverständlich zu halten, was nicht einmal allgemein wahr ist. Die unmittelbare Evidenz der Axiome ist nichts als ungeprüfte Meinung, mithin eine ganz falsche Rechtfertigung für sie. Diesen Umstand hat der Verfasser in seiner überall bewiesenen und höchst woltnenden Offenheit verraten, aber sehr geschickt wieder verhüllt. Die wirkliche

Rechtfertigung der Axiome ist nicht schwer zu finden, doch brauchen wir darauf nicht einzugehen, weil der Verfasser seiner nicht haltbaren Ansicht in der Bearbeitung keine Folge gegeben hat. Der Vortrag charakterisirt sich durch eine ungewöhnliche Ausführlichkeit; doch steht darin jedes Wort an seiner Stelle, und wird jedes Thema in einer Weise behandelt, die keine Frage übrig lässt. Die Hauptabschnitte sind: Einleitung und Grundbegriffe, ebene Figuren aus 2 und 3 Geraden, Vierecke und Vielecke, Vergleichung der Vielecke nach Fläche und Umfang, metrische Relationen zwischen Strecken, Aehnlichkeit der Dreiecke, Berechnung des Kreises. H.

Geometrische Constructions-Aufgaben. Herausgegeben von Dr. H. Lieber, Oberlehrer an der Friedrich Wilhelmsschule (Realschule 1ter Ordnung) in Stettin, und F. von Lühmann, Oberlehrer am Progymnasium in Gartz a. O. Vierte Auflage. Mit einer Figurentafel. Berlin 1878. Leonhard Simion. 185 S.

Die Abschnitte des Buchs sind folgende: Dreiecks- und Vierecks-Constructions-Aufgaben, vermischte Aufgaben, Kreis-Aufgaben, Verwandlungs- und Teilungs-Aufgaben, Aufgaben welche durch algebraische Analysis zu lösen sind — und 3 Anhänge: Aufgaben für Coordinatenmethode, Aufgaben zur Einübung des goldenen Schnitts, geometrische Oerter. Die Sammlung ist ungemein reichhaltig; es möchte darin wol keine bis jetzt entdeckte Art von Interesse übergangen sein. Manche Arten sind überhaupt alle Fälle erschöpfend, und dann in grösst möglicher Abkürzung zusammengestellt. Zum Teil sind die blossen Data in Zeichen aufgeführt, zum Teil Anleitungen und Bemerkungen, sei es gemeinsam für eine Art oder auch für die einzelne Aufgabe, beigefügt. Die successiven Auflagen unterscheiden sich wenig: von der dritten an ist der Anhang über Oerter hinzugekommen, in der vierten sind statt der meisten frühern Auflösungen Analysen gegeben. Die Figuren sind mit gutem Grunde zum grössten Teil den Schülern zu zeichnen überlassen. H.

Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes. Zum Gebrauche bei Vorlesungen und zum Selbststudium. Von C. Preddiger, Professor an der Königl. Bergakademie zu Clausthal. Mit 26 lithographirten Tafeln. Clausthal 1878. C. A. Loewe. 355 S.

Das Buch ist sichtlich mit Fleiss bearbeitet und zeugt von einem genügenden Sachverständniss; doch lässt sich ein festes Ziel, ein bestimmender Gedanke, ein durchgehender Charakter darin nicht wol erkennen. Da es hauptsächlich für Techniker bestimmt ist, so erklärt

sich wahrscheinlich die besondere Wahl des Lehrgangs in allen einzelnen Punkten durch des Verfassers Erfahrungen und mag darin ihre Rechtfertigung finden. Es setzt beim Leser den Willen voraus, den Gegenstand gründlich zu studiren, nicht aber diejenige allgemeine Auffassung der Aufgabe der Geometrie zu gewinnen, welche die wissenschaftliche Analysis fordert. Es ist dies eine Beschränkung, die sich in den Anfangsgründen kund giebt und durch keine Fortsetzung des Studiums über die beobachteten Grenzen hinaus würde gehoben werden können. Die Grenzen des Lehrstoffs lassen sich einigermassen aus den Inhaltstiteln entnehmen: Coordinatensysteme, Gleichungen des Punkts, der geraden Linie und der Ebene, Determinanten, Projectionen, Aufgaben über die gerade Linie und die Ebene, Transformationen der Coordinaten, geometrische Oerter, Flächen der 2. Ordnung, im allgemeinen, specielle Betrachtungen über sie, ihre Berührungsebenen, Normalen, Normalebenen, Polarebenen und Kreisschnitte, Classification und Transformation numerischer Gleichungen, Erzeugung der Flächen durch die Bewegung einer Linie. Differential- und Integralrechnung soll nicht ausgeschlossen sein, findet aber natürlich kaum nennenswerte Anwendung. H.

Vermischte Schriften, Zeitschriften.

Nouvelle Correspondance Mathématique, rédigée par Eugène Catalan, ancien élève de l'École Polytechnique, Docteur ès sciences, Professeur à l'université de Liège; avec la collaboration de MM. Mansion, Laisant, Brocard, Neuberg et Édouard Lucas. Tome IV. Liège 1878. E. Decq.

Der Inhalt der ersten Hälfte des Bandes an Abhandlungen ist folgender.

E. Lucas: Ueber die Theorie der einfach periodischen numerischen Functionen. (Fortsetzung.)

E. Catalan: Ueber das Problem der Parteien.

E. Dubois: Von einigen Eigenschaften der Ellipsenbogen.

H. Van Aubel: Note betreffend die Mittelpunkte der über den Seiten eines beliebigen Vielecks construirten Quadrate.

H. Brocard: Noten über verschiedene Artikel der N. C. (Fortsetzung.)

P. Mansion: Ueber das Fermat'sche Theorem. (Bemerkung des Redact.)

- C. Le Paige: Ueber eine Transformation von Determinanten.
 G. de Longchamps: Ueber die Functionen U_n, V_n von E. Lucas.
 E. Catalan: Sätze von Smith und Mansion.
 E. Dewulf: Note über die Frage 173. (Betreffend ein Dreieck aus gleichseitig-hyperbolischen oder parabolischen Bogen.)
 J. Neuberg: Einige Eigenschaften des Dreiecks.
 E. Catalan: Ueber die Methode der Isoperimeter.
 H. Brocard: Elementäre Bemerkungen über das Pecl'sche Problem.
 E. Lucas: Ueber ein Grundprincip der Geometrie und Trigonometrie.
 C. Le Paige: Ueber einen Satz von Mansion.
 F. Proth: Eigenschaft der Zahlen von der Form $6x+1$.
 C. de Polignac: Arithmetischer Satz.

H.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel IV. Amsterdam 1878.
 Weytingh en Brave.

Der Inhalt ist folgender.

P. M. Heringa: Betrachtungen über die Theorie der Capillar-Erscheinungen.

H. Onnen: Bemerkungen betreffend die wesentlichen Gleichungen der ebenen Curven.

N. L. A. W. Gravelaar: Eine besondere Gleichung.

J. D. C. M. de Roos: Einiges über gekoppelte Krückenbewegung (Bewegung verbundener Stangen).

G. J. Michaëlis: Bemerkungen über die Theorien der elektrodynamischen Erscheinungen von Weber, Riemann und Clausius.

Kleinere Mittheilungen.

W. Mantel: Beantwortung der Preisfrage N. 12. über die Teilbarkeit durch eine Primzahl und die Gliederzahl der Periode.

G. A. Oskamp: Beantwortung der Preisfrage Nr. 3. Bewegung einer an einem aufgerollten Faden aufgehängten Kugel.

G. A. Oskamp: Beantwortung der Preisfrage Nr. 12.

D. Bierens de Haan: Einiges über die „Théorie des fonctions de variables imaginaires par M. Maximilien Marie“. (Fortsetzung, Schluss.)

T. J. Stieltjes Jr: Eins und das andre über das Integral
 $\int_0^1 t \Gamma(x+u) \partial u.$

P. H. Schoute: Die Erzeugung von Curven mittelst projectivischer Curvenbündel.

C. L. Landré: Ueber Polyeder.

F. J. van den Berg: Ueber die angenäherte Rectification eines Kreisbogens.

H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXLII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte, die, d. Physik im J. 1873. 29. J. Red. v. B. Schwalbe. 2. Abth. Berlin, G. Reimer. 13 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik, hrsg. v. C. Ohrtmann, F. Müller, A. Wangerin. 8. Bd. J. 1876. 1. Hft. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Reis, F., das Telephon u. sein Aufrufapparat nach seiner histor. Entwickelg. u. seiner pract. Anwendg. Mainz, von Zabern. 1 Mk.

Rothlauf, B., d. Mathematik zu Platon's Zeiten u. seine Beziehungen zu ihr, nach Platon's eigenen Werken u. d. Zeugnsn. älterer Schriftsteller. Jena, Deistung. 1 Mk. 60 Pf.

Schlegel, V., Hermann Grassmann. Leipzig, Brockhaus. 2 Mk.

Terrier, L., Galilei. Basel, Schweighauser. 1 Mk. 20 Pf.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Adam, W., arithmet. u. algebraisches Uebungsbuch m. ausgeführten Musterbeisp., 2000 Aufgaben enth. Neuruppin, Petrenz. 1 Mk. 60 Pf.

Baltzer, R., d. Elemente d. Mathematik. 2. Bd. 5. Aufl. Leipzig, Hirzel. 6 Mk.

Günther, S., Grundlehren d. mathemat. Geographie u. element. Astronomie. München, Th. Ackermann. 1 Mk. 80 Pf.

Jüdt, C., Aufgaben aus d. Stereometrie u. Trigonometrie. 2. Aufl. Ansbach, Seybold. 60 Pf.

Martus, H. C. E., mathemat. Aufgaben, z. Gebrauche in d. obersten Klassen höherer Lehranst. 1. Thl. Aufgaben. 4. Aufl. Leipzig, Koch. 3 Mk. 60 Pf.

Mehler, F. G., Hauptsätze d. Elementar-Mathematik z. Gebr. an Gymn. u. Realsch. 9. Aufl. Berlin, G. Reimer. 1 Mk. 50 Pf.

Melde, F., bildl. Darstellgn. zur Erläuterg. physikal. Prinzipien beim Vortrage d. Experimental-Physik. Abth.: Strahlenbündel, Reflexion des Lichtes. Mit Atlas. Fol. Cassel, Fischer. 20 Mk.; m. aneinandergeklebten Tafeln 28 Mk.; auf Leinw. m. Rollen 45 Mk.

Meyerhofer, R., mathemat.-techn. Lehrbuch. 2. Thl. Geometrie. 8. Lfg. Strassburg, Schneider. 75 Pf.

Schlegel, V., Lehrb. d. elementaren Mathematik. 1. Thl. Arithmetik u. Combinatorik. Wolfenbüttel, Zwissler. 2 Mk. 40 Pf.

Schumacher, das metrische Mass u. Gewicht u. seine Vergleichung. Die Decimalrechng. u. die Elemente der Geometrie, Stereometrie u. Physik. Frauenfeld, Huber. 60 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Gloser, M., Lehrb. d. Arithmetik f. d. 1. u. 2. Classe d. österreich. Mittelschulen. Wien, Pichler & S. 1 Mk. 60 Pf.

Noordmann, M.; üb. d. Abel'sche Integral 1. Gattg.

$$w_1 \equiv \int \frac{dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2) \dots (z-a_6)}}$$

u. d. dems. entsprch. Abbildungs-Problemen. Jena, Neuenhahn. 1 Mk. 20 Pf.

Puchta, A., e. Determinantensatz u. seine Umkehrung. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Geometrie.

Falcke, A., Leitfaden d. Geometrie. 5. Aufl. Potsdam, Rentel. 50 Pf.

Fiedler, R., die Raumlehre in systematisch-populärer Darstellung. Berlin, Besser. 80 Pf.

Graf, J. H., Beiträge z. Theorie der Riemann'schen Fläche. Zürich, Orell, Füssli & Co. 1 Mk. 50 Pf.

Güntner, C., Lehrb. d. darstell. Geometrie f. Realschulen u. z. Selbstunterricht. 2. Aufl. Wien, Graeser. 3 Mk. 20 Pf.

Handel, O., d. räumliche Analogon e. Steiner'schen Problems d. Ebene. Berlin, Mayer & M. 1 Mk. 20 Pf.

Igel, B., üb. d. Orthogonalen u. einige ihnen verwandte Substitutionen. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Krause, R., üb. e. Gebilde d. analyt. Geometrie d. Raumes, welches d. Connexe zweiter Ordnung u. erster Classe entspricht. Jena, Deistung. 60 Pf.

Simon, M., die Kegelschnitte behandelt f. d. Repetition in der Gymnasial-Prima. 1. Abth. Die Parabel. Berlin, Calvary & Co. 80 Pf.

Weyr, E., Bestimmg. d. Flächen, deren beliebige Theile aus zwei festen Punkten durch Kegel projectirt werden, deren Oeffnungen in gegebenen Verhältnissen stehen. Wien, Gerold's S. 20 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Leitich, A., Elemente d. Perspective in e. f. österreich. Bürgerschulen berechneten Lehrgänge. Wien, Hölder. 2 Mk. 40 Pf.

Mildenberger, W., 144 geometr. Zeichnungen. 2. Aufl. Rheydt, Langwiesche. In Mappe 4 Mk.

Schell, A., das Stand-Aneroid-Barometer (System Arzberger & Starke). Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Schoop, U., d. Grundsätze d. Perspective im Dienste d. Zeichnens nach d. Natur. Frauenfeld, Huber. 2 Mk.

Praktische Mechanik.

Hoyer, E., Lehrbuch d. mechanischen Technologie. Schluss-Lfg. Wiesbaden, Kreidel. 12 Mk.; cplt. 20 Mk.

Kosak, G., Grundriss d. mechan. Technologie. Wien, Lehmann & W. 4 Mk. 50 Pf.

Optik.

Exner, K., üb. d. Fraunhofer'schen Ringe, die Quetelet'schen Streifen u. verwandte Erscheinungen. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 40 Pf.

Lippich, F., üb. Brechung u. Reflexion unendlich dünner Strahlensysteme an Kugelflächen. 4. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 60 Pf.

Wolter, C., 64 Farbentafeln zu: Kleine Farbenlehre f. Schule u. Haus. Ludwigslust, Hinstorff. 5 Mk.

Astronomie und Meteorologie.

Jahrbuch, Berl. astronom., f. 1880 m. Ephemeriden der Planeten (1) — (172) f. 1878. Hrsg. v. W. Förster u. F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Herz, F., d. Bahnen d. Kometen u. d. Monde d. Mars. Darmstadt, Schlapp. 2 Mk.

Lamont, J. v., meteorolog. u. magnet. Beobachtgn. d. k. Sternwarte bei München. J. 1878. München, Franz. 1 Mk.

Littrow, J. J. v., d. Wunder d. Himmels. 6. Aufl. 30. Lfg. Berlin, Hempel. 50 Pf.

Nautik.

Jahrbuch, kleines nautisches f. d. J. 1879. Bremerhaven, v. Vangerow. 60 Pf.

Physik.

Beetz, W. v., Grundzüge der Electricitätslehre. Stuttgart, Meyer & Z. 3 Mk. 60 Pf.

Dorner, H., Leitfaden d. Physik. 2. Aufl. Hamburg, Meissner. 1 Mk. 20 Pf.

Hofmeister, R. H., Leitfaden d. Physik. 3. Aufl. Zürich, Orell, Füssli & Co. 4 Mk.

Krebs, G., Lehrb. d. Physik u. Mechanik f. Real- u. höhere Bürgerschulen, Gewerbeschulen u. Seminarien. 3. Aufl. Wiesbaden, Bergmann. 3 Mk. 60 Pf.; geb. 4 Mk.

Maxwell, J. C., Theorie d. Wärme. Uebers. v. A. Neesen. 2. (Schluss-) Lfg. Braunschweig, Vieweg & S. 3 Mk. 20 Pf.

Müller-Pouillet's Lehrbuch d. Physik u. Meteorologie. 8. Aufl. Bearb. v. L. Pfaundler. 2. Bd. 1. Abth. Ebd. 4 Mk.

Müller, J., die Schule der Physik. 2. Aufl. Ebd. 2 Mk. 40 Pf.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen d. mathemat.-phys. Classe d. kgl. sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften. 11. Bd. Leipzig, Hirzel. 21 Mk.

Berichte üb. d. Verhandlgn. d. königl. sächs. Gesellschaft d. Wissensch. zu Leipzig. Mathem.-phys. Classe. 1877. II. Ebd. 1 Mk.

Journal f. d. reine u. angew. Mathematik. Hrsg. v. C. W. Borchardt. 85. Bd. (4 Hfte.). 1. Hft. Berlin, G. Reimer. pcplt. 12 Mk.

Sitzungsberichte d. math.-physikal. Classe d. kgl. bayer. Akademie d. Wiss. zu München. 1877. 3. Hft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

— d. kais. Akademie d. Wiss. Math.-naturw. Classe. J. 1877. 1. Abth. 5. Hft. Wien, Gerold's S. 6 Mk.

— dasselbe. J. 1877. 1. Abth. 6. u. 7. Hft. Ebd. 7 Mk. 40 Pf.

— dasselbe. 2. Abth. 7. Hft. Ebd. 3 Mk.

— dasselbe. 3. Abth. 6. u. 7. Hft. Ebd. 4 Mk.

— dasselbe. Register VIII zu den Bänden 65 — 75. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

Fig. 7.

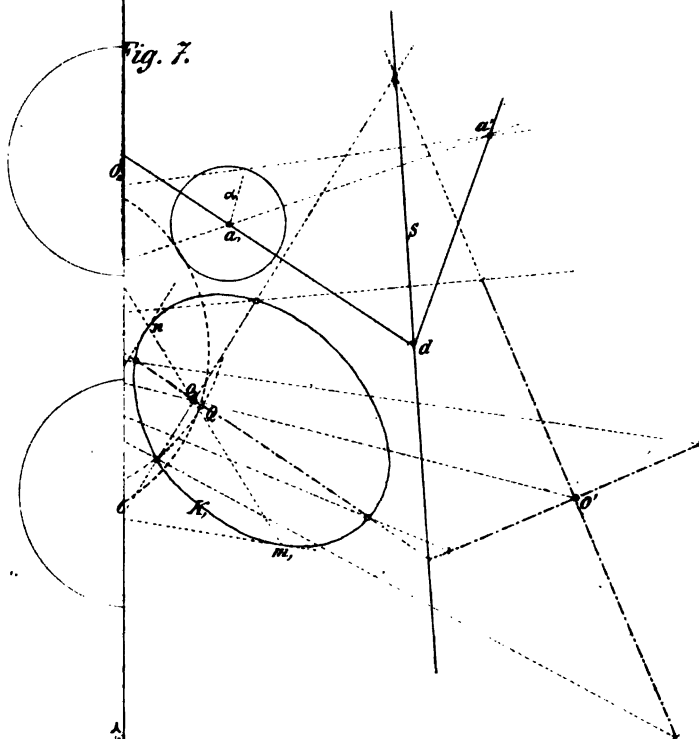
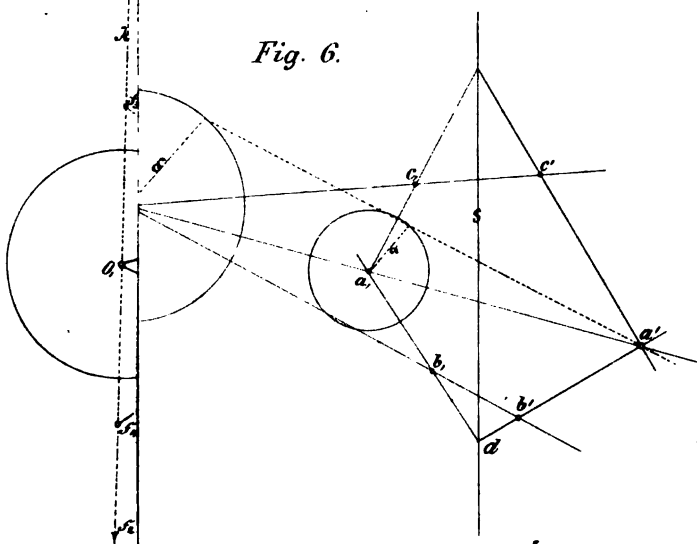
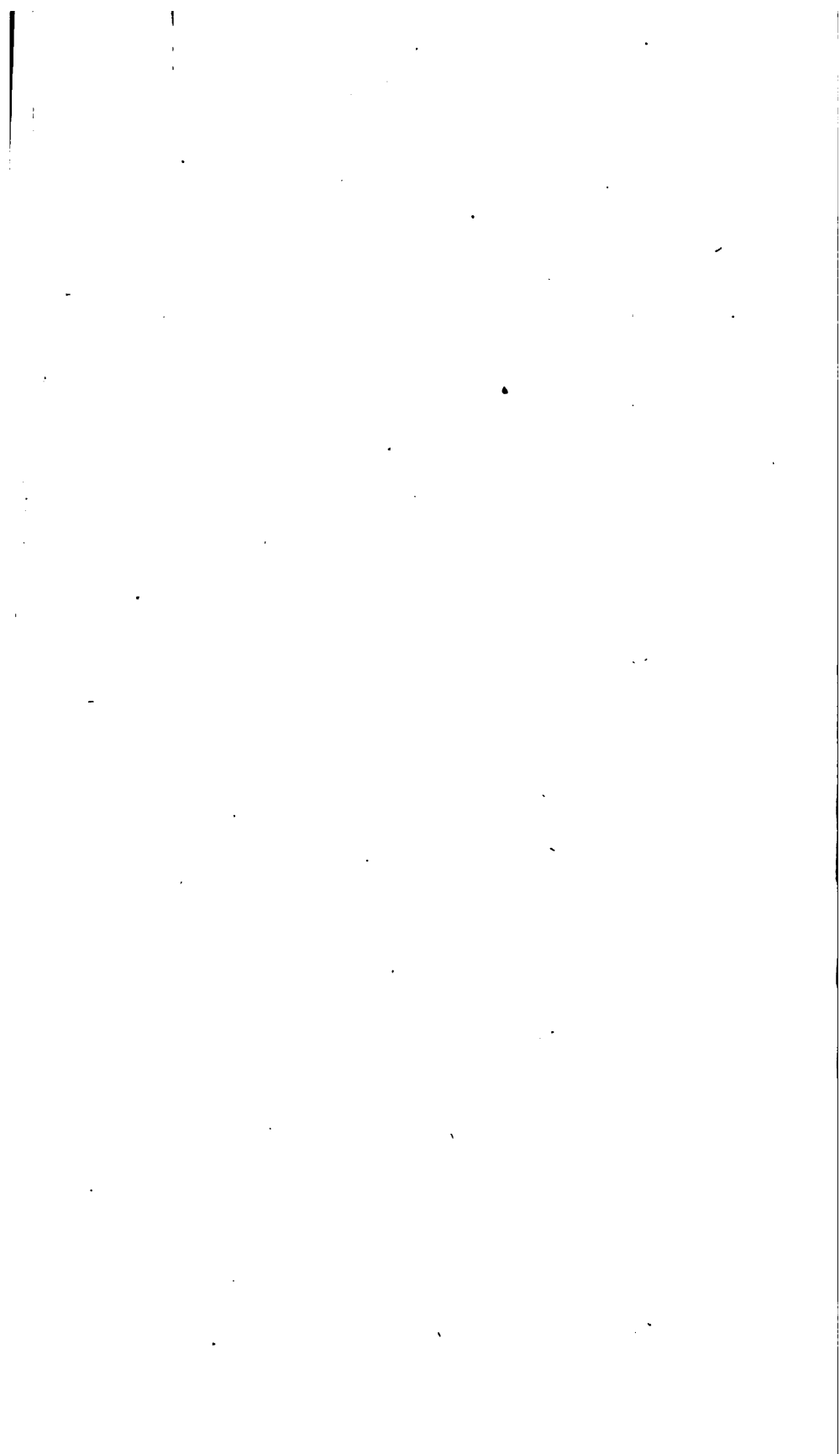
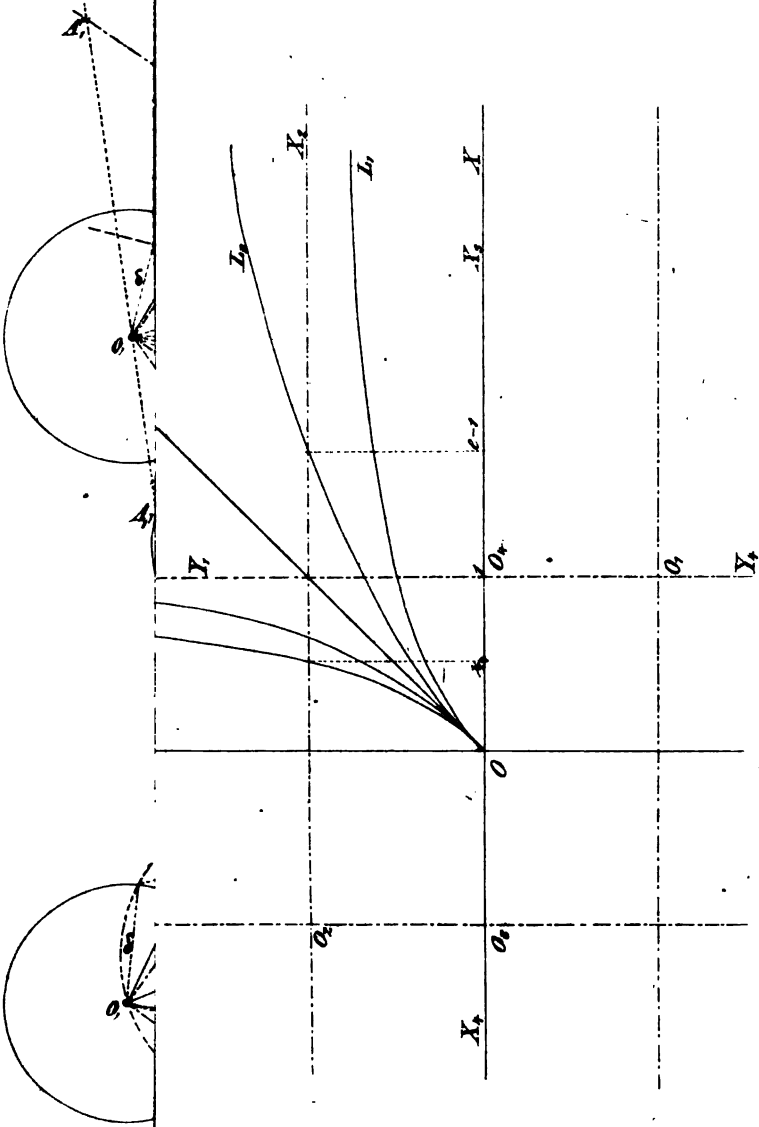


Fig. 6.



jection aus der cotirten Orthogonalprojection.





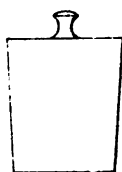
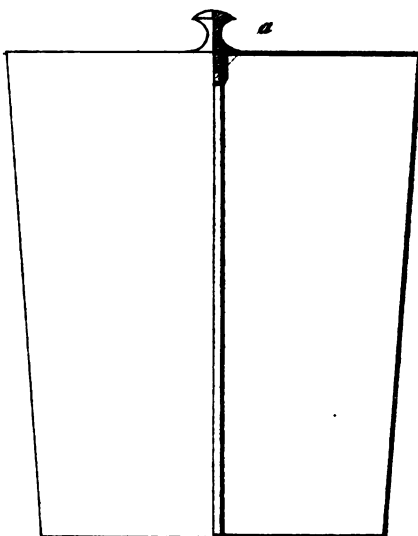
Formalische Bedeutung von Geldsummen.

XV. *Cerber*

Brunert Arch

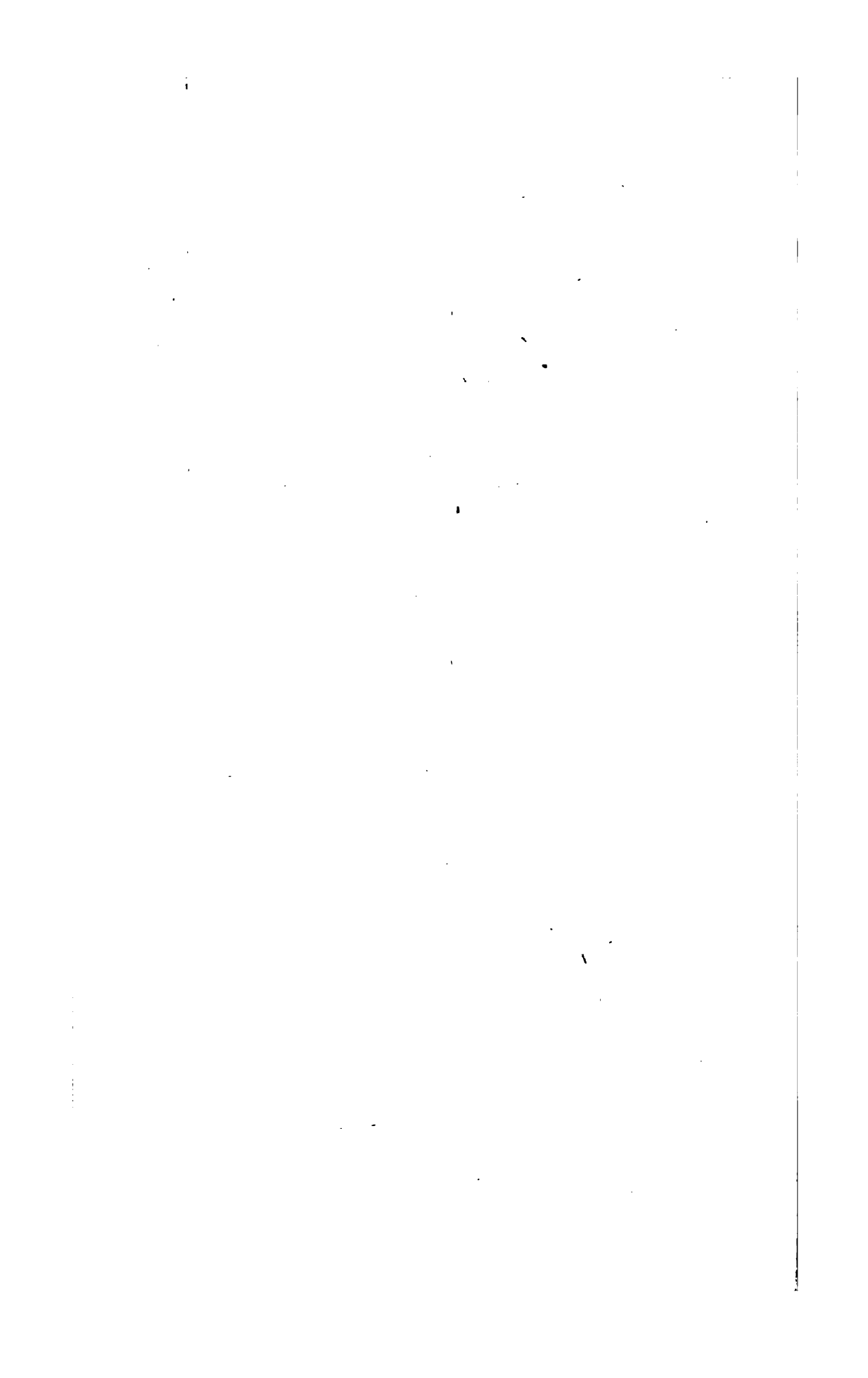
Steindruckerei von F. W. Kunike, Greifsw.

Fig. 1.



XIII. Verbeek: Corrections-Gewichte.

XXII.



Im Verlage der **Grau'schen Buchhandlung in Bayreuth** ist, im Gebrauche an höheren Lehranstalten, erschienen und in allen Buchhandlungen zu haben:

Die wichtigsten Sätze und Aufgaben der **Planimetrie** zusammengestellt von Prof. **Fr. Hofmann**. Mit 182 Figuren. gr. 8°. cart. 1 Mk. 50 Pf.

Zusammenstellung der wichtigsten Figuren aus dem Gebiete des mathematischen Unterrichts von Prof. **Fr. Hofmann**. Mit 436 Figuren. gr. 8°. cart. 2 Mk.

Aufgaben aus der niederen **Arithmetik**. Bearbeitet von Prof. **Fr. Hofmann**. 3. Aufl. gr. 8°. br. 1 Mk. 20 Pf.

Im Verlage von **L. Brill in Darmstadt** sind soeben erschienen:

Die Determinanten

nebst Anwendung auf die Lösung algebr. u. analyt.-geometr. Aufgaben; elem. beh. v. Prof. Dr. **H. Dölp**.

In zweiter Auflage bearbeitet von **W. Soldan**, Realschuldirektor Giessen. Preis 2 Mark.

In meinem Verlage erschienen soeben:

Martus, H. C. E.,

Professor an der Königsstädtischen Realschule in Berlin,

Mathematische Aufgaben

zum Gebrauche

in den

obersten Classen höherer Lehranstalten.

Aus den bei

Abiturienten-Prüfungen

an preussischen Gymnasien und Realschulen gestellten Aufgaben ausgewählt und

mit Hinzufügung der Resultate (II. Theil)

zu einem Übungsbuche vereint.

Erster Theil: **Aufgaben**. Geh. Preis 3 Mk. 60 Pf.

Vierte Auflage.

Freiexemplare behufs Einführung stehen gern zu Diensten.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.

In meinem Verlage ist heute erschienen:

Handbuch
der
Kugelfunctionen,
Theorie und Anwendungen,

von
Dr. E. Heine,
ordentlichem Professor der Mathematik an der vereinigten
Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg.

Erster Band.
Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage.
Preis: 8 Mark.

Berlin, den 20. Juni 1878.

G. Reimer.

I N H A L T.

	<i>Seite.</i>
XIV. Einleitung in die Theorie der Substitutionen und ihre Anwendungen. Von Herrn Dr. E. Netto in Berlin	225
XV. Ableitung der Centralprojection aus einer cotirten Orthogonalprojection. Von Emanuel Czuber in Prag	259
XVI. Vergleichung zweier Annahmen über die moralische Bedeutung von Geldsummen. Von Emanuel Czuber	267
XVII. Propriétés relatives des polyèdres réguliers, qui sont conjugués entre eux. Par Georges Dostor	285
XVIII. Nouvelle Méthode pour déterminer les foyers des Courbes du second degré. Par Georges Dostor	289
XIX. Bewegung eines am Faden hangenden Stabes. Von R. Hoppe	296
XX. Die geschlossene Form der periodischen Kettenbrüche. Von Herrn K. E. Hoffmann, Gymnasiallehrer in Zweibrücken .	310
XXI. Sechs Punkte eines Kegelschnittes. Von Herrn August Scholtz, Professor in Buda-Pest	317
XXII. Aufgabe über Construction eines Kegelschnittes. Von Herrn Gustav Mamke in Leipzig	325
XXIII. Miscellen.	
1. Beitrag zur Trigonometrie. Von K. Zahradnik . . .	330
2. Correctionsgewichte. Von A. Vorbeek	333
3. Zur Summirung einer Reihe. Von Ligowski	334
4. Eine partielle Differentialgleichung. Von R. Hoppe .	336

NOV 21 1878

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren
Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.



Zweiundsechzigster Teil. Viertes Heft.

(Mit 1 lithographirten Tafel.)

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1878.

Verlag von **Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig.**
(Zu beziehen durch jede Buchhandlung.)

Fünfstellige
logarithmische und trigonometrische Tafeln.

Herausgegeben von

Dr. O. Schlömilch, Königl. Sächs. Geheime Hofrath und Professor etc.

Galvanoplastische Stereotypie. **Wohlfelle Schulausgabe.**

Sechste Auflage. 8. geh. Preis 1 Mark.

Soeben erschienen

Neue Auflagen

von **Dr. Chr. G. Deter's** mathematischen
Unterrichtsbüchern:

Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra.

Neue veränderte Aufl. Geh. 1 Mk. 60 Pf.

Planimetriekompndium für Quarta, Tertia und Sekunda. Neue

durchgesehene Ausgabe. Geh. à 75 Pf.

Trigonometriekompndium. Neue durchgesehene Ausgabe. Geh.

75 Pf.

Stereometriekompndium. Cart. 1 Mk. 20 Pf.

Mathematisches Formelbuch. 3. Aufl. Geh. 50 Pf.

Ferner erschien von neuen Werken desselben Verfassers:

Differential- und Integralrechnung. Geh. 1 Mk. 60 Pf.

Zur Einführung dürften sich obige Werke allen Gymnasien,
Real- und Gewerbeschulen wegen ihrer Brauchbarkeit und Billigkeit
noch besonders empfehlen.

Gr. Lichtenfelde.

Die Verlagsbuchhandlung
von **Johannes Deter.**

Im Verlage von **Quandt & Händel in Leipzig** ist in neuer Auf-
lage erschienen:

Lehrbuch der Physik,

einschliesslich der Physik des Himmels, der Luft und der Erde. Ge-
mäss der neueren Anschauung und mit den neuesten Fortschritten.
Für Gymnasien, Realschulen und ähnliche Lehranstalten bearbeitet
von **Prof. Dr. Paul Reis**, Gymnasiallehrer in Mainz. Vierte
verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 287 Holzschnitten und
830 Aufgaben nebst Lösungen. gr. 8. XII u. 752 S. Preis 7 Mk. 80 Pf.

XXIV.

Inedita Copernicana.

Fortsetzung von N. V.

Von

Maximilian Curtze.

III. Weitere astronomische Notizen.

1. In dem Quartbande der Universitätsbibliothek zu Upsala mit der Signatur „34, VII. 69“ ist enthalten der „*Almanach noua plurimis annis venturis || inseruientia per Ioannem Stoefflerinum || Iustingensem & Iacobum Pflaumen VI- || mensem accuratissime supputata: & toti || fere Europe dextro sydere impartita.*“ Auf Blatt 16^a, col. 2 steht das Impressum: „*Opera arteq; impressiōis || mirifica viri solertissimi Io || annis Reger Anno salu || tis Christi domini 1499 || Idibus || Februarijs he E- || phemerides noue explete || atq; absolute sunt || Vlme || Lector Vale || I. M. S.*“ Derselbe umfasst 520 Blatt.¹⁾ Auf dem Titelblatte dieses Buches steht die Notiz:

„*Liber Bibliothecæ Varmiensis.*“

Es ist voller Bemerkungen eines gewissen Hans Garschaw, die für die Geschichte des Domcapitels von Ermland nicht ohne Interesse sein dürften²⁾. Auf der letzten leeren Seite der Ephemeride für das

1) Siehe Hain, Repertorium, No. 15085.

2) Einige dieser Bemerkungen seien hier reproduciert:

1520. *Februar*: Germanus meus Dñs. M. recessit abhinc versus Lubeck die 6 februarii die Lunæ post meridiem hora quasi prima. Gemeint ist jedenfalls Mauritius Ferber der nachmalige Bischof.

1522. *April*: Nata est filia germani die 10 mane hora circa quartam. Wahrscheinlich eine Tochter des später erwähnten Eberhardus Ferber, Bruder des Bischofs und Vater des Domherrn Iohannes Ferber.

1522. *Mai*: Cantor Andreas obiit subitanea morte die 25 ante meridiem post horam 10^m. Die Person des Cantor Andreas war nicht möglich festzustellen.

1523. *April*: Germanus meus dñs Mauricius electus in episcopum die 14 aprilis, die martis ante meridiem hora quæ infra 8 et 9.

1529. *März*: Germanus meus pie memorie obiit die 5. martii die Veneris post meridiem infra horam 7 et 8. Eberhardus.

Jahr 1530 stehen aber von Copernicus Hand, welche sich von den übrigen Notizen deutlich abhebt, auch mit unbestritten copernicanischen Schriftstücken im Ductus genau übereinstimmt, folgende astronomische Notizen aus dem Jahre 1537.

„Anno 1537. Septembris 8. Mars in linea recta capitis Geminorum sequens.“

„Eodem anno Octobris 10. feria 4. Venus et Saturnus equaliter distabant ab extrema pede Leonis, Venus pro-

cedendo, Saturnus sequendo.“

„Octobris 12. mane Venus coniuncta cum extrema pede Leonis ad austrum per gradus 0.45.“

„Die XVI. mane coniunctio Veneris et Saturni australior Venus 15 gradus.“

„Ultima octobris Venus præcessit stellam sextam Virginis per gradum 1 et plus parum ad meridiem tantumdem.“

„Nouembris 3. Mars antecedens lineam rectam inter septimam et octavam Leonis per $\frac{1}{2}$ gradus, distans a Basilisco per ij gradus.“

„Novembris vij feria 4. Mars sequebatur per digitum unum lineam rectam stellarum sextæ et octavæ Leonis distans a Basilisco per gradus ij et plus.“

„Eodem Venus præcedens per 0.50 lineam rectam stellarum 14 et 15 Virginis die xij.“

„Sequente die 13. mane Mars in linea recta stellis 7 et 8 Leonis, eodem die Venus sequens lineam rectam 14 et 15 Virginis 0. $\frac{1}{3}$.“

1. Mars || ♂. — Venus et Saturnus || ♀ et ♄. — 4. Venus præcedendo Saturnus || ♀ præcedendo ♄. — 6. Venus coniuncta || ♀ coniuncta. — 7. Leonis. || ♄. — 8. coniunctio Veneris et Saturni || ♀♄. — 10. Venus || ♀. — stellam || * — 13. Mars || ♂. — 14. Leonis || ♄. — 16. Mars || ♂. — 17. Zwischen stellarum und sextæ hat die Handschrift das Wort Basilisci eingefügt. — Zwischen Zeile 18 u. 19 steht in der Handschrift durchstrichen „Novembris XII ♂ sequens in linea recta stellam 7 et 8 ♄“, was später unter dem 13. aufgeführt ist, daher passt in der folgenden Zeile das Wort eodem nicht, so dass am Ende noch die xij hinzugefügt ist. —

1530. Mai: Obiit Dñs Iohannes Ferber pie memorie anno 30. die 17 maii die Martis post meridiem. Iohannes Ferber starb zu Rom.

„Novembris 15 feria V. hora 8½ Luna sequebatur
„Iovem per gradus 31½.“

2. Dieselbe Bibliothek enthält unter der Signatur „W. II. 1. 16“ das schon von Prowe und Hipler erwähnte Buch: „INSTRUMENTVM
„|| PRIMI MOBILIS, A' PETRO APIANO || NVNC PRIMVM ET
„INVENTVM ET IN LVCEM EDITVM || etc. || NORIMBERGAE
„APVD IO. PETREIVM ANNO MD. XXXIII.“³⁾ Dasselbe trägt auf dem Titel die Inschrift

„Liber Bibliothecæ Varmiensis.“

Am Fussende desselben steht zugleich folgende Dedication des Rheticus an Copernicus.

„Clarissimo viro D. Doctori Nicolao

„Copernico, D. præceptoris suo

„G. Ioachimus Rheticus æd.“

Die in dem Buche befindlichen Notizen sind nicht, wie Prowe zu glauben scheint, von Rheticus, sondern von Copernicus. Grösstentheils sind die Bemerkungen ganz kurzer Art, zuweilen nur Hinweisung auf eine bestimmte Stelle durch Unterstreichen einiger Worte des Textes. Nur auf Blatt c₃^a steht am Fussende der Seite folgende längere Notiz.

G. M.

☉. 2. 33. ☿ Latitudo

♃. 25. 8. ♀ G. M.

♂. 27. 39. ♀ 1. 27. S. A.

♂. 13. 49. ♀ 0. 56. S. D.

♂. 20. 47. ♀ 0. 41. S. D.

♀. 11. 6. ☿ 1. 14. M. A.

♀. 10. 14. ☿ 3. 21. M. A.

♂. 9. 12. ♀

19. a. v. S. Venus || Ursprünglich stand ♂, dieses Zeichen ist durchstrichen und auf dem Rande dafür ♀ gesetzt. — 26. a. v. S. stellarum || ** — Virginis || ♀. — 21. a. v. S. Mars || ♂. — stellis || ** — 22. a. v. S. Leonis || ♀. —

3) Ueber das Instrumentum primi mobilis Apian's sehe man Kästner, Geschichte der Mathematik Bd. 1. S. 578—581. Speciell über das vorliegende Exemplar Prowe, Mittheilungen aus Schwedischen Archiven etc. S. 13. No. VI. bei dem die Jahreszahl fälschlich 1533 lautet, sowie Hipler, Analecta Warmiensia S. 59—60 Anm. 50, der aber hier nur abschreibt, was Prowe am angeführten Orte mitgeteilt hat.

Die fragliche Schrift enthält wie mir Herr Professor Dr. Bruhns in Leipzig gütig mitgeteilt hat, die Daten eines Horoscopes. Es ist bis jetzt leider nicht gelungen, die verschiedenen Angaben für ein Jahr zu vereinigen, wie doch für ein Horoscop verlangt wird. Vielleicht ist dasselbe auf Copernicus selbst bezüglich, was interessant genug wäre näher zu untersuchen. Hier haben wir klar und nett zum ersten Male einen schriftlichen Beweis, dass Copernicus auch die *Astrologia iudiciaria* nicht verschmähet hat. Einige astrologisch-medizinische Notizen von seiner Hand habe ich ja schon früher in den *Reliquiæ Copernicanæ* veröffentlicht.

Der Anfang des *Instrumentum primi mobilis* bildet bekanntlich eine Art Goniometrie, bezüglich Trigonometrie. Hier hat sich Copernicus die einzelnen auseinandergesetzten Operationen auf dem Rande zu schnellerem Finden notiert. So steht auf Bltt. a_1^a mit Rot geschrieben: „*circuli sinuum*.“ Auf Bltt. b^b schreibt Copernicus zu den Worten „*Propone tibi tabulam hic sequentem*“ hinzu „*Prius posita est*“, nämlich auf den vorhergehenden Seiten; ebendasselbe Zeile 5 verbessert er „*0 grad. 22 minut*“ am Rande in „*0 grad. 34 minut*“. Auf Bltt. c_3^b steht untereinander zu Zeile 7—8: „*1. Ex arcu sinum*“; zu Zeile 15: „*2. Ex sinu arcum*“; zu Zeile 22: „*3. Ex arcu sinum versum*“ und auf dem andern Rande „*Sinus versus*“. Zu Zeile 26: „*4. Ex sinu versu arcum*“. Zu Zeile 31: „*5. Arcus propositus chordæ*.“ Auch sonst finden sich noch hie und da ähnliche Bemerkungen. In demselben Buche ist auch zuerst ediert die *Astronomia Gebri filii Alfa*. Dieser Teil des Bandes ist paginiert, und hier finden sich die Bemerkungen häufiger. Besonders hat Copernicus sich alle diejenigen Stellen notiert, in welchen Geber gegen Ptolomæus und dessen Theorie ankämpft, da sie ihm natürlich ungemein anmuten mussten. Gleich unter dem Titel, unter die Worte *GEBRI FILII AFLA* steht die Notiz:

„*Egregii calumniatoris Ptolomæi*“

Seite 2, Zeile 26 steht auf dem Rande „*Cur Ptolomæus erraverit*“; ebenso sind auf Seite 3 die Worte: *Et erravit in inventione ... capituli 8 tract. 9.* unterstrichen, auf dem Rande steht „*♀ et ♂*“; Seite 110 zu den Worten „*Et æstimavit Ptolomæus quod*“ fügt er hinzu „*Reprehendit Ptolomæum*“; Seite 112—113 sind die beiden letzten Zeilen und die erste unterstrichen und auf Seite 113 hinzugefügt: „*Longitudines longiores ♂ et ♀ iuxta Ptolomæum*“ und Seite 117, Zeile 3: „*Longitudo longior iuxta Gebrum*.“ Auf Seite 1. Zeile 18 v. u. steht auf dem Rande geschrieben: „*figura sector*.“ Die *figura sector* bildet bekanntlich bei den Arabern den Mittelpunkt der gesamten *sphæri-*

schen Astronomie resp. Trigonometrie. Auf Seite 2, Zeile 20—21 steht „De centro æquantis trium superiorum“, ebenso Seite 68, Zeile 3—4 v. u. Proportiones trium corporum. Seite 91 hat Copernicus die Worte „Agrinus aut consideravit“ unterstrichen. Ebenso sind Seite 93 Zeile 5 u. 6. v. u. die Worte „& sequitur ex illo iterum ... 100. annis pars vna“ unterstrichen. Seite 104 steht zu Zeile 13 hinzugefügt: „Colligit ex diversitate aspectus Venorem et Mercurium esse supra Solem“ und Zeile 26 setzt er hinzu „Talis debet esse“. Auf Seite 105 sind Zeile 8—9 und die drei letzten Zeilen unterstrichen dazu auf dem Rande: „Mercurius et Venus supra Solem“ Seite 116 Zeile 5 v. u. setzt er hinzu „Motus diuersitatis Mercurii“; Seite 117 Zeile 20 ändert Copernicus 16 partes & 10 am Rande in „26. 10“, daneben steht „De tribus superioribus“; endlich steht Seite 123 Zeile 1 auf dem Rande „Eccentricitates trium superiorum.“

Angebunden ist „Vitellionis Mathematici doctissimi „περὶ ὀπτικῆς etc. libri X. Norimbergæ, Petrejus „MDXXXV.“⁴⁾ Auf Bltt. 297^a, dem letzten des Buches, steht oben auf dem rechten Rande:

„Radium rectum seu perpendicularem non dicunt nec frangi nec reflecti nisi per eandem lineam.“⁵⁾

Unter dem Impressum liest man Folgendes:

„In Carthagine urbe Gnomon rationem habet ad æquatoris umbrameam, quam habent undecima ad septem. Plinius.⁶⁾ In Mauritanea æquinocitii die media, umbilicus quem gnomonem vocant septem pedes longus, umbram non amplius quatuor pedes longam reddit. In Arabia et Perside umbilicus æquinocitio triginta quin-

3. Plinius. In Mauritanea || Plinius in Mauritanea. —

4) Ueber dieses Werk sehe man die Abhandlung des Verfassers „Sur l'orthographe du nom et la patrie de Witelo (Vitellion) im Februar-Hefte 1871 des Bullettino Boncompagni; über die vorliegende Ausgabe speciell S. 20—21. des Separatabzuges.

5) Dies dürfte eine Reminiscenz aus der Perspectiva Communis des Johannes Pekkham sein, welche ihm handschriftlich zur Disposition stand. Siehe später unter 6.

6) Die von Copernicus excerpierete Stelle des Plinius findet sich in der Historia Naturalis lib. II, cap. LXXII.

„que pedum umbram viginti quatuor pedes longam facit
 „Infra de Rhodo et Cypro insulis gnomonis centum un-
 „ciæ umbram septuaginta septem unciarum faciunt. Et
 „de Lydia gnomoni unius et viginti pedum respondent
 5 „umbræ septemdecim pedum. Vitruvius⁷⁾ (1) Gnomon
 „Romæ novem partium umbram octo habet, Alexandriæ
 „stilus partes habens quinque umbram mittit partium
 „trium, Athenis quatuor umbram tres habet.“

2. Hinter gnomonis steht im Msep. noch ein durchgestrichenes centum.

Auf dem hintern Deckel steht, später durchstrichen, folgende mathematische Notiz:

„Dimetientem sphaeræ invenire. Describe in super-
 „ficie eius duas circulos sese contangentes officio cir-
 „cini. Deinde ex tribus lineis, hoc est quæ a polo utri-
 „usque circuli et distantia polorum constitue triangulum.
 5 „A terminis earum, hoc est a centris circulorum perpen-
 „diculares ducto concurrunt in centrum sphaeræ, a quo
 „ad superficiem eius est recta linea quæ ad contactum
 „illorum circulorum.“⁸⁾

2. circulos || circulus. — 3. Hinter hoc est stand zuerst noch ex eis q. — Für a polo stand ursprünglich ex centro. — 4. Für polorum stand ursprünglich centro²

Endlich liegt in diesem Bando ein Lesezeichen, auf welchem sich folgende Betrachtung des Copernicus aus seinem höchsten Lebensalter findet; ich sage aus seinem höchsten Lebensalter, da das fragliche Buch, dem sie entstammt, ihm frühestens im Jahre 1542 zugekommen ist, nachdem Rheticus in Nürnberg behufs Herausgabe der Revolutiones eingetroffen war. Die Bemerkung lautet:

7) Die Stelle aus Vitruvius steht de Architectura lib. IX cap. VIII (S. 233 der Ausgabe von Rose und Müller-Strübing). Von Vitruvius stand Copernicus eine der ältesten Handschriften zu Gebote, der von Rose mit L bezeichnete Codex Leidensis (Voss) 88. Derselbe aus dem Harleianus H abgeschrieben stammt aus dem X. Jahrhundert und gehörte seit 1521 Johannes Dantiscus, der ihn von Sebastianus Sperantius, Bischof von Brixen zum Geschenke erhalten hatte. Die Handschrift trägt, wie alle Bücher aus der Frauenburger Bibliothek, die Inschrift: „Liber Bibliothecæ Varmiensis.“

8) Die Notiz ist, wie schon bemerkt, durchstrichen, jedenfalls weil sich Copernicus von der Falschheit derselben überzeugt hatte, die sowohl für die ursprünglichen Lesarten als für die spätern Correcturen evident ist.

„Vita brevis, sensus ebes, negligentie torpor, et inu-
 „tiles occupationes nos paucula scire permittunt. Et
 „aliquotiens scita excutet ab animo per temporum lap-
 „sum fraudatrix scientiæ et inimica memoriæ præceps ob-
 „livio.“⁹⁾

5

3. Der Foliant „32. V. 50“ derselben Bibliothek enthält die Werke des Plinius, Venetiis, Marinus Saracenus 1487¹⁰⁾. In diesem Bande steht auf dem ersten leeren Blatte geschrieben

„Plinius“
 „Sum mei Casparis Salionis Cervimontani“

Auf Bltt. 2^a steht am Kopfbende geschrieben:

Liber Bibliothecæ Varmiensis.“

Derselbe ist voller Bemerkungen von Copernicus Hand, welche von der des Caspar Salio völlig verschieden ist; von letzterer findet sich überhaupt nur die Notiz auf Bltt. 1^a im Buche vor. Die Bemerkungen des Copernicus sind grösstenteils solche, welche ein schnelles Auffinden einer Stelle erleichtern sollen, indem er den Inhalt derselben auf dem Rande durch ein Wort ausdrückt. So steht beispielsweise zu Buch XVIII, Cap. XXV: „Dygestio Syderum in „noctes et dies“ auf dem Rande „Ortus et occasus duo modi“, so zu demselben Capitel auf der andern Seite „Fidiculæ occasus“, so zu Cap. XXXI desselben Buches „Spica Virginis.“ Im liber XXXIII, Cap. VIII. schreibt er auf den Rand „Alexander Magnus“, später „Periclem“ noch weiter unten „πακο τεχνος“, und ähnliche Notizen überall im Buche verstreut. Auf Bltt. aii^b hat er am Fussende folgende Stelle aus Cicero sich angemerkt, die Stelle, welche er von diesem in seiner Widmung an Papst Paul III erwähnt:

„Apud Ciceronem libro secundo accademicarum quæ-
 „stionum Nicetus Syracusius, ut ait Theophrastus, cæ-
 „lum, Solem, Lunam, stellas, supera denique omnia stare
 „censet, neque præter terram rem ullam in mundo mo-
 „veri. Quæ cum circa axem se summa celeritate con- 5
 „vertat et torqueat eadem effici omnia, quæ si stante
 „terra cælum moveretur, atque hoc etiam Platonem in

9) Diese Notiz dürfte eine Reminiscenz aus Thomas von Aquin sein, der, wie mir Herr Prof. Hipler mittheilte, einen ähnlichen Ausspruch enthält.

10) Hain, Repertorium bibliogr. No. 13096.

„Timæo dicere quidam arbitrantur sed paulo obscurius.“¹¹⁾

1. Vor in Timæo steht durchstrichen dicere. —

4. Bis jetzt ist von einer Beobachtung eines Cometen durch Copernicus nichts bekannt geworden; diese Himmelskörper finden sich kaum andeutungsweise in den Revolutiones erwähnt¹²⁾. Um so interessanter ist eine Stelle aus einem ziemlich seltenen Buche, die ich hier in extenso mitteilen werde, um daran einige Bemerkungen zu knüpfen. Das Werk hat den Titel: „DE REPLYBLICA, VITA, MO- || ribus, gestis, fama, religione, sanctitate: || Imperatoris, Cæsaris, Augusti, Quinti, Caroli, Maximi, Monarchæ, || Libri septem || etc. || scripti, authore Gulielmo Zenocaro à Scauvvenburgo etc. etc. || „GANDAVI, || Excudebat Gislenus Manilius Tipographus, || Anno Domini, 1559.“ und besteht aus 2 Bltt. und 304 Seiten in folio. In diesem Bande findet sich von Seite 193, Zeile 21 bis Seite 194, Zeile 24 Folgendes:

„Tertius Cometa.“

„Tertius Cometa apparuit mense Iunio, die decima octava anno vitæ Cæsaris trigesimo tertio. Ac esse noscebatur in tertio gradu, quarto minuto geminorum.“

5 „Et hic Cometa contrà signorum ordinem: et eum qui
„dicitur in cælo Solis apparere motus, progrediens: ac
„ob vicinitatem Poli arctici nunquam occidere, aut oc-
„cumbere visus est. Polo enim ita fuit propinquus, ut
„Horizontem contingere nequiret. Cometæ semita lon-
10 „gissime ab egyptica circa Arietis principium fereba-
„tur, atque illic sexaginta gradibus integris ab egyptica
„destitit: quilocus venter Draconis tumerat. Ac si secun-
„dum signorum ordinem motus fuisset: initium Cancri
„caput: et Capricorni initium cauda Draconis esse debu-
15 „erat.“

„Hinc magna inter Vratislaviensem Copernicum: et
„Ingolstadiensem Appianum, et Hyeronimum Scalum, et

11) Die Stelle steht bei Cicero, *Quæstiones Academicæ priores*, lib. II, cap. 39. Der Wortlaut stimmt bis auf den Namen Nicetus mit dem hier von Copernicus citierten überein. Die neueren Texte haben für Nicetus das Richtige Hiketas substituiert.

12) Die einzige Stelle ist *De revolutionibus* Lib. I, Cap. VIII (Seite 22, Zeile 21—24 der Säcularausgabe).

„Cardanum Mediolanensem, et Gemmam Frysium fuit
 „decertatio: quod contra signorum ordinem a Geminis
 „(ubi initio apparuit Cometa) non in Cancrum progres-
 „sus: sed in Taurum, et versus Arietem Cometa sit re-
 „gressus: quem tamen (si quemquam alium) secundum 5
 „signorum ordinem moneri oportebat: remotiorum scili-
 „cet a terra quam alius fuisset: longissime enim a Sole
 „aberat.“

„Neque poterant hæc convenire cum Ptolemæi tra-
 „ditionibus centesimo centiloquii aphorismo definien- 10
 „tis: Cometas undecim signis a Sole distare, cum hic
 „Cometa in Geminis, et Tauro Sol in Leone fuisse hoc
 „tempore sit demonstratus.“

„Est igitur alius lunaris sphaeræ raptus, quam opi-
 „nati sunt mortales, ac si rotam illius cælum, atque ter- 15
 „ras, impetu ardentis oculi sui, collustrantis, et rotantis
 „figuli considerassent: Deo hæc non hominibus per-
 „lustranda fuisse censuissent. Habet autem tellus simi-
 „litudinem quandam cum primo mobili.“

„Nunquam magis Cæsaris animus ad bellum Turcis 20
 „inferendum fuerat inflammatus, quam hoc anno, ac
 „propterea omnem movebat lapidem, ut fœdero in Italia
 „renovato, Europa tuta esse posset, et quieta a bellis
 „civilibus. Sed cum res Cæsaris in Africa anno trigesimo
 „quinto ætatis suæ: et biennio ante in Græcia feliciter 25
 „gestæ: similes eventus in Asia, et Syria portendere
 „videbantur: esse ab hoc laudatissimo victoriarum sua-
 „rum cursu, (eiecto per hostes Carolo Sabando e Sabau-
 „diæ suæ, Allobrogumque dominatu) revocatus est.“

„Tam autem graviter, et acerbe illum Cæsar casum 30
 „tulit, ut nisi restituto illo in pristinam dignitatem,
 „pacem christianorum Regum desperaret.“

Nach dem eben mitgetheilten Passus ist es sicher, dass Copper-
 nicus den Cometen des Jahres 1533 beobachtet hat; er soll über die
 Erklärung des Phænomens mit Apian, Gemma Frisius, Hieronymus
 Scala und Cardan in Streit gekommen sein. Dass Apian und Gemma
 Frisius den Cometen beobachtet haben, war bekannt; aus den Be-
 obachtungen Apian's, die leider nur vom 18—25. Juni sich erstrecken,
 hat Olbers versucht, die Elemente desselben zu berechnen, ohne je-

doch ein hinreichend sicheres Resultat zu erlangen¹³⁾. Die Beobachtungen des Copernicus scheinen unwiederbringlich verloren, diejenigen Cardan's und Scala's dürften voraussichtlich sich wieder finden lassen und dabei vielleicht eine weitere Spur der Beobachtungen oder Betrachtungen des Copernicus. Am 21. Juni stand der Comet so, dass er das Schwert bildete, welches Persous in der rechten Hand hält. Dass Copernicus das Argument gegen die ptolomäische Ansicht, welches unser Verfasser anführt, gern sich zu eigen gemacht haben wird, ist wohl anzunehmen. Ausser zu Gemma Frisius¹⁴⁾ waren Beziehungen des Copernicus zu irgend einem andern der genannten Beobachter bisher nicht bekannt; ob Zenocarus als Autorität genügt, eine solche für gesichert anzunehmen, mag ich nicht entscheiden. Jedenfalls sollte die vorliegende Stelle dazu veranlassen, dass solche Forscher, denen die Werke der betreffenden Autoren zugänglich sind, in Bezug auf derartige Verbindungen weitere Untersuchungen veranstalteten. Selbst ein absolut negatives Resultat wäre bei dieser Frage von Nutzen.¹⁵⁾

Dass Copernicus hier *Wratislaviensis* genannt wird, dürfte auf einer einfachen Verwechslung beruhen, obgleich es feststeht, und zwar durch zwei gesonderte Documente, (eins in Upsala, edirt durch Hipler¹⁶⁾, eins in Ferrara, edirt durch Fürst Boncompagni¹⁷⁾, dass Copernicus auch den Titel eines *Scholasticus ecclesiae Sanctae Crucis Wratislaviensis* führte. (Beiläufig gesagt, war das upsalenser Document der eigentliche Zweck der in Auftrage des Fürsten Boncompagni von mir unternommenen Reise.)

5. Die Dombibliothek zu Frauenburg besitzt einen Folioband

13) Die von Olbers berechneten Elemente des Cometen sind folgende: Durchgang durch das Perihel: Juni 14, 21^h 20' 46" Pariser Zeit; Länge des Perihels: 217° 40'; Länge des aufsteigenden Knoten: 299° 19'; Neigung und Lauf: 28° 14' D; Kleinste Entfernung: 0,3268604.

14) Siehe Oben Seite 110—111.

15) So ist neuerdings eine für Copernicus wichtige Frage, die über seinen Aufenthalt in Padua, durch die gründlichen Forschungen des Prof. Antonio Favaro (*Bulletino Boncompagni* 1877) ebenfalls negativ beantwortet worden. Dieses negative Resultat ist für die Frage nach der Nationalität des Copernicus von wesentlichster Bedeutung.

16) Hipler, *Kopernikus und Luther* S. 45, Anm. 97.

17) *Triplice omaggio alla Santità di Papa, Pio IX nel suo Guibileo episcopale etc.* Roma, Tipografia della Pace 1877 S. 291. (Intorno ad un documento inedito relativo a Niccolò Copernico. Nota di B. Boncompagni.)

mit der Signatur „XVII. Ba. 7945“¹⁸⁾. Derselbe umfasst folgende Drucke respective Handschriften:

1. *Tabulae Ecclypsium Magistri Georgii Peurbachii Tabulae Primi mobilis Iohannis de Monte regio etc. Viennae Austriae 1514*¹⁹⁾. Das erste Blatt fehlt.

2. *Tabulae Iohannis Blanchini*²⁰⁾ Handschrift von 57 Bltt. Am Ende: „*Tabule Iohannis blantiui (!) per me Martinum De Grodzysko Artium baccalaureo in scala omnium arcium Cracoviensi summa cum diligentia diebus canicularibus Anno partus virginiei 1523.*“

3. „*Iohannis Archiepiscopi Cantuariensis perspectiva communis*²¹⁾ „per P. L. Gauricum Neapolitanum Emendata.“ Am Ende: „*Opus „perspective Iohannis Archiepiscopi Cantuariensis finem sumpsit feria „sexta infra solines octavas Circumcisionis Dominici hora prima „noctis per me Martinum de Grodzysko“ etc. etc. „Anno virginiei „partus 1522.*“

In diesem Bande sind viele Notato von der Hand des Martinus de Grodzysko, nur auf der Rückseite des vordern Deckels steht von einer von dieser verschiedenen Hand, und zwar der des Copernicus, die Abbildung einer Mondfinsterniss mit folgender Ueberschrift:

18) Durch Herrn Domvicar Dr. Woelky auf den Band aufmerksam gemacht, wünschte ich denselben längere Zeit einsehen zu dürfen. Durch das Wohlwollen des Domkapitels wurde mir dieses gütigst gestattet, was ich hier ergebenst dankend anerkenne. Der Band besteht 1. aus 2 Vorblättern, bezeichnet A, B. — 2. aus 69 mit Tinte bezeichneten und XIX gezeichneten Blatt sowie 92 bezeichneten Seiten, welche die *Tabulae ecclypsium etc.* enthalten. — 3. aus einem leeren Blatte; — 4. aus 75 mit Tinte bezeichneten Blättern. Die letztern handschriftliches enthaltend. — Der Band ist im Jahre 1523 gebunden worden.

19) Eine genaue Beschreibung des Buches sehe man bei Kästner, *Geschichte der Mathematik II*, 526—535.

20) Johannes Bianchini war um 1458 Lehrer der Astronomie zu Ferrara. Seine *Tabularum Canones* erschienen zu Venedig 1459, ebendasselbst 1526 und Basileae 1553. Sie bilden eine Uebersarbeitung der alphonsinischen Tafeln auf Befehl des Kaisers Friedrich III ausgeführt.

21) Es ist dies die Optik des Johannes Pekkham von Canterbury in der commentierten Ausgabe des Lucas Gauricus, die man sofort an dem letzten Satze und seinem Beweise erkennen kann. Sie war ungemein verbreitet und wurde fast an allen Universitäten den Vorlesungen zu Grunde gelegt. Wenn es in einem Vorlesungsverzeichniss heisst, es solle gelesen werden *Perspectiva communis*, so ist stets die vorliegende gemeint.

„Hæc effiguracio eclipsis Lunariss adaptatur Anno „Christi 1525 currente quarta die Julii. Apparebit super „Meridiano Cracoviensi 21 gradu Capricorni. Hora 9, „minutis 48 principium, Medium vero hora 10, Minutis 45, „finis vero hora 11, minuto 42. Duracio vero eius erit „una hora, minuta 51, secunda 56.“

Darunter die Figur auf Taf. VIII., dieselbe ist bei mir etwa um die Hälfte verkleinert.

In diesem Bande sind noch einige solcher Abbildungen. Dieselben unterscheiden sich aber unmittelbar von dieser durch schlechtere Ausführung und vor allen durch falsche Orthographie. So schreiben sie sämtlich statt Occidens, Octidens, Origens statt Oriens u. Aehnliches. Man könnte auch die mit sehr kleiner Schrift zu der Perspectiva des Johannes Pekkham gemachten Anmerkungen 2ter Hand auf Copernicus zurückführen, doch scheint uns hier der Ductus der Schrift nicht völlig dem des Copernicus zu entsprechen, obwohl die oben (Seite 341) aus Vitellio angemerkte Randnote des Copernicus aus der Perspective des Pekkham geschöpft zu sein scheint.

6. Wenn auch nicht Copernicus selbst gehörig, so doch für ihn von hohem Interesse ist der Band „Q. q. III. 2. 96.“ der Bibliothek zu Upsala. Derselbe enthält, wie schon Prowe²²⁾ und nach ihm Hippler²³⁾ mitteilen, das Exemplar der Revolutiones des Copernicus, welches Rheticus dem Domherrn Georg Donner zum Geschenk gemacht hatte. Dasselbe kam aus dessen Nachlass an die Jesuiten in Braunsberg, denn auf dem Titel steht geschrieben:

„Collegij Brunsbergensis Societatis Jesu“

Ursprünglich sollte es jedenfalls der Dombibliothek angehören. Wenigstens steht auf der Rückseite des letzten Blattes, welches die Errata enthält:

„Liber V. Capli Ecclie Warmien.“

Endlich auf dem hintern Deckel:

„Bibliotheca Upsaliensis.“

Am Fussende des Titelblattes steht von Rheticus geschrieben:

22) Prowe, Mitteilungen S. 14—15.

23) Hippler, *Analecta Warmiensia*, S. 57. Anm. 46.

„Reuerendo D. Georgio
 „donder Canonico Varmiensi
 „amico suo Ioachimus Reticus a. d. ²⁴⁾

Donner hat, was Prowe entgangen ist, auf dem Titel die Worte ORBIVM COELESTIVM mit roter Tinte durchstrichen, sowie die osiandersche Vorrede „De Hypothesibus huius operis“ und den Brief des Cardinal Schönberg. Jedenfalls weil er diese Sachen entweder als nicht zu der Ausgabe zugehörig angesehen wissen wollte, oder weil sie nicht von Copernicus herrührten. Es liegt darin eine Bestätigung der Angabe, dass Copernicus sein Werk mit *De Revolutionibus* zu betiteln die Absicht hatte, und die Worte *orbium coelestium* ihm von anderer Seite hinein corrigiert sind. Die Stello „sicut Lysidis ad Hypparchum epistola“ hat Donner unterstrichen und am Rande ist durch ein Kreuz darauf aufmerksam gemacht. Wir wissen jetzt, dass der ursprüngliche Text der Revolutionen diesen Brief vollständig enthielt ²⁵⁾, was jedenfalls Donner genau bekannt war. Das Cap. VIII ²⁶⁾ des ersten Buches „Solutio „dictarum rationum, et eorum insufficientia“ ist durch eine an den Rand gemalte Hand ausgezeichnet, ebenso der Passus desselben Capitels „sed non modica quoque pars aëris, et quæ „cumque eodem modo terræ cognationem habent? ²⁷⁾ In Cap. VIII sind die Worte „Equidem existimo, gravitatem „non aliud esse, quam appetentiam quandam naturalem ²⁸⁾ mit Bleistift unterstrichen. Endlich ist Bltt. 29* Zeile 10--28 von dem Worte Ptolemæus an bis scrup 28 ²⁹⁾ mit Bleistift am Rande angestrichen. Das Exemplar ist eins von den mit dem Errata-Blatte versehenen.

7. Ich will hier noch ein Buch erwähnen das Astronomischen Inhaltes ist und aus Frauenburg stammt, wie die Einzeichnung *Liber Bibliothecæ Varmiensis* bezeugt. Es enthält das „*Kalendarium magistri Ioannis* || *de monteregio viri peritissimi* o. O. u. J. In der Bibliothek hat es die Nummer „33. VIII. 3. 217.“ Es ist voller Bemerkungen, die aber zum grössten Teil mit Vertauschung der Buchstaben geschrieben sind, so dass sie ohne grosse Mühe nicht zu entziffern sein dürften. Copernicus kann der Band nicht gehört haben,

24) Prowe a. a. O. hat fälschlich Donner für donder gelesen.

25) Siehe die Sæcularausgabe S. 35—36 Anm.

26) S. 21 u. ff. der Sæcularausgabe.

27) S. 22. Zeile 16—17 ebendasselbst.

28) S. 24. Zeile 25—26 der Sæcularausgabe.

29) Ebendasselbst Buch II, Cap. II, S. 76. Zeile 18 bis zum Ende des Capitels.

denn der Besitzer war zwar 1500 mit Copernicus in Rom, wie die Notiz zu der dort auch von letzterem beobachteten Mondfinsterniss zeigt, aber auch 1538 in dieser Stadt, wo er wieder die Beobachtung einer Mondfinsterniss anführt. Da aus einigen Bemerkungen sich ergibt, dass der Besitzer verheiratet oder nach römischer Auffassung Concubinarius war, aber gleichzeitig Domherr, da ferner Alexander Sculteti um 1540 sicher in Rom war, so dürfte wohl dieser intime Freund des Copernicus der Besitzer des Buches gewesen sein. In dem Buche liegt ein in Form eines Billet-doux zusammengefalteter Zettel, welcher in einer bekannten von vier zu je zwei parallelen Geraden, die sich rechtwinklig durchkreuzen, hergenommenen Chifferschrift geschriebenen Folgendes enthält:

„Aue Maria gracia plena, dominus
 „tecum. Benedicta tu es mulierum
 „et benedictus fructus uentris
 „tui Ihesus Cristus amen.
 „O Maria mater pia mater miseri
 „cordie ora pro nobis Maria
 „Hinrich Caste“

R. P.

Ob dahinter nicht doch ein Liebesbrief steckt?

IV. Mathematische Notizen.

1. An erster Stelle mögen hier zwei Gutachten stehen, welche Copernicus auf Requisition des Domcapitels, wie es scheint, gefertigt hat¹⁾. Im Jahre 1531 wurden von Seiten des Bischofs und des Capitels neue Bestimmungen für Handwerker etc. entworfen und durch den Druck veröffentlicht. Diese gedruckten Verordnungen finden sich nun in einem Sammelbande der Universitätsbibliothek zu Upsala ohne jede Signatur, dem wir später noch einige Notizen zu entnehmen ha-

1) In dem Spicilegium Copernicanum Hiplers steht in den Regesta Copernicana unter Nr. 88 zum Jahre 1531 die Notiz „N. Copernic „nuncius capituli in Allenstein“, was möglicher Weise, da es sich hier auch um allensteiner Angelegenheiten handelt, mit unserer Tatsache im Zusammenhange steht.

ben werden ²⁾. Unmittelbar hinter diesen und offenbar zu ihnen gehörig stehen folgend zwei zusammengehörige Piecen, die von einer und derselben, aber nicht Copernicus Hand bezeichnet sind mit

„Authore d. Nic^o. Copernic Canc^o Warmien“

und

„Panis coquendi ratio
„Doctoris Nicolai Copernic“

Es scheint, als ob die erste Piece den Herren vom Capitel nicht verständlich genug gewesen sei, und er deshalb zu näherer Erläuterung die zweite hinzugefügt habe. Während das erste Stück Reinschrift zu sein scheint, ist das zweite sicherlich nur ein schnell hingeworfenes mit den schwierigsten Abkürzungen geschriebenes Concept, dessen Reinschrift verloren gegangen ist.

Bltt. 63b

I. Ratio panaria Allensteinensis secundum precia frumentorum tritici et siliginis. 1

Ex modio uno utriusque frumenti facta examinatione diligenti et metreta deducta proveniunt panum libræ 67 fere. Cum vero soleant

4. libræ || 8

2) Der betreffende Codex ist ein Band in 4^o. von in Summa 117 Bltt., welche nicht in alter Zeit gebunden sind, sondern einen neueren Einband tragen. Der mir, als ich die Handschrift zu Gesicht bekam, äusserst knapp zugemessenen Zeit halber, war es mir unmöglich eine ausführliche Nachricht über sämtliche in derselben enthaltene Stücke zu machen; ich will hier aber wenigstens einige erwähnen, damit die Wichtigkeit derselben besser hervortritt. Die Hdschr. beginnt mit einem Briefe des Kardinal M. Ant. Amulius an den Kardinal (Hosius) von Ermland d. d. Romæ V. Idus Novembris [1563], es folgt ein Brief des Papstes Paul IV. an Amulius d. d. 15. Juni 1564, dann ein Brief des Amulius an den Papst d. d. Romæ VI. Idus Sept. M.D.LXV. An vierter Stelle ist eine Erklärung in deutscher Sprache der Prälaten und Domherren sowie des gesamten Capitels zu Ermland in Betreff der von Achatius von der Trenk hinterlassenen Erbschaft d. d. Frauenburg 8. Januar 1566, daran reiht sich eine zweite Erklärung ähnlichen Inhalts aber ohne Datum. Dann kommen die beiden Stücke über die Tagfahrt zu Heilsberg am 22. Sept. 1526 und die Landesordnung von 1528, über welche noch später zu berichten ist, diesen reiht sich an eine Transactio peculiaris de fugitivis rusticis inter Mauricium Ep^m et Cap^{lm} Warmiensem facta Anno 1530 (1 Seite). Nach längerem Zwischenraum folgt dann die Ratio panaria und wieder nach einigem Zwischenraum die Abhandlung de panis primarii losebroth ratione, und dann noch eine grosse Zahl weiterer Sachen aus Hosius Zeit. Sämtliche oben nachgewiesene Sachen, mit Ausnahme der Landesordnung waren Herrn Prof. Hipler zu Braunsberg auf meine desfallsige Anfrage unbekannt.

frumenta ante pisturam a lolio et zizaniis purgari, quo panis exeat nitidior et purior, placuit adhuc unam libram demere pro purgamentis huiusmodi, ut remaneant panum libræ 66 ad minimum ex modio uno. Expensi præterea communes sunt β 6 $\frac{1}{2}$ 4, nempe panificis
 5 consuetum precium β 4, pro vectura β 1, pro sale et fecibus β 1, pro cribratione $\frac{1}{2}$ 4. At quoniam furfures et purgamenta expensas panificii compensare sufficiunt, dummodo pro modio semi furfurum veniant immutabiliter β 6: residet idcirco eadem semper ratio precii
 10 frumenti ad panem proventum, ut verbi gratia, quando frumentum emittitur pro β 33, appendent 6 panes obolares libras 2, quando vero precium fuerit β 22, appendere debebunt 6 panes libras 3, et sic de cæteris, prout in subiecto Canone incipiente a 9 et aucto per 3.

	Precium frumenti in modio				Precium frumenti in modio		
	Solidi	℥	Scpl.		Solidi	℥	Scpl.
15	9	7	16		39	1	33 $\frac{2}{3}$
	12	5	24		42	1	27 $\frac{1}{2}$
20	15	4	19 $\frac{1}{2}$		45	1	22 $\frac{1}{2}$
	18	3	32		48	1	18
	21	3	6 $\frac{1}{2}$		51	1	14 $\frac{1}{2}$
	24	2	36		54	1	10 $\frac{1}{2}$
	27	2	21 $\frac{1}{2}$		57	1	7 $\frac{1}{2}$
	30	2	9 $\frac{1}{2}$		60	1	4 $\frac{1}{2}$
25	33	2	0		63	1	2 $\frac{1}{2}$
	36	1	40		66	1	0

II. De panis primarii Iosebroth consueti investiganda ratione.

Primo appendatur modius siliginis puræ et huius anni et consi-
 30 deretur, quot libras siliginis capiat modius unus.

Item si latitudo et profunditas cuiuslibet modii in Heilsberg, Allenstein et ubilibet capiatur, poterit unius ad alterum comparatione facta satis exacte percipi, quanta sit differentia ipsorum modiorum, quominus primum etiam ad hoc sufficiat.

1. ante || anti. — 2. libram || ℥. — 3. huiusmodi || huius. — libræ || ℥. —
 19. 19 $\frac{1}{2}$ || 19 $\frac{1}{2}$. — 27. consueti || consuetis. — 30. libras || ℥.

Et quia farina, quæ fit ex modio siliginis tantum fere pendat, quantum suum frumentum, recipe igitur farinæ huiusmodi quantum vis ad pondus, quæ par bursam farinariam cribretur modo conuenienti et furfures qui remanserunt appendantur, quorum pondus quantum fuerit reliquum farinæ discretæ etiam indicabit. Et si quempiam non pigeat, licebit iterum utrumque tantummodo examinari, si ambo prius farinæ discretæ pondus restituant. Hoc ideo fiat, ut discamus, quantum consueverit ex modio siliginis furfurum secerni. 5

Quo deprehenso recipe farinæ uti cribratæ quantumvis ad pondus, fiant inde panes losēbroth, nec refert multum, sint vel panes magni vel parui, dummodo rursus panis inde ex farina proveniens appendantur noteturque, quot colligat libras losēbroth. 10

Ita fiat in Heilsberg, in Allenstein et aliubi, si placet, et quæ reperta fuerint et exeuntia comportentur et comparentur. Ex his enim absque scrupulo ad verum iustumque panis precium et pondus pervenitur. 15

Circa triticum etiam ratio adhibeatur, quæ de siligine superius est exposita. In quibus omnibus exacta fiat trutinatio non cum außschlag, ut solent mercatores, quoniam non mercaturam sed certum modum inquirimus. 20

2. recipe || R. — 11. dummodo || Du°. — 12. libras losēbroth || R. For. — 15. precium et pondus || prij et pondus.

Die zweite Darlegung ist offenbar dazu gemacht um den ersten Satz der ersten zu erläutern: „Ex modio uno utriusque frumenti facta examinatione diligenti et metreta deducta proveniunt panum libræ 67 fere.“ Copernicus zeigt eben, in welcher Weise er die speciellen Angaben seines Gutachtens gefunden hat. Die Unterscheidung von siligo und triticum dürfte wohl die von weissem und buntem Weizen sein, wenigstens hiess im Altertum siligo derjenige Weizen, welcher sich durch seine Weisse auszeichnete. Die libra ist von Copernicus in 48 scrupuli geteilt, wie ein Nachrechnen seines Canon unmittelbar ergibt.

Was den Ausdruck losēbroth betrifft, so muss man beachten, dass in Ostpreussen noch vor kurzem die Bäcker in zwei Classen zerfielen, in Festbäcker (gewöhnlich nach ostpreussischer Aussprache Fastbäcker genannt) und in Losbäcker. Die ersten durften nur Schwarzbrod, die andern nur Weissbrod backen. Losebroth ist also, da es sich um Weizenbrod handelt, der von Copernicus richtig gewählte Ausdruck.

Die Hinweisung, dass das Wägen genau geschehen müsse, nicht nach Art der Krämer, ist in doppelter Weise interessant; einmal zeigt sie uns Copernicus als genauen Mathematiker, der exacte Beobachtungen für unumgänglich hält; andererseits lässt sie ihn als Deutschen erkennen. Würde wohl ein Pole sich des deutschen Wortes zur näheren Erläuterung bedient haben?

2. Schon Prowe³⁾ hat auf den Band mit der Signatur „W. III. 2. 128.“ der Universitätsbibliothek zu Upsala aufmerksam gemacht, welcher von Rheticus dem Copernicus geschenkt wurde. Derselbe enthält: I. *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛ. ΙΕ΄.*, || *ΕΚΤΩΝ ΘΕΩΝΟΙ ΣΤΗΝ ΟΤΣΙΩΝ* || *Εἰς τον αὐτοῦ τ' πρώτον, ἐξηγημάτων Πρόκλου βιβλ. δ΄.* || *Adiecta præfatiuncula in qua de disciplinis, Mathematicis nonnihil.* || (Drkrz.) || *BASILEAE APVD IOAN. HERVAGIVM ANNO M.D.xxxiii. MENSE SEPTEMBRI* (6 Blatt, 268 u. 115 S. fol.)⁴⁾. — II. *DOCTISSIMI VIRI ET MATHE-* || *maticarum disciplinarum eximij: professoris IOANNIS DE RE-* || *GIO MONTE DE TRIANGVLIS OMNI-* || *MODIS LIBRI QVINQVE:* || etc. etc. || *Norimbergæ in ædibus Io. Petrei. ANNO CHRISTI M.D.xxxiii.*⁵⁾ Das zweite Werk hat Prowe übersehen, ebenso die handschriftlichen Noten, welche im ersten Werke durch Copernicus dem Commentare des Proklos hinzugefügt sind. Oberhalb des Druckerzeichens auf dem Titel des Eukleides steht die Notiz

„*Liber Bibliothecæ Varmiensis.*“

Am Fussende desselben ferner die Dedication:

„*Clarissimo: viro D. Doctori*

„*Nicolao Cupernico. D.*

„*præceptori suo. G. Joachimus d. d.*⁶⁾

3) Prowe a. a. O. S. 14. Nr. VII; die Bemerkung es seien in dem Bande gar keine handschriftlichen Noten vorhanden, ist jedoch, wie wir gleich sehen werden, irrig. Hipler a. a. O. S. 59. Anm. 79. wiederholt Prowes Angabe und identificiert dieses Exemplar des Eukleides mit dem in dem Visitationsrecess vom 22. Sept. 1598 über die Bibliothek zu Frauenburg aufgeführten *Euclides in nigro corio*. Das ist entschieden ein Irrtum. Das fragliche Exemplar ist in weisses Leder gebunden.

4) Es ist dies die erste griechische Ausgabe des Eukleides; für Proklos war sie bis vor kurzem die einzig existierende.

5) Auch dieses ist die erste Ausgabe dieser Schrift Regiomontan's, eine zweite erschien, von Santbech besorgt, zu Basel 1568, oder wie andere wollen, 1561, was, da sie ohne Jahreszahl erschienen ist, schwer zu entscheiden sein dürfte.

6) Prowe hat fälschlich Copernico statt Cupernico drucken lassen.

Zum Eukleides sind keine Bemerkungen gemacht, wohl aber zum Proklos.

Seite 12 (ed. Fr. 7) S. 41, Z. 9—10) ist Zeile 26 an den Rand geschrieben „Κτησίβιος καὶ Ἡρόων“, ebendasselbst Zeile 28 (ed. Fr. S. 41, Z. 13) ist das Wort „Τίμαιος“ rot unterstrichen und ebenfalls rot nochmals am Rande notiert; neben Zeile 31 (ed. Fr. Z. 17) steht ebenso „ἀρχιμήδης“. — Auf Seite 19 (ed. Fr. S. 64, Z. 17—18) sind die Worte „λεγόμεν ὅτι παρ' Ἀλυσπτίους μὲν εὐρεῖσθαι πρῶτον ἢ γεωμετρία“ unterstrichen; auf derselben Seite sind in der letzten Zeile (ed. Fr. S. 58, Z. 6—7) die Worte „οὐ πόλυ δὲ τούτων νεώτερός ἐστιν Εὐκλείδης“ unterstrichen und am Rande steht geschrieben „Euclides“. — Seite 29, Zeile 31 (ed. Fr. S. 105, Z. 26) steht auf dem Rande wiederholt: „Γεμινος ἐκ πλεωνος κινήσεως“. — Seite 30, Zeile 7 v. u. (ed. Fr. S. 110, Z. 10) schreibt er auf dem Rande *γραμμη ευθεια*. — In der Ausgabe des Grynæus fehlen beim Proklos die Figuren vollständig. Einige derselben hat Copernicus ergänzt, so zu Seite 53 (ed. Fr. S. 188) die Fig. 2. u. 3. (s. Taf.), und auf derselben Seite weiter unten (ed. Fr. S. 190 Fig. 1) die Fig. 4. — Zu Seite 62 (ed. Fr. S. 227) ferner die Fig. 5. — Auf Seite 64, Zeile 18 (ed. Fr. S. 236, Z. 18 ff.) steht auf dem Rande notiert: „περιμετρος, Εμβαδος“. — Seite 65, Zeile 18 v. u. (ed. Fr. S. 241, Z. 19) hat Copernicus zu dem Worte *Καρπος* auf dem Rande hinzugefügt „utilitas“. — Seite 67 ist auf dem Rande die Fig. 6. hinzugefügt (ed. Fr. S. 249). — Auf Seite 73 hat Copernicus zu dem Namen des *Νικομήδης* (ed. Fr. S. 272, Z. 3 u. ff.) auf dem Rande hinzugefügt: „ἡ τῶν γονίων τομή“, offenbar im Zusammenhange mit der über Nikomedes von mir aus dem Eukleides des Campanus veröffentlichten Notiz des Copernicus. — Zu Seite 79, Zeile 12 (ed. Fr. S. 269, Z. 4 ff.) steht auf dem Rande „ἐφεξῆς γωνία“. — Seite 80, Zeile 25 (ed. Fr. S. 301, Z. 21) steht zu den Worten „ἐν τι τῶν γεωμετρικῶν“ auf dem Rande „πορίσμα τι“. — Seite 81, Zeile 12 (ed. Fr. S. 205, Z. 4 ff.) schreibt er hinzu: „Quæ repleant planum“, endlich steht Seite 109 neben Zeile 5—8 (ed. Fr. S. 420, Z. 2 ff.) auf dem Rande: „παραβολη, υπερβολη, ελλειψις“.

Was den zweiten Teil des Bandes, die Trigonometrie des Regiomontan, betrifft, so illustriert sie die Behauptung des Rheticus, dass Copernicus seine Trigonometrie ohne Kenntniss von der regiomontan'schen zu haben, ausgearbeitet habe. Erst Rheticus hat von Nürnberg aus seinem Lehrer dieselbe zugänglich gemacht, und wenn

7) Es ist gemeint die Ausgabe: Procli Diadochi in primum Euclidis Elementarum librum commentarii. Ex recognitione Godofredi Friedlein. Lipsiæ, Teubner. 1873. VIII, 507 S. 8°.

Domenico Berti in seinem *Copernico*⁸⁾ das Gegenteil als richtig behauptet, fussend auf einigen Randbemerkungen Galilei's zu der Trigonometrie des Copernicus, so hat er aus ihnen etwas herausgelesen, was sie gar nicht beweisen wollen, und wozu ihn nicht einmal die Bemerkungen des Herrn E. Beltrami⁹⁾ zu diesen Notizen ein Recht geben. Was uns Rheticus von den Studien des Copernicus mitteilt, hat sich bis jetzt noch stets als authentisch gezeigt, da es eben allein auf der *viva vox* des Copernicus beruht, und es ist schlechterdings unerfindlich, weshalb man diese indirect überkommene Erklärung des Copernicus für unrichtig annehmen soll, die Erklärung eines Mannes, dessen Wahrheitsliebe über jeden Zweifel erhaben ist.

3. Ich will auch hier noch, obwohl sie nicht direct von Copernicus stammen, einige Handschriften erwähnen, welche ich in Upsala und in der Königlichen Bibliothek zu Kopenhagen aufgefunden habe. Die erste dürfte mit Sicherheit als von Copernicus benutzt bezeichnet werden können. Sie ist enthalten in einem Bande der Universitätsbibliothek zu Upsala mit der Signatur „Qq. III. 2. 97.“, der zuerst in seinen älteren Teilen den Franciscanern in Braunsberg gehörte und mit deren Bibliothek 1565 an die eben nach Ermland berufenen Jesuiten kam¹⁰⁾. Im Jahre 1551, in welchem das erste Stück des Bandes gedruckt ist, existierten die Franciscaner in Braunsberg nicht mehr, und es muss also erst durch die Jesuiten der Band, so wie er jetzt zusammengesetzt ist, gebunden sein. Derselbe enthält 1. „*Rudimenta Mathematica Sebastiani Munsteri, Basileæ 1551.*“ Auf dem Titel desselben steht „*Collegij Brunsbergen Soc. Jesu.*“ — 2. Pergamenthandschrift von 42 Bltt. umfassend den Almanach *Prophatij Judæi editum 1302*. Die Schrift ist die des XIV. Jahrhunderts. Auf der Rückseite des letzten Blattes steht: „*Frm̃ minor i brūsberg*“¹¹⁾. Diese Handschrift dürfte Copernicus benutzt haben. Er erwähnt des *Prophatius Judæus* in Buch III, Cap. II am Ende (S. 162 der Säcularausgabe) und *ibid.* Cap. VI ungefähr in der Mitte (S. 171 der Säcularausgabe). An beiden Stellen wird angegeben, dass *Prophatius* die Schiefe der Ekliptik zu $22^{\circ} 32'$ gefunden habe; genau diesen Wert giebt die Handschrift zu Upsala für diese

8) Domenico Berti, *Copernico e le vicende del sistema Copernicano in Italia*. Roma 1876, S. 46—48.

9) Berti, a. a. O., S. 238—241.

10) Hipler, *Analecta Warmiensia*, S. 68.

11) Ueber den Almanach *Prophatij Judæi* sehe man Steinschneider, *Prophatij Judæi Montepessulani* (n. 1300), *Proœmium in Almanach adhuc ineditum etc.* (*Bullettino Boncompagni* 1876. October. S. 595—614.)

Constante an; ein ziemlich concludenter Beweis für unsere Annahme.
 — 3. „Opusculum de sphaera mundi Iohannis de sacrobusto etc.“
 Am Ende: „Fuit excussum hoc opusculum in Alma Complutensi Vni-
 „versitate Anno Domini Millesimo quingentesimo vigesimo sexto. Die
 „vero decimaquinta Decembris. Apud Michaellem de Eguia. E re-
 „gione Diui Eugenij cōmorantem: vbi venundantur.“ — 4. „Textus
 De Sphaera Ioannis de Sacrobosco etc.“ Am Ende: „Impressum Pa-
 risiis in officina Hērici Stephani e regione Schole decretorū sita.
 Anno Christi siderum conditoris 1516. Decima die Maij.“

Eine zweite Handschrift derselben Bibliothek mit der Signatur:
 „Manuscripta Mathem. Nr. 11“ enthält auf Bltt. 1—57, die in
 Folioformat sind:

„GEORGII JOACHIMI RHETICI
 „doctrina triangulorum additis q̄budā
 „in locis explicationibus SMA“¹²⁾
 (d. h. Sebastiani Mieji Argentoratensis).

Bltt. 58—85 in Quarto enthalten dann eine Umarbeitung derselben
 Handschrift von demselben Bearbeiter, und weiter folgen noch zehn
 weitere Handschriften schwedischer Mathematiker z. T. in schwedi-
 scher Sprache. Als Handschrift eines Buches von Rheticus, das dieser
 selbst auf Copernicus zurückführt, dürfte dieselbe wohl Erwähnung
 an dieser Stelle verdienen. Aus demselben Grunde führe ich hier
 noch die Originalhandschrift des Canon Triangulorum des Pi-
 tiscus an, welcher die rheticus'schen trigonometrischen Arbeiten end-
 lich zu Ende führte. Dieses Manuscript ist auf Papier, 52 Bltt. mit
 4 Vor- und einem Nachblatte zusammen gebunden. Es befindet sich
 in der Königl. Bibliothek zu Kopenhagen mit der Signatur „Gl. Kgl.
 Saml. Nr. 289 fol.“¹³⁾ Die Handschrift hat den Titel:

12) Es ist mir nicht bekannt, dass diese doctrina triangulorum ediert
 ist; wohl ist der canon doctrinae triangulorum herausgegeben, aber keine
 dieser Ausgaben hat etwa eine Einleitung, in der die doctrina triangulo-
 rum auseinandergesetzt wird, sondern nur in dem Opus Palatinum die
 Darlegung, in welcher Art der Canon berechnet ist. Dadurch würde sich der
 Wert obiger Handschrift bedeutend erhöhen. Der Canon triangulorum
 befindet sich nicht etwa handschriftlich bei diesem Manuscripte.

13) Der Zugang zu der Königl. Bibliothek zu Kopenhagen wurde mir
 durch Herrn F. R. Friis vermittelt, den bekannten Herausgeber der Briefe
 Tycho Brahe's. Leider ist diese grosse Bibliothek an Handschriften im Fache
 der Mathematik, Physik und Astronomie, mit Ausnahme der tychomischen
 Manuscripte, sehr stiefmütterlich bedacht. Die Universitätsbibliothek besitzt in
 diesem Fache fast gar nichts. Die freundliche Zuvorkommenheit des Herrn
 Friis, sowie der Herren Beamten der dortigen Bibliotheken erlaube ich mir
 hier ergebenst dankend anzuerkennen.

1. Im Besitze des Copernicus³⁾ befand sich ein Werk, jetzt mit der Signatur „35. VII. 4.“ der Universitätsbibliothek zu Upsala gehörig, mit dem Titel: „Practica valesci de tharanta || que alias philonium dicitur.“ Dasselbe besteht aus 4 unbezeichneten und 360 von I—CCCLX bezeichneten Blättern. Am Ende steht: „Preclaris-
„simū op⁹ valesci de tharāta reuerēdissi || mi m̄gri necnō artis medi-
„cine doctoris famosiss || simi. Finit feliciter Imp̄ssum lugd'. p Johā-
„nem || trechsel alemanū. Anno nrē salut' Millesimo || quadringētesimo
„nonagesimo Die vero decimo || nono mensis maij. Amen.“⁴⁾ Dar-
unter das Druckerzeichen. Auf der Rückseite des vordern Deckels
steht untereinander

„D Fabiani“

„Nicolai Copernicj“

„In tes̄to fabiano Emerich assignatus“

Davon ist die erste Zeile Autograph des Fabian Emerich, die zweite Autograph des Copernicus, die dritte von einer dritten Person geschrieben. Wenn Prowe behauptet die erste und dritte Zeile seien von einer Hand, so irrt er, ebenso darin, dass er die zweite Zeile für einen späteren Zusatz erklärt. Sie ist ganz unzweifelhaft von Copernicus selbst geschrieben. Am obern Rande von Bltt. 2^a steht die Notiz

„Collegij Br̄nsbergensis Societatis Jesu.“

Auf Bltt. 1^a, dem Titelblatte, hat Copernicus Folgendes geschrieben:

Contra dissenteriam. Flores garioflorum pulveratas mitte 1
in vinum rubrum calefactum, bibe ad noctem unum haustum et mane.

℞ Semen fœniculi, sileris montani, camodreos,
radice celidonis an̄ 3ii
Semen apii, aut petroselini, piperis, cinamomi, aniseos 5
masticis, spicis M. an̄ 3i
Isopi, abrotani, polii, calamēti, origani, semen
aneti, Iuniperi an̄ 3 s.
Et zuccaris quantumvis
Fiat pulvis et sumatur cum pane tusto vespere, 10

1. Flores || fl. — 3. Semen fœniculi, sileris || Seⁿ fēn sil'. — 5. aut petroselini || aū petrōj. — aniseos || anieos. — 10. Fiat || fē.

3) Zuerst ist auf dasselbe von Prowe aufmerksam gemacht worden. Man sehe dessen Mittheilungen S. 13, dann Hipler's *Analecta Warmiensia* S. 57. Anm. 46.

4) Hain, *Repertorium* Nr. 15250. Derselbe führt im Ganzen 4 vor 1500 erschienene Ausgaben des Buches auf.

mane et meridie. Hic pulvis non solum visum
clarificat etiamsi pene fuerit amissus, sed et
stomachum confortat et purgat, lapidem frangit,
opilationem epatis et splenis solvit et omnem
5 ventositatem expellit.

Ex Thesauro Euonymi Philatri Rogero autore collectum.

Repleto vase distillatorio foliis agrimoniae, verbenae, fœniculi,
ruthae, utrino^athæ(!) et levistici superasperge aliquantulum vini albi
et clari et vasis lutatis distilla. Hic liquor tumorem palpebrarum ex
10 frigore iam reprimat, lippitudinem desiccat, lachrimas intercipit, visum
clarificat, maculas frangit. Quod si efficaciorum volueris pro fran-
gendis maculis adde folia gillinici et morsus galline (anagallidis) cui
flores rubri.

Potest etiam e fœniculo elici aqua ad vasis cas^a (!?) Nam ex
15 radicibus et foliis fœniculi in aqua decoctis liquor collectus in pelui,
super aquam illam adhuc bullientem posita in phiala servatur et
quotidie mane et vespere gutta una in angulo oculi ponitur ad præ-
dictas causas communi experimento.

Item ut maculam frangas myrrham et aloen trita, cum prædictis
20 aquis misce et colati liquoris guttam mane et sero in utroque angulo
oculi pone. Item aqua de floribus spinæ albæ et salice destillata
præunctionem, calores et ruborem oculorum removet, lachrimas de
eadem causa interrupt et maculas de eadem causa frangit.

Auf Bltt. 1^b folgt dann:

Conveniencius est lubricare ventrem per inferius cum clistiri
25 vel suppositorio quam per superius cum medicina, quin omnis medi-
cina laxativa quantumcumque levis debilitat membra nobilia et proprie
stomachum et epar, propter quod omnifarie sunt evitandæ, nisi quando
requiritur aliorum membrorum evacuatio vel venarum. Item conetur
sanitatis custos omni die ventris lubricitatem debitam servare, quin
30 in hoc est maximum juvamentum præservans a malis passionibus et
proprie soda pulsativa, voragine, stothonoma, febribus putridis,
apostomatibus, membrorum interiorum ydropisi et colica.

Item fel porci vel bovis cum oleo bulitum parumper et ab um-
bilico superius inunctum vomitum procurat, ab umbilico vero inferius
35 secessum.

7. fœniculi || fœi. — 8. levistici || lavistici. — 13. rubri || ruber. — 16. su-
per || si q^a. — 28. membrorum || membro!

Suppositorium ita facito. Farinae siliginis vel ordeï avenaevae, quantumvis salis communis et mellis quantum sufficit incorporentur pro duobus suppositoriis addito vero fel alterius animalis bovis, caprae vel porci vel vituli, et si vis acuere addito aliquid de aloe.

Bltt. 2 und 3 enthalten die Tabula des Bandes. Hier hat Copernicus am Rande zum schnelleren Auffinden sich angemerkt, wo die einzelnen Hilfsmittel gegen Krankheiten der einzelnen Körperteile beginnen. So liest man der Reihe nach: „oculorum, Aures, Nares, Lingua, Dentes, Guttur, Cor, Stomachus, Epar, Splen, Renes, genitales, Matrix, gutta, febres, pestilencia, Apostemium“, dazu auf Bltt. 2ⁿ die allgemeine Bemerkung auf dem untern Rande „De intestinorum morbis.“

Bltt. 4 ist unbedruckt; auf der Vorderseite desselben steht Nachfolgendes:

℞ radiciſ apii fœniculi an̄ ʒ s. 1
capilloſve florum bugloſſæ roß an̄ ʒi
paſſ. ʒ s. mirab. ſudorum embli itrinorum
an̄ ʒi agariſ ſanæ an̄ ʒiij corticiſ iʒiij artemiſii

℞ corticiſ iſtius ʒiij yere ʒv dýſimte ʒiij maſticiſ ʒ s. 5

Psilothrum.

℞ uvaſ amidi an̄ ʒi, auripigmenti ʒ. s.
calciſ vivæ ʒiij md.

Aliud.

℞ pulveriſ prædicti ʒi, ſaponiſ ʒiij vel ʒiij. s. 10
vel ʒxxviij.

Aliud.

℞ hyoſquiami ʒ. s. infunde in acetum per diem et noctem et
ſiccatae guttae hederæ ʒ. s. ſevi ovilli ʒ. s. miſce et aromaſiſa.

De oviſ mirabilo. 15

℞ vitelloſ v, albumina viij conquaſſato et veſicæ oleo livi confricatæ indito etc.

℞ ſaliſ nitr̄i ſeu petri ʒj } fiat aqua fortiſ.
aluminis ſciſſi ʒj }

Endlich ſteht auf der Rückſeite deſ letzten (360) Blattet:

IX grana ordeï faciunt ʒi, octo ʒ faciunt ʒ 20

1. Psilothrum || psilotp. — 2. uvas || woas. — 3. hyosquiami || hynisq.

Ad conservacionem dentium et contra eorum dolorem.

℞ piretri scafizag²e(?) piperis ʒ^o ʒ'
 semen apii, balaustiae, capsulae glandium masticis
 cornu tauri usti, coralli rubri usti an̄ ʒi s.
 5 florum rosarum ʒi aluminis, zuccari ʒ s.
 exhiis fiat pulvis subtilis ut alcool, qui
 postmodum cum melle puro incorporetur, fiat per
 modum linimenti, sed prius mel bene depuretur
 ab eius immundiciis, tum gingivas confrica et expue.

10 Pro mittenda urina.

℞ seminis communis amygdalorum frigidorum a corticibus ex-
 corticatorum an̄ ʒ s., fiat ex eis lac secundum artem cum æquis
 diu relicj (!) dissolvendo, fiant duo haustus, quilibet sit mi-
 nor ʒ

15 Contra lapidem.

℞ philipenduli ʒ s., cibebe, rorismarini an̄ ʒi herbæ cornerii ss
 fiat pulvis.

Unguentum quando distortum aliquod membrum.

20 ℞ mirtilaginis, spilii, fœnugræci an̄ ʒ ij farinæ malvarum radices
 et cum decoctione florum camomillæ fiat emplastrum; in forta-
 mentum addatur terræ sigillatæ ʒ i et boli armenici ʒ i s.

Μελανοτριχιον

× *Κυμινου Αλοης Μελανου οινου*

2. Die Universitätsbibliothek zu Upsala besitzt ein anderes Buch
 in Folio mit Signatur „31. V. 4. 144.“ Dasselbe enthält an erster
 Stelle die

„Cirurgia magistri Petri de largelata“

von im Ganzen 132 Bltt., wovon das letzte leer ist. Am Ende steht
 einfach

„Venetijs. 1499. die. 12. Septembris“⁵⁾

Angebunden ist

„Opus pandectarum Matthei silvatici
 „cum Simone ianuenso et cū quotatio-
 „nib⁹ auctoritatū Plinij galieni ⁊ alio-
 „rum auctorū in locis suis.“

3. capsulae || capule. — 11. seminis communis amygdalorum || sc̄ni oūj αψ.
 — 21. boli armenici || bo ar.

5) Hain, Repertorium Nr. 1639, welcher aber das letzte leere Blatt
 nicht kennt. — Auch von dieser Schrift existieren 5 Drucke vor 1500.

mit dem Druckvermerk:

„¶ Impressum Venetijs mādato ⁊ expēsis Nobilis Vi-
ri Dñi Octauiani Scoti Ciuis Modoetiensis. quinto
Idus Martias. 1498. Per Bonetum Locatellum
Bergomensem.“⁶⁾

im Ganzen 182 Bltt. Auf dem Titelblatte des ersten Stückes steht von Copernicus Hand:

„Pro bibliothecæ Ep̃ali in arce Heilsbergk“

darunter von anderer Hand:

„Liber Bibliothecæ Varmiensis“

Auf der leeren Rückseite des vorletzten Blattes dieses ersten Stückes (dem 131 des ganzen Bandes) hat Copernicus Folgendes geschrieben:

Item succus gallæ quercetinæ valet ad fistulas et ulcera eo ab- 1
luta.

Item viscum de pomo arbore tercio in cerevisia coque et ea co-
lata cum pastu potato, valet contra podagram.

Contra paralisim bonus(!) corporis 5
¶ salivam, rutam, castoreum, decoque in vino et da bibere.

Contra colicam et yliacam
¶ succum susquiami, acetum et farinam, misce et applica ad lo-
cum dolentem

Contra dissenteriam 10
¶ garioflorum pulveris satis, mitte in vinum rubrum calidum, bibe
ad [noctem] unum haustum et mane⁷⁾.

Am Rande steht dazu: vide corollarium in pandecta.

Contra pestem
¶ camforæ ʒiʒʒʒii, diptaminis ʒ s., zuccaris candi ʒiiij, fiat pul-
vis, qui debet recipi post infectionem ante demunctionem cum 15
vino bono ad pondus floreni. Provocat sudores et curat.

1. quercetine || qũtine. — 12. noctem ist Coniectur. — 15. demunctio-
nem || demuncionem.

6) Hain, Repertorium Nr. 15202. Davon 11 Ausgaben vor 1500.

7) Dies ist dasselbe Recept, welches oben als erstes aus dem Valesius
de Tharanta mitgeteilt ist. Aus der obigen Fassung ist das Wort noctem,
als ausgelassen, eingefügt worden.

Alii pulveres salvificantes.

- ℞ boli armenici ℥ ij; cinamomi ℥ s;
 zeduarii ℥ ij; radices tormentillæ, diptaminis, szandalorum ru-
 brorum añ ℥ ii; rasorum eborum ferri añ ℥ i; spodii, anthemii
 5 acetosi añ ℥ ij; corticis citri, margaritarum añ ℥ i; smaragdi,
 iacinti rubri, zaphiri añ ℥ i; os de corde cervi ℥ i; carabe, cornu
 unicorni, coralli rubri, auri, argenti tabularum añ ℥ i; zaccaris
 lib s vel quantum, qui utitur iam inferri sub pondere unius
 flaroni ungarici; contra ruborem furie (!) ⁸⁾.
- 10 ℞ camphoram, alibanum, muram (!); pulverisantur et mittantur in
 aquam rasaceum sub equali pondere et liniatur rubor. Ad ul-
 cera valet farina tritici cum melle mixta emplastrata.

Auf der Rückseite des letzten Blattes des ganzen Bandes (314) steht von Copernicus noch Folgendes verzeichnet:

- Pillulæ imperiales Arnoldi de Villa Nova ⁹⁾,
 quæ possunt accipi omni tempore sine præparatione præcedenti, dicta
 vel custodia, mane et sero, ante cibum vel post absque syrupo per
 quemcumque hominem sanum vel infirmum. Valent in omni materia
 5 digerenda et quacumque egritudine, educentes sine læsione quicquid
 superfluum, inveniunt et confortant membra principalia et debilia,
 læticiam adducentes retardant canos, qui ex corruptis humoribus pro-
 deunt, consolidant quicquid dilaceratum est mordicativis salsis humo-
 ribus, virtutem visivam supra omnia procurant, stomachum præponunt
 10 et conservant, catarrum compescunt, tussim sedant, anginas et omnia
 faucium et oris vicia tollunt, fumositatem stomachi educunt, stoto-
 nomam repellunt, intellectum augent, nervos roborant et vegetant,

2. boli armenici || bō ar. — 4. ferri || fe'i.

8) Auch dieses Recept ist schon länger als copernicanisch bekannt. Es ist mit dem von Prowe, Mittheilungen, Taf. II. edierten identisch. Die Abweichungen des Prowe'schen Textes sind: Zeile 3. tormentillæ radices. — sandalorum. — 4. cras für fe'i. — 8. von vel quantum liest Prowe vel qī | fe pulvis, es fehlt also an dieser Stelle der ganze Schluss.

9) Von Arnoldus de Villa Nova kennen wir ein Breviarium practicae medicinae, das vor 1500 drei Auflagen erlebte, ein Speculum medicinae, ein De arte cognoscendi venena, ein De virtutibus herbarum, ein Liber de vinis, das auch vielfach in deutscher Sprache gedruckt ist, einen Tractatus de aquæ vitæ simplici et composito, endlich ein Regimen Sanitatis. Welches der beiden ersten Bücher, denn von diesen kann wohl nur die Rede sein, Copernicus excerpiert hat, konnte ich nicht entscheiden.

dentes a putredine custodiunt, valent contra epidimiam, contra scabiem arteticam et podagram, dormire faciunt, corpora lapsa, ne egritudines incident, præservant, utramque colicam cum fœcmate trahunt, leviter purgant. Qui demum vult purgari per has pillulas,umat prima die unam, secunda duas, tertia die tres etc^a. usque ad septem vel quantum recipienti videbitur expedire. Quarum compositio ita se habet.

℞ amomi		
anisi		
Cardamomi		
33		
Cinamomi		
Zoduarii		
Masticis		
Nucis musce		
Garioflorum	an 3i	15
Croci		
Cubebi		
Liquoris aloes		
Turbith boni		
Mannæ		20
Agaricis		
Senæ		
Quinque granarum mirobellarum.		

reubarbari ad pondus omnium prædictorum, aloes succus ad pondus totius supradictæ. Omnia conficiantur cum syrupo violarum vel 10 rosarum et conserventur in massa una et cum uti volueris fac pillulas ad formam cicceris vel pisi.

3. Weiter besitzt die nämliche Bibliothek einen Band in fol. mit der Signatur „31. V. 4. 142.“ Derselbe enthält den Druck betitelt:

„Ortus Sanitatis
 „De herbis 2 plantis
 „De animalibus et reptilibus
 „De Auibus 2 volatilibus
 „De Piscibus 2 natatilibus bus
 „De Lapidibus 2 in terre venis nascēti
 „De Vrinis 2 earum speciebus
 „Tabula medicinalis Cum directorio
 „Generali per omnes tractatus.“¹⁰⁾

ohne Ort und Jahr. Ueber den Titel steht

„Liber Bibliothecæ Varmiensis“

Vorgebunden sind vier Schmutzblätter. Auf der Rückseite des Deckels,

10) Wahrscheinlich Hain, Repertorium Nr. 8942, obwohl der Titel nicht völlig genau stimmt. Der Hortus Sanitatis ist eins der vielfach aufgelegten medicinischen Compendien.

den Vorsetzblättern 1^{a.u.b}, 2^b, sowie auf Bltt. α_4^b steht von Copernicus Hand Folgendes geschrieben:

- | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---------------------|------------|--|---------------------|--|---------------------|--|-------------|--|----------------------|--|---------------|--|-------------------------|----|--|---------------|--------|--|----------|-----|
| Rückseite des
Deckels. | Colica by derme such
Dissuria kalbe pissge
Lytargia heupt wethun
Apoplexia der slacht
Epilepsia die fallende such
Peripleumonia eyn geswer
Øff der lunge vnde oritur ptisis
Spasmus der framppff. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Item | <table border="0"> <tr> <td>{</td> <td>Kannell</td> <td rowspan="6">} nyn fðgl</td> </tr> <tr> <td></td> <td>Ingfer</td> </tr> <tr> <td></td> <td>Nellken</td> </tr> <tr> <td></td> <td>Annis</td> </tr> <tr> <td></td> <td>Fenkelsótt</td> </tr> <tr> <td></td> <td>Gartenkommel</td> </tr> </table> | { | Kannell | } nyn fðgl | | Ingfer | | Nellken | | Annis | | Fenkelsótt | | Gartenkommel | | | | | | | | | |
| { | Kannell | } nyn fðgl | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Ingfer | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Nellken | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Annis | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Fenkelsótt | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Gartenkommel | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | Pudersenis iiij fðgl | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Item | <table border="0"> <tr> <td>{</td> <td>Flores Camomillarum</td> <td rowspan="6">} Ma</td> </tr> <tr> <td></td> <td>Sumitates Absinthii</td> </tr> <tr> <td></td> <td>Folia Menthæ crispæ</td> </tr> <tr> <td></td> <td>Rose Lubec.</td> </tr> <tr> <td></td> <td>Malvæ radices medium</td> </tr> <tr> <td></td> <td>Semina liny /</td> </tr> <tr> <td></td> <td>Succus foliorum Salicis</td> <td>ma</td> </tr> <tr> <td></td> <td>Oleum Rosarum</td> <td>pro gl</td> </tr> <tr> <td></td> <td>Stopmell</td> <td>Mam</td> </tr> </table> | { | Flores Camomillarum | } Ma | | Sumitates Absinthii | | Folia Menthæ crispæ | | Rose Lubec. | | Malvæ radices medium | | Semina liny / | | Succus foliorum Salicis | ma | | Oleum Rosarum | pro gl | | Stopmell | Mam |
| { | Flores Camomillarum | } Ma | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Sumitates Absinthii | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Folia Menthæ crispæ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Rose Lubec. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Malvæ radices medium | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Semina liny / | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Succus foliorum Salicis | ma | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Oleum Rosarum | pro gl | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Stopmell | Mam | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Bltt. 1^a.

- 25 Razes in secretis medicinæ. Qui ex consuetudine quater in anno minui consueverunt: cum ad quadraginta annos pervenerint ter in anno minuantur, et cum ad sexaginta bis, et cum ad septuaginta semel, et post hæc a minutione caveant. Senes vero post annos sexaginta a minutione capitalis venæ caveant, neque qui septuaginta quinque habeant annos minuantur vena basilica. Hæc ille.
- 30

Item. Estas ver dextras, autumnus hyemsque sinistras
Quatuor hæc membra: cephe. cor. pes. epar vacuanda
Ver. cor. epar. estas: ordo sequens reliquas.

Item Polipodium Engelsuss adder Steynlackeritze gesoten mit Anijs vnde fenchel vnde kumell itzlichs gleichvil yn eyynn pfunt wassers vnde dass getruncken macht den Bauch reine Vnde treibet So mit auss vill boser feuctikeyt.

Item Craussemutze puluer yngenomen Mit milch vortreibt die spol- 5
worme. Menta gesothenn vnde do mitte gebeet dass zcuss-
wollenn gemacht benympt die Swolst behendirlich. Item die
stirne gestrichen mit dem Safft benympt dass heubt we. Der
Safft getruncken mit honigwasser genanth Mulsa stilltet dass
sauen yn den oren. 10

Item Muscaten gestossenn vnde gemischet mit lorber vnde die genucz
mit weyn machet wol harnen. Item der Samen von grasse mit
wyn genuczet machet harnen. Item der Samen von Melonenn
Machet wol harnenn vnde reiniget die lenden vnde Nyrenn.

Item kresse Samen gekauet yn dem Munde vnde gehalten vnder der 15
Zungen benympt ir die lemde vnd machet widdervmb reden.
Nasturtium kresse alleyn gegessen ist nicht gutt, wen sie myn-
nert die krafft dess menschen vnde machet bosse feuchtung,
went ess wechsett gern von feuchter erden vnd selten yn der
Sonne.

Item Marubium eyn kraut genant Gotisvorgessenn ist gutt Zcu 20
brauchenn Vor die Pastilenz die blatter adder den safft mit
eynem tuchelen genetz vnde darumb gelagen. Item der Saff
von Marubium gemischet mit bomöll vnde den yn dy oren ge-
tan vortreibet iren grosszenn smertzen warhaftich.

Item wer der starkenn sucht warttenn ist adder sie hett alss dann ist 25
Apoplexia, der side ater nesselnn mit weyn vnnd trincke den
dick iss vorgetth ym. Item Wer nut nett zcu stul gynges Alss
dass er allezeit gelust hette vnnd doch nicht schaffen mechte,
der nucze mirra mit kesse brue er geneset zcuhan. |
Bitt 16

Podagra (!)

Item die brue der ynne ruben gesotten seyn gestrichenn vff wethun 30
der gelider, alss vff Podagram ist fast gutt.

Item wenn die Such adder gicht am dem leibe druck wo dass were
der neme Castorium dass ist bebergeil vnde side den yn weyn
vnnd schmere sich an der selbigen stat ess hillfft an zweifell.

Item Polley frisch gestossenn vnde vff dy such Podagra genant hilfft balde.

[Bl. 2]

Raute.

5 Item Serapio der meister spricht dass die bletter von raute gegessenn mit figen vnnnd welss nuss benemen den giftigen vnde todtlichen schaden der Pestilentz vnde ist das aller gewisthe Preseruatiuum dass man haben magk.

10 Item Ruta gesoten mit essig vnnnd den genucz benympt das we der brust vnnnd vortreibet den hust vnde ist gutt dene die cynen kurtzenn odam han vnde heilet dass geswer vff der lungen genant Peripleumonia do von dem menschen entsteet vnnnd herkompt die darre.

Item dass Saff von ruten gelossen yn dy nasse locher benympt das blutten. Widdervmb dass Saff von aternesseln machet blutten.

15 Item Trefflich ist rute vor vorgift. Alzo Serapio Von dem wesel wen sie sich mit der slangenn beisset szo isset Mustela ruten Sso mag ir dy Slange keinn gift zcufigenn.

Item Ruten gesoten yn öle vnde dass warm yn die oren gelossen vortreibet die worme dor ynne.

20 Item Ruten Saff mit Lossen (?) ole gemiscet vnd mit essig vnnnd dass heubt do mitte gestrichen benympt dass heubtes we.

Vrtica nesselenn.

25 Item Nesselen Samen ist gutt calculosis. Dyascorides spricht Nesselenn gesotenn vnn die gestossenn vnd ussen vff den bauch geleit weicht yn.

Item Nesselenn gesoten vnde die haut do mitte gewaschen heilet den bossen grind.

30 Item der Samen gestossen vnde gemischet mit honig vnde alzo genucz mit wyn benympt den alten hust vnnnd raumet dy brust in warheit.

Item der Same gepuluert vnd gestrawet yn den schaden Cancer genant vortreibet den zcuhan.

Item eyter nesseln bleter in öle gesoten heilet wunden von dem
dobenden hunde gebissenn zcuhan.

Item welcher nicht vele gehorenn mag der szal der selbigen nesseln
wurtzelen yn weyn adder yn wasser syeden vnde das trincken
ess hilff yn behende.

5

Item ater Nesseln gestossen unt salcz vnde mit eiger totorn vnd mit
honer Smalcz gemenget vnde yn den sweis bade die haut do
mit bostrichenn zwe adder mall vortreibt dass Jucken vnnd
rude hutt.

Polegium polley.

10

Item wer sich am leybe krymert der siede polley mit wasser vnnd
wasche sich mit dem warmen wasser iss vorget ym vnde wirt
darna nicht rudigk.

Item Polley gepuluert vnde dy zcene do mitte gereben vortreibt alle
smertzen do von.

15

Item Polley mit honig vnde salcz gemist hilff den lamen vnnd zcu-
brochen gelydern do uff geleit.

Item Polley gesoten yn weyn ist gutt genucz widder den snoppen
vnde widder den fluss dess heubtes.

Endlich findet sich auf Blatt a₄^b Folgendes:

Item Sueramp same genuczet vortreibt die spolworme vnde ist auch
gut vor vorgifft besunder vor das beisenn der vorgiftigenn
thire.

Convenit Acetosa calido stomacho item iecuri cordi. excitat
appetitum comedendi. Item Succus immissus auribus pellit tu-
morem die gefwolft Item Succus valet contra fluxum sanguinis
alio nomine dissenteria. Nota quod aqua acetosa mixta Teriaco
valet maximum contra pestem.

4. Noch ein Buch der Universitätsbibliothek zu Upsala ist, wenn
auch nur durch einzelne Worte als Randnoten, durch Copernicus
Hand ausgezeichnet. Es ist dies der Band mit Signatur „31. V. 3.
140.“ Dieser Band enthält:

1. „PETRVS || DE || MONTAGANA“, Am Ende (Blitt. 148^a) „Im-
Toll LXII.

„pressum Uenetijs per Ioannem ⁊ Gregoriū ⁊ de Gregorijs fratres.
„Anno domini. M. ccccc. die ⁊ xxviij. Martis.“¹¹⁾).

2. „Practica Ioānnis anglici physici clarissimi ab ⁊ opis prestātia
„Rosa medicine nūcupata.“ Am Ende Papie 1492. die. 24. Iannarij.
„ ⁊ Ioānesantonijs birreta ipressioni.“¹²⁾

3. „Practica Antonij Guainerij papiensis ⁊ doctoris preclarissimi.“
Am Ende: „Impressuꝝ opus mandato ⁊ expensis Nobilis viri Du'i ⁊
„Octauiani Scoti ciuis Modœtiensis. 1496. 16^o. Kalen. ⁊ Martias. Per
„Bonetū Locatellū Bergomensē.“

Auf dem ersten Blatte des Montagana steht geschrieben:

„Liber V.
„Cap'li Var
„mi'en.“

Hie und da kurze Noten auf den Inhalt aufmerksam machend von
Copernicus Hand. Unter das Druckerzeichen auf dem letzten Blatte
des Guainerius hat er z. B. geschrieben:

„Signum pestium magnum dominum habet in prusia.“

VI. Einige neue Daten für das Leben des Copernicus.

Der Güte des Herrn Domvicar Dr. Woelky zu Frauenburg ver-
danke ich die Mitteilung zweier Actenstücke, welche er im culmer
Diöcesanarchiv entdeckt hat. Von ihnen ist mir erlaubt worden,
dasjenige mitzuteilen, was speciell Copernicus betrifft.

Im ersten Actenstücke transsumiert und beglaubigt Georg von
Delau, Domcantor, General-Vicar und Official von Ermland, vierzehn
die Besitzungen des Culmer Bistums betreffende Urkunden. Frauen-
burg 1514, October 7.

Am Schlusse des Actenstücks heisst es:

„Acta sunt hec Warmie in presentia venerabilium
„dominorum Andree de Cletz custodis, doctore

11) Dieses Buch habe ich bei Hain vergeblich gesucht.

12) Hain, Repertorium, No. 1108. Aus seiner Beschreibung folgt,
dass dem Exemplare der upsaler Bibliothek Blatt 1—4 fehlen.

13) Hain No. 8099.

„Nicolao Copernig, canonicis (!) ecclesie War-
 „miensis, in edibus consuete nostre residentie, die
 „septima Octobris Anno domini M. V^c decimo quarto.“

Im zweiten Documente transsumiert derselbe Georg von Delau, Domcantor und General-Vicar und Official von Ermland, auf Bitten des Philipp Holkener, Kanzlers des Bischofs Johannes von Culm, 1. die Schenkungsurkunde des Königs Alexander über Culm, Papau und Althaus an den Bischof von Culm vom 26. Mai 1505 und 2. die Urkunde Sigismunds I vom 19. März 1507, worin er die Einkünfte von Papau und Althaus dem B. Nicolaus reserviert. Frauenburg 1514, October 7.

Am Schlusse heisst es in dem Documente:

„Acta sunt hec Warmie in presentia venerabilium
 „dominorum Andree de Cletz custodis, doctore
 „Nicolao Copernig canonico ecclesie Warmiensis
 „in edibus consuete nostre residentie, die septima
 „Octobris Anno domini Millesimo quingentesimo
 „decimo quarto.

In dem schon früher benutzten Manuscriptbande der Universitätsbibliothek zu Upsala, in welchem sich die Gutachten des Copernicus über den Preis des Brodes befinden, sind noch zwei Stücke (No. 6 u. 7. des Bandes), welche ebenfalls zwei neue Daten für das Leben des Copernicus bieten. Das erste umfasst 10 Blatt und ist betitelt:

„Artikel in gemeyner Tagfart
 „zu Heilsberg am xxij tage Sep-
 „tembris Im jar 1526 berot-
 „schlagt bewilliget vnd ym gantzen
 „Bischoffthum Ermland ynhelliglich
 „vnd veste zcu halten
 „beschlossen.“

Dasselbe beginnt folgendermassen:

„Nachdem wir Mauritius von Gotts gnaden Bischof, Johannes
 „Ferber Dechan, Tidemannus gise Custos, Johannes Sculteti
 „Archidiacon, Albertus Bischoff, Nicolaus Copernic Thumhern
 „vnd ganz Capitel der kirchen zcu Ermland vormerkt etc. etc. ¹⁾“

Auf der Rückseite des letzten Blattes steht als Art von Adresse

„Velⁱ. Ca^{1o}. ecclⁱe Varmi^en.“

1) Hiervon befindet sich ein abgekürzter Abdruck ebenfalls in dem obigen Manuscripte. Eine sehr späte Abschrift im Bischöflichen Archive zu Frauenburg.

Unmittelbar darauf folgt eine Piece welche auf der ersten Seite betitelt ist:

„Landsordnung des Herczogthums vnd Bisschoftums
„zu bartenstein beschlossen.“

Auf der Rückseite dieses ersten Blattes beginnt das Actenstück, welches 21 Blatt umfasst, in folgender Weise:

„Landsordnung Zwischen dem Erwidigen in got herren Maurician Bischöfe, seinem Wirdigen Capitel zcu Ermlant, vnd dem „durchlauchtigen hochgebornen fursten vnd hrrnn Albrecht Marggrafen „zcu Brandenburg vnd herzcoge in Preussen ica Im Jare M. D. x „xviij Montag nach visitationis Marie zcu Bartenstein, vfericht, beschloszen, bewilliget vnd vorglichen.“

„Wir Mauricius von gots gnath bischoff, Johan Ferber dechan, „Tidemannus gise custos, Albertus Bischoff, Nicolaus Copernic Dhumherrn vnd ganz Capitel etc. etc.“

Hier eine Zusammenstellung der neuen Daten welche sich für die Regesta Copernicana, wie sie Hipler in seinem Spicilegium Copernicanum²⁾ gesammelt hat, aus unsern Untersuchungen sowohl in den „Reliquiæ Copernicanæ als diesen „Inedita Copernicana“ ergeben haben. Ich gebe dabei den einzelnen Daten die nach Hiplers Zusammenstellung ihnen zukommenden Nummern in Klammern unter Beifügung von Indices:

- 1500 1. (7₁). 1500 anno completo. Astronomische Beobachtungen. (R. C. S. 30).
- 1541 2. (26₁). 1514. 7. October unterzeichnet „Nicolaus Copernig canonicus ecclesie Warmiensis“ zu Frauenburg zwei durch Georg von Delau ausgestellte Urkunden. (I. C. S. 371).
- 1525 3. (69₁). 1525. 4. Juli beobachtet Copernicus eine Mondfinsterniss zu Frauenburg. (I. C. S. 348).
- 1526 4. (70₁). 1526. 22. September. „Nicolaus Copernic Thumherr“ ist bei gemeiner Tagfahrt zu Heilsberg zugegen. (I. C. S. 371).
- 1528 5. (76₁). 1528. Dienstag nach Visitations Marie (7. Juli) „Nicolaus Copernic Dhumherr“ nimmt Theil an der Berathung der Landesordnung des Herzogthums Preussen und Bisthums Ermland zu Bartenstein. (I. C. S. 372).
- 1531 6. (88₁). 1531. Copernicus giebt seine Gutachten über die Brodtaxe zu Allenstein, Heilsberg etc. (I. C. S. 352—353).

2) a. a. O. Seite 265—292.

7. (97₁). 1532. beobachtet Copernicus das Apogäum der Venus. 1532 (R. C. S. 29).

8. (99₁). 1533. Juli und August beobachtet Copernicus den 1533 grossen Cometen des genannten Jahres. (I. C. S. 344—345).

9. (99₂). 1533. etwa. Copernicus schreibt seinen *Commentariolus de hypothesibus motuum cælestium a se constitutis*. (I. C. S. 117—118).

10. (116₁). 1537. 8. September. Astronomische Beobachtung 1537 zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

11. (117₁). 1537. 10. October. Astronomische Beobachtungen zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

12. (117₂). 1537. 12. October. Astronomische Beobachtungen zu Frauenburg, (I. C. S. 338).

13. (117₃). 1537. 16. October. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

14. (117₄). 1537. 31. October. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

15. (117₅). 1537. 3. November. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

16. (117₆). 1537. 7. November. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

17. (118₁). 1537. 12. November. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

18. (118₂). 1537. 13. November. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

19. (118₃). 1537. 15. November. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 339).

Es sind also 19 neue Daten für die Geschichte des Copernicus gegeben worden. Die Beobachtungen aus 1537 fallen in eine für Copernicus wichtige Zeit, in die nämlich, wo es sich um die Wahl des Dantiscus zum Bischofe von Ermland handelte, und Copernicus selbst auf der Wahlliste stand.

XXV.

Ueber ebene Stromcurven von demselben elektromagnetischen Potential.

Von

Anton Wassmuth,

k. k. a. o. Universitäts-Professor in Czernowitz.

Das elektromagnetische Potential eines Stromes von der Stärke Eins ist bekanntlich der körperliche Winkel, unter dem vom angezogenen Punkte aus der Strom erscheint. Zieht man somit auf der Oberfläche eines Kegels, dessen Mittelpunkt mit dem magnetischen Punkte zusammenfällt, eine Reihe von geschlossenen Stromcurven, die alle Lagen der den Kegel erzeugenden Geraden durchschneiden d. i. vollständig um den Kegel herumgehen, so sieht man von der Mitte aus alle diese Curven unter denselben Winkel d. h. alle diese Curven besitzen dasselbe elektromagnetische Potential. Das Gleiche tritt ein, wenn auf der Oberfläche des Kegels eine Reihe von Curven gezogen werden, die wohl geschlossen sind, aber um den Kegel nicht herumgehen; auch jetzt haben Alle das gleiche Potential, nämlich Null.

In beiden Fällen überzeugt man sich leicht, dass trotz der Gleichheit des Potentials die einwirkenden Kräfte im Allgemeinen verschieden sein werden. Da nämlich letztere als die Differentialquotienten des Potentials nach irgend einer Richtung genommen auftreten, so hat man einfach dem magnetischen Punkt irgend eine unendlich kleine Verrückung in dieser Richtung zu erteilen und für jede Stromcurve die Zunahme des körperlichen Winkels (auf die Einheit der Verrückung reducirt) zu bestimmen, wodurch eben die Kraft nach dieser Richtung hin gegeben ist. Selbstverständlich hätte man auch, statt

den magnetischen Punkt zu bewegen, diesen Punkt festhalten und dafür die Stromcurven in entgegengesetzter Richtung verschieben können. Immer wird man, wie erwähnt, finden, dass trotz der Gleichheit des Potentials die Kräfte im Allgemeinen doch verschieden sind, wenn auch zwischen diesen Kräften selbst Relationen bestehen werden. Solche Beziehungen nun zwischen den elektromagnetischen Kräften von Stromcurven gleichen Potentials aufzulösen, besonders dann, wenn die Stromcurven selbst in gewisser Abhängigkeit von einander sind, das soll die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung sein.

Zu dem Ende werden zunächst die gewöhnlichen Formeln für die elektromagnetischen Componenten eines geschlossenen Raumes mittelst Polarcoordinaten passend transformirt und daran anschließend ganz allgemein die Schnitte von ähnlichen Flächen behandelt. Es zeigt sich, dass die Wirkungen der so entstandenen Stromcurven im umgekehrten Verhältnisse der Aehnlichkeit stehen und sämtliche Resultirenden dieselbe Richtung haben. Gestützt darauf wird eine Regel angegeben, einen Strom durch einen zweiten, ähnlich gelegenen, von anderer Stromstärke in seiner Wirkung auf das Centrum zu ersetzen.

Im zweiten Teile werden ausschliesslich ebene Schnitte eines sonst beliebigen, geschlossenen Kegels betrachtet und die elektromagnetischen Componenten irgend eines solchen Schnittes als abhängig von fünf Constanten des Kegels und als lineare Functionen der Richtungs-cosinusse des Perpendikels auf irgend eine Ebene dargestellt. Es wird ferner bewiesen, dass es in jedem Kegel drei auf einander senkrecht stehende Lagen der schneidenden Ebene gibt, für welche die Resultirende auf der Ebene des Stromes senkrecht steht, und dass diese drei Fälle (Hauptschnitte) dem Maximum oder Minimum der Resultirenden entsprechen. Weiter wird gezeigt, dass sich jeder ebene Schnitt in seiner elektromagnetischen Wirkung auf den Scheitel des Kegels durch die entsprechenden drei Hauptschnitte ersetzen lasse, falls letztere von Intensitäten durchflossen gedacht werden, die gleich sind den Cosinussen jener (spitzen) Winkel, welche der erwähnte ebene Schnitt mit den drei Hauptschnitten einschliesst. Dadurch sind die Wirkungen verschiedener Schnitte leicht vergleichbar gemacht. Die Analogie der aufgestellten Sätze mit bekannten geometrischen Untersuchungen ist unverkennbar. In der That wird nun weiter bewiesen, dass sich die Bestimmung der Wirkungen sämtlicher ebenen Schnitte mit gleicher Entfernung vom Scheitel auf die Construction eines gewissen Ellipsoids (Centralellipsoids) um den Scheitel als Mittelpunkt zurückführen lasse. Der reciproke Wert irgend eines Radius-Vectors dieses Ellipsoids ist nämlich proportional der Resultirenden jenes Schnittes, der senkrecht auf diesen Radius-

Vector geführt wurde. Die Grösse und Lage der Hauptaxen des Centralellipsoids sind durch eine kubische Gleichung mit drei reellen Wurzeln gegeben. Durch die angegebene Construction wird das Problem ein geometrisches und lassen sich daraus mit Leichtigkeit die oben erwähnten Sätze sowie vieles Andere ableiten.

Im dritten Teile werden ebene Schnitte einer Pyramide betrachtet, die elektromagnetischen Kräfte direct abgeleitet und ihre Uebereinstimmung mit den allgemeinen Gleichungen gezeigt.

I.

Wir lassen den Mittelpunkt eines beliebigen, einfach geschlossenen Kegels mit dem Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems zusammenfallen, versetzen auch dorthin den magnetischen Punkt von der Masse Eins und legen überdies den Kegel so, dass er um die Axe der x herumgeht. Zieht man nun auf der Oberfläche des Kegels eine geschlossene Curve, die ebenfalls ganz um die x Axe herumgeht und sind x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes dieser Curve und r die Entfernung des Punktes vom Ursprung, so sind die elektromagnetischen Componenten X, Y, Z in Bezug auf den Ursprung bekanntlich gegeben durch:

$$X = \int \frac{y \partial z - z \partial y}{r^3}$$

$$Y = \int \frac{z \partial x - x \partial z}{r^3}$$

$$Z = \int \frac{x \partial y - y \partial x}{r^3}$$

Führt man nun mittelst der Relationen:

$$x = r \cos \psi$$

$$y = r \sin \psi \cos \omega$$

$$z = r \sin \psi \sin \omega$$

Polarcoordinaten ein, so erhält man:

$$X = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \psi}{r} \partial \omega$$

$$Y = - \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(\sin \omega \frac{\partial \psi}{\partial \omega} + \sin \psi \cos \psi \cos \omega \right) \partial \omega \quad (1)$$

$$Z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(\cos \omega \frac{\partial \psi}{\partial \omega} - \sin \psi \cos \psi \sin \omega \right) \partial \omega$$

Die Gleichung des Kegels liefert ψ als Function von ω , während uns die Gleichung der Fläche, durch deren Schnitt die Stromcurve entstanden ist, das entsprechende r giebt. Wird ein und dieselbe Fläche mehrmals getroffen, so sind dem r eben verschiedene Werte beizulegen.

Lassen wir nun den Kegel von zwei ähnlichen Flächen geschnitten werden, so dass also die Coordinaten des einen Punktes zu denen des entsprechenden zweiten Punktes in dem constanten Verhältnisse $1:k$ stehen, so verhalten sich die zugehörigen r ebenso und wie uns ein Blick auf die Formeln (1) lehrt, stehen somit auch die elektromagnetischen Kräfte, die von zwei ähnlichen Curven gleichen Potentials ausgeübt werden, in dem angegebenen aber umgekehrten Verhältnisse d. h. es gilt:

$$X:X_1 = Y:Y_1 = Z:Z_1 = R:R_1 = k:1$$

wenn R und R_1 die Resultirenden bezeichnen.

Zugleich hat man für die Richtungscosinusse von R und R_1 :

$$\frac{X}{R} = \frac{X_1}{R_1}, \quad \frac{Y}{R} = \frac{Y_1}{R_1} \quad \text{und} \quad \frac{Z}{R} = \frac{Z_1}{R_1}$$

wodurch also ausgesprochen wird, dass die Resultirenden ähnlicher Stromcurven dieselbe Richtung haben. Fasst man Beides zusammen, so ergibt sich der Satz:

Wird ein Kegel von zwei oder mehreren ähnlichen Flächen geschnitten, so stehen die elektromagnetischen Kräfte der entstandenen Stromcurven (in Bezug auf den Scheitel des Kegels) in dem umgekehrten Aehnlichkeitsverhältnisse und die Resultirenden haben sämtlich dieselbe Richtung.

Beispiele hierzu liefern die Schnitte paralleler Ebenen, concentrischer Kugeln etc.

Wie unschwer einzusehen, gilt dieses Gesetz auch dann noch, wenn die Stromcurven nicht um den Kegel herumgehen, sondern auf seiner Oberfläche liegen; es ändern sich eben die Integrationsgrenzen.

Von diesem Satze lässt sich eine einfache Anwendung geben. Soll nämlich die zweite, ähnliche Stromcurve dieselbe Wirkung auf das Aehnlichkeitscentrum wie die erste ausüben, so braucht man nur darin, da die Kräfte den Stromstärken direct proportional sind, die Intensität k mal grösser zu nehmen, wenn $1:k$ das Aehnlichkeitsverhältniss bedeutet.

II.

Wir wollen nun ausschliesslich ebene Schnitte behandeln und schreiben deshalb die Gleichung irgend einer Ebene in der Normalform:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - q = 0$$

wo also q das vom Ursprunge auf die Ebene gefällte Perpendikel und α, β, γ dessen Richtungscosinusse bedeuten. Drückt man nun x, y, z durch die obigen Polarcoordinaten aus, so findet man:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} (\alpha \cos \psi + \beta \sin \psi \cos \omega + \gamma \sin \psi \sin \omega)$$

und dies ist der Wert für $\frac{1}{r}$, den wir in die Gleichungen (1) einzusetzen haben. Man erhält so die X, Y, Z als lineare Functionen von den Richtungscosinussen α, β, γ d. h. es ist:

$$\begin{aligned} qX &= \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 \\ qY &= \alpha A_2 + \beta B_2 + \gamma C_2 \\ qZ &= \alpha A_3 + \beta B_2 + \gamma C_3 \end{aligned} \quad (2)$$

worin die neun Grössen $A_1, B_1 \dots C_3$ nur von der Natur des Kegels abhängen *) und folgende Werte haben:

*) Wird ein einfach geschlossener Kegel durch eine nicht durch seinen Mittelpunkt gehende Ebene geschnitten, so werden die erzeugenden Geraden entweder auf der einen oder der anderen Kegelhälfte aber nur einmal von der Ebene getroffen. Liegt die Schnittfigur ganz auf der einen Kegelhälfte, so erscheint ihr Potential als eine geschlossene, ganz um die x Axe herumgehende Figur, deren Begrenzungscurve sich nicht selbst schneidet. Es ist also hier nach ω von 0 bis 2π zu integrieren. Dasselbe tritt auch ein, wenn die Schnittfigur zum Teile auf der zweiten Kegelhälfte liegt. Letzterer Schnitt kann nämlich in seiner Wirkung auf den Mittelpunkt stets durch einen entsprechenden Stromleiter auf der ersten Kegelhälfte ersetzt werden, so dass sein Potential zusammen mit dem des ersten eine Fläche von der vorigen Form gibt. Was über die Grenzen für das Potential gesagt wurde, gilt natürlich auch von den Kräften als den Derivirten.

Gehören schliesslich zu einem und demselben ω mehrere ψ (eine ungerade Anzahl) $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_{2n+1}$, so sind die Grenzen für ψ : 0 $\psi_1 \dots \psi_{2n+1}$, und der Ausdruck für das Potential wird:

$$V = \int_0^{2\pi} \partial \omega \int \sin \psi \partial \psi = 2\pi - \int_0^{2\pi} (\cos \psi_1 - \cos \psi_2 + \cos \psi_3 - \dots) \partial \omega$$

und ebenso werden die Ausdrücke für $X, Y, Z, A_1 \dots$ aus mehreren Gliedern bestehen; so ist z. B.

$$B_1 = \int_0^{2\pi} (\sin \psi_1^3 - \sin \psi_2^3 + \dots) \cos \omega \partial \omega \text{ u. s. w.}$$

Auch erhellt, dass die Gleichungen (4) richtig bleiben.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi \cos \psi \partial \omega, \quad B_1 = \int_0^{2\pi} \sin^3 \psi \cos \omega \partial \omega, \quad C_1 = \int_0^{2\pi} \sin^3 \psi \sin \omega \partial \omega \\
 A_2 &= - \int_0^{2\pi} \cos \psi \sin \omega \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \partial \omega - \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos^2 \psi \cos \omega \partial \omega \\
 B_2 &= - \int_0^{2\pi} \sin \psi \sin \omega \cos \omega \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \partial \omega - \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi \cos \psi \cos^2 \omega \partial \omega \\
 C_2 &= - \int_0^{2\pi} \sin \psi \sin^2 \omega \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \partial \omega - \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi \cos \psi \sin \omega \cos \omega \partial \omega \quad (3) \\
 A_3 &= \int_0^{2\pi} \cos \psi \cos \omega \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \partial \omega - \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos^2 \psi \sin \omega \partial \omega \\
 B_3 &= \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos^2 \omega \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \partial \omega - \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi \cos \psi \sin \omega \cos \omega \partial \omega \\
 C_3 &= \int_0^{2\pi} \sin \psi \sin \omega \cos \omega \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \partial \omega - \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi \cos \psi \sin^2 \omega \partial \omega
 \end{aligned}$$

Wie man sich leicht überzeugt, bestehen zwischen diesen neun Grössen folgende vier Relationen:

$$\begin{aligned}
 A_3 &= C_1 \\
 B_1 &= A_2 \\
 C_2 &= B_3 \\
 A_1 + B_2 + C_3 &= 0
 \end{aligned} \quad (4)$$

So hat man z. B.

$$\begin{aligned}
 B_1 - A_2 &= \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \omega \partial \omega + \int_0^{2\pi} \sin \omega \frac{\partial \sin \psi}{\partial \omega} \partial \omega \\
 &= \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \omega \partial \omega + \sin \omega \sin \psi \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \omega \partial \omega = 0
 \end{aligned}$$

da ψ und ω nach einem vollständigen Umlauf wieder denselben Wert annehmen.

Mit Hilfe der Formeln (2) und (4) findet man endlich die Resultirende R durch die Gleichung:

$$\eta^2 R^2 = \alpha^2 a_{11} + \beta^2 a_{22} + \gamma^2 a_{33} + 2\alpha\beta a_{12} + 2\beta\gamma a_{23} + 2\gamma\alpha a_{31} \quad (5)$$

worin die Werte von $a_{11} \dots a_{31}$ gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \\ a_{22} &= B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 = A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \\ a_{33} &= C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = A_3^2 + B_3^2 + C_3^2 \\ a_{12} &= C_1 C_2 - B_1 C_3 = C_1 B_3 - B_1 C_3 \\ a_{23} &= B_1 C_1 - A_1 C_2 = A_2 C_1 - A_1 C_2 \\ a_{31} &= B_1 C_2 - B_2 C_1 = B_3 A_2 - B_2 A_3 \end{aligned} \quad (6)$$

Die Richtungs cosinusse der Resultirenden sind durch $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$ und $\frac{Z}{R}$ dargestellt und sind selbstverständlich unabhängig von q .

Hieran reiht sich die Beantwortung der Frage, wann die Resultirende auf der zugehörigen Ebene senkrecht stehe? Diese Bedingung wird durch folgende drei Gleichungen ausgedrückt:

$$X = R\alpha, \quad Y = R\beta \quad \text{und} \quad Z = R\gamma \quad (7)$$

oder

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma}$$

zwei Gleichungen, die scheinbar auf eine Endgleichung vom vierten Grade führen. Nimmt man für α, β, γ Kugelkoordinaten und wendet man das gewöhnliche Eliminationsverfahren an, so gelangt man nach etwas umständlicher Rechnung zu einer Gleichung dritten Grades, die also mindestens eine reelle Wurzel hat. Es lässt sich indes leicht zeigen, dass man es hier stets mit drei reellen Wurzeln zu tun hat, wenn man nur statt drei, vier Unbekannte α, β, γ und qR einführt. Die Gleichungen (7) lassen sich nämlich schreiben:

$$\begin{aligned} \alpha(A_1 - qR) + \beta B_1 &+ \gamma C_1 &= 0 \\ \alpha B_1 &+ \beta(B_2 - qR) + \gamma C_2 &= 0 \\ \alpha C_1 &+ \beta C_2 &+ \gamma(C_3 - qR) = 0 \end{aligned}$$

woraus also folgt, dass die Determinante Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 - qR, & B_1, & C_1 \\ B_1, & B_2 - qR, & C_2 \\ C_1, & C_2, & C_3 - qR \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

sein muss, wozu noch die Bedingung: $A_1 + B_2 + C_3 = 0$ gehört. Diese kubische Gleichung hat nun bekanntlich stets drei reelle Werte für qR , somit gibt es auch stets drei Werte für α, β, γ d. h. es gibt stets drei Lagen der schneidenden Ebene (drei Hauptschnitte), für welche die Resultirende auf der Ebene des Stromes senkrecht steht. Zugleich ist hinreichend bekannt, dass diese drei Lagen auf einander senkrecht stehen müssen.

Zu demselben Ziele wären wir gelangt, wenn wir die Frage nach dem Maximum oder Minimum der Resultirenden R für verschiedene α, β, γ beantwortet hätten. Mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0$ haben wir nämlich, wenn K eine Grösse bedeutet, die sich nachträglich gleich $q^2 R^2$ herausstellt, die Function V

$$V = (a_{11} - K)\alpha^2 + (a_{22} - K)\beta^2 + (a_{33} - K)\gamma^2 + 2\alpha\beta a_{12} + 2\beta\gamma a_{23} + 2\alpha\gamma a_{31}$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wodurch wir ähnlich wie oben finden, dass die Determinante D

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - K, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22} - K, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} - K \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

sein muss. Diese Bedingung $D = 0$ kommt nun auf die früher aufgestellte $\mathcal{A} = 0$ zurück. Man findet nämlich leicht, dass die Determinante D dargestellt wird als Product von zwei Determinanten durch:

$$D = \begin{vmatrix} A_1 - qR, & B_1, & C_1 \\ B_1, & B_2 - qR, & C_2 \\ C_1, & C_2, & C_3 - qR \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_1 + qR, & B_1, & C_1 \\ B_1, & B_1 + qR, & C_2 \\ C_1, & C_2, & C_3 + qR \end{vmatrix}$$

von denen die erste Determinante eben \mathcal{A} ist und die zweite aus der ersten durch die Aenderung des Zeichens von qR hervorgeht. Wäre diese zweite Determinante für sich gleich Null, so hiesse dies jenen Fall ins Auge fassen, in dem die Richtungscosinus α, β, γ negativ wären und somit auch q die entgegengesetzte Richtung hätte.

Will man die Determinante D vermeiden, so kann man die Function $U = X^2 + Y^2 + Z^2 - K(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1)$ in Bezug auf ihr Maximum oder Minimum untersuchen, die Differentialquotienten der Componenten mit Hilfe der Gleichungen (2) ausdrücken, $k = R^2$ bestimmen, wodurch man schliesslich wieder auf $\mathcal{A} = 0$ geführt wird.

Es ist somit, wenn wir Alles zusammenfassen, folgender Satz bewiesen: In jedem geschlossenen Kegel gibt es stets drei auf einander senkrecht stehende Lagen der schneidenden Ebene, für welche die Resultirende auf der Ebene des Stromes senkrecht steht, und fallen diese drei Fälle mit der Frage nach dem Maximum oder Minimum der Resultirenden zusammen.

Wir wollen die so bestimmten Schnitte — Hauptschnitte und die Richtungen der zugehörigen Perpendikel — Hauptrichtungen nennen.

Sind qR_1, qR_2 und qR_3 die drei Wurzeln der Gleichung $\mathcal{A} = 0$, so findet man wegen $A_1 + B_2 + C_3 = 0$ die Relation $R_1 + R_2 + R_3 = 0$,

wodurch ein Anhaltspunkt wegen des Zeichens der Resultirenden gegeben ist.

Um nun auch die Schnitte einer zweiten Ebene in gleichem Abstände q vom Scheitel zu betrachten, seien λ , μ und ν die Richtungscosinusse des Perpendikels auf diese zweite Ebene und X' , Y' und Z' die elektromagnetischen Componenten in Bezug auf den Mittelpunkt des Kegel, so dass also:

$$qX' = \lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1$$

$$qY' = \lambda B_1 + \mu B_2 + \nu C_2$$

und

$$qZ' = \lambda C_1 + \mu C_2 + \nu C_3$$

ist. Bedeuten aber δ_1 , δ_2 , δ_3 die Richtungscosinusse des Perpendikels in Bezug auf die eben bestimmten Hauptrichtungen, so wird

$$\delta_1 = \lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1$$

$$\delta_2 = \lambda \alpha_2 + \mu \beta_2 + \nu \gamma_2$$

$$\delta_3 = \lambda \alpha_3 + \mu \beta_3 + \nu \gamma_3$$

sein, wenn die verschiedenen Werte von α , β , γ , die Richtungscosinusse für die einzelnen Hauptrichtungen darstellen. Da nun bekanntlich:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = +1$$

ist, so erhält man:

$$\lambda = \alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2 + \alpha_3 \delta_3$$

$$\mu = \beta_1 \delta_1 + \beta_2 \delta_2 + \beta_3 \delta_3$$

$$\nu = \gamma_1 \delta_1 + \gamma_2 \delta_2 + \gamma_3 \delta_3$$

welche Relationen man auch unmittelbar hätte niederschreiben können. Mit diesen Werten für λ , μ , ν ergeben sich die Componenten:

$$qX' = \delta_1(\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1) + \delta_2(\alpha_2 A_1 + \beta_2 B_1 + \gamma_2 C_1) + \delta_3(\alpha_3 A_1 + \beta_3 B_1 + \gamma_3 C_1)$$

$$qY' = \delta_1(\alpha_1 B_1 + \beta_1 B_2 + \gamma_1 C_2) + \delta_2(\alpha_2 B_1 + \beta_2 B_2 + \gamma_2 C_2) + \delta_3(\alpha_3 B_1 + \beta_3 B_2 + \gamma_3 C_2)$$

$$qZ' = \delta_1(\alpha_1 C_1 + \beta_1 C_2 + \gamma_1 C_3) + \delta_2(\alpha_2 C_1 + \beta_2 C_2 + \gamma_2 C_3) + \delta_3(\alpha_3 C_1 + \beta_3 C_2 + \gamma_3 C_3)$$

die verschiedenen α , β , γ genügen aber den neun Gleichungen:

$$\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1 = qR_1 \alpha_1 = qX_1$$

$$\alpha_2 A_1 + \beta_2 B_1 + \gamma_2 C_1 = qR_2 \alpha_2 = qX_2$$

$$\alpha_3 A_1 + \beta_3 B_1 + \gamma_3 C_1 = qR_3 \alpha_3 = qX_3$$

$$\alpha_1 B_1 + \beta_1 B_2 + \gamma_1 C_2 = q R_1 \beta_1 = q Y_1$$

• • • • •

• • • • •

wo also X_1, Y_1, Z_1 die Componenten des R_1 , X_2, Y_2, Z_2 die des R_2 u. s. w. bedeuten.

Man erhält somit:

$$\begin{aligned} X' &= \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2 + \delta_3 X_3 \\ Y' &= \delta_1 Y_1 + \delta_2 Y_2 + \delta_3 Y_3 \\ Z' &= \delta_1 Z_1 + \delta_2 Z_2 + \delta_3 Z_3 \end{aligned} \quad (10)$$

so dass also die Komponenten irgend eines Schnittes als lineare Functionen der Komponenten der Hauptschnitte erscheinen.

Mit Hilfe des im ersten Teile über ähnliche Curven Gesagten sowie des eben aufgestellten Gesetzes ist es somit immer möglich, sobald die Componenten für die drei Hauptschnitte bestimmt sind, die drei Componenten irgend eines beliebigen ebenen Schnittes zu ermitteln.

Da ferner:

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = R_1R_2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = 0$$

u. s. w. ist, findet man schliesslich für die Resultierende R' :

$$R'_3 = \delta_1^2 R_1^2 + \delta_2^2 R_2^2 + \delta_3^2 R_3^2 \quad (11)$$

denkt man sich also statt der Intensitäten Eins in den betreffenden Hauptschnitten der Reihe nach die Stromstärken δ_1 , δ_2 und δ_3 , so ersetzen jetzt die Hauptschnitte den erwähnten ebenen Schnitt mit der Resultirenden R' , oder es folgt der Satz:

Jeder ebene Schnitt lässt sich in seiner elektromagnetischen Wirkung auf das Centrum des Kegels durch die drei in gleicher Entfernung liegenden Hauptschnitte ersetzen, falls nur letztere von Intensitäten durchflossen gedacht werden, die gleich sind den Richtungs-cosinussen des Perpendikels auf die Ebene in Bezug auf die Hauptrichtungen.

Haben wir somit ausser den drei Hauptrichtungen noch weitere drei auf einander senkrecht stehende Richtungen, deren Richtungs-cosinusse in Bezug auf die Hauptrichtungen respective: $\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3,$

$\xi_1 \xi_2 \xi_3$ sein mögen, so sind die zugehörigen Resultirenden R' , R'' und R''' bestimmt durch:

$$R'^2 = R_1^2 \delta_1^2 + R_2^2 \delta_2^2 + R_3^2 \delta_3^2$$

$$R''^2 = R_1^2 \epsilon_1^2 + R_2^2 \epsilon_2^2 + R_3^2 \epsilon_3^2$$

$$R'''^2 = R_1^2 \zeta_1^2 + R_2^2 \zeta_2^2 + R_3^2 \zeta_3^2$$

woraus durch Addition:

$$R'^2 + R''^2 + R'''^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \quad (12)$$

d. h. die Summe der Quadrate der Resultirenden je dreier auf einander senkrecht stehender Schnitte (von gleicher Entfernung q) ist constant.

So liessen sich nun auch eine Reihe von Sätzen ableiten, zu denen man indes auf geometrischen Wege viel schneller gelangt. Multiplicirt man nämlich die Gleichung (5) mit q^2 , wo q eine Linie bedeutet, die vom Centrum ausgehend in ihrer Richtung mit q zusammenfällt und nennt ξ , η , ζ die Coordinaten des Endpunktes dieser Linie, so dass $\xi = q\alpha$, $\eta = q\beta$, $\zeta = q\gamma$ ist, so wird:

$$q^2 R^2 \cdot q^2 = a_{11} \xi^2 + a_{22} \eta^2 + a_{33} \zeta^2 + 2a_{12} \xi \eta + 2a_{23} \eta \zeta + 2a_{13} \xi \zeta$$

die Gleichung eines Ellipsoids, wenn noch $q^2 \cdot q^2 R^2 = 1$ d. i.

$$q = \frac{1}{qR} \quad (13)$$

genommen wird. Wie bei den Untersuchungen über die Trägheitsmomente möge auch dieses Ellipsoid den Namen: Centralellipsoid führen. Dann folgt der Satz:

Um den Scheitel des Kegels als Mittelpunkt lässt sich somit ein Ellipsoid (Centralellipsoid) construiren von der Art, dass der reciproke Wert irgend eines Radius-Vectors das Product aus der Entfernung q in die Resultirende R eines in dieser Distanz geführten Schnittes darstellt.

Hat q ein Maximum oder Minimum, so findet bei R dass Umgekehrte statt; man findet somit die drei Halbaxen des Centralellipsoids sowie ihre Lage durch Lösung der Gleichungen (8) und (7). Wir haben somit im Allgemeinen ein Maximum, ein Minimum und einen mittleren Wert für die Resultirende.

Die Richtung der Resultirenden im Punkte x , y , z , erscheint als Durchschnitt dreier concentrischer Kreiskegel, deren Oeffnungswinkel u , v , w durch die Gleichungen

$$\cos u = \frac{x}{\rho_1}, \quad \cos v = \frac{y}{\rho_2}, \quad \cos w = \frac{z}{\rho_3}$$

bestimmt sind und somit leicht construirt werden können.

Der Nutzen dieser Construction besteht vor Allem darin, dass beinahe jeder Satz über die Durchmesser eines Ellipsoids einen analogen Satz über die elektromagnetischen Wirkungen ebener Schnitte nach sich zieht. So ist z. B. bekannt, dass in einem Ellipsoide die Summe der Quadrate der reciproken Werte dreier zu einander senkrechten Halbmesser constant ist, welche Relation uns unmittelbar den Satz N. 12. liefert, wenn für die reciproken Werte der Radien-Vectoren die Resultirenden gesetzt werden. Ebenso ist bekannt, dass die Summe der Quadrate conjugirter Durchmesser eines Ellipsoids constant ist, woraus also folgt, dass auch die Summe der Quadrate der reciproken Werte der Resultirenden, welche dreien conjugirten Durchmessern eines Punktes entsprechen, constant ist u. s. w.

Wenden wir die erhaltenen Resultate auf den Rotationskegel an, so finden wir für denselben:

$$\begin{aligned} B_1 &= C_1 = A_2 = C_2 = A_3 = B_3 = 0, & A_1 &= 2\pi \sin^2 \psi \cos \psi, \\ B_2 &= C_3 = -\frac{1}{2}A_1, & qX &= 2\pi \sin^2 \psi \cos \psi \cdot \alpha, \\ qY &= -\pi \sin^2 \psi \cos \psi \cdot \beta, & qZ &= -\pi \sin^2 \psi \cos \psi \cdot \gamma \end{aligned}$$

und somit die Resultirende:

$$qR = \pm \pi \sin^2 \psi \cos \psi \sqrt{1 + 3\alpha^2},$$

welche Formel eine merkwürdige Aehnlichkeit mit dem Ausdrucke für die Wirkung eines sehr kleinen Magnetes auf einen entfernten Punkt *) hat. Die Gleichung:

$$A = (A_1 - qR)(B_2 - qR)(C_3 - qR) = 0$$

gibt wegen $B_2 = C_3 = -\frac{1}{2}A$, ein Maximum

$$qR_1 = A_1 \quad \text{für} \quad \alpha = 1$$

und zwei gleiche Minima

$$qR_2 = qR_3 = -\frac{1}{2}A_1 \quad \text{für} \quad \alpha = 0.$$

Das Centralellipsoid wird zu einem Rotationsellipsoid, dessen Umrehungsaxe mit der Axe der x zusammenfällt; die Hauptschnitte sind ein Kreis und zwei congruente Hyperbeln. Bemerkte mag noch wer-

*) Wiedemann, Galvanismus II. pg. 131.

den, dass die Richtung der Resultirenden unabhängig von der Öffnung ψ des Kegels ist und R noch ein zweites Maximum für verschiedene ψ ($\lg \psi = \sqrt{2}$) aufweist.

III.

Zum Schlusse mögen noch die elektromagnetischen Wirkungen ebener Schnitte einer dreiseitigen Pyramide betrachtet werden. Es seien deshalb a, b, c die Seiten, A, B, C die Winkel jenes sphärischen Dreiecks, dessen Fläche das Potential für die Pyramide darstellt. Setzt man:

$$D^2 = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = (\sin b \sin c \sin A)^2 = \dots$$

$$A^2 = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C,$$

also:

$$dD = \cotg A \sin a da + \cotg B \sin b db + \cotg C \sin c dc,$$

so ist bekanntlich der sphärische Excess E gegeben durch

$$\tg \frac{1}{2} E = \frac{D}{1 + \cos a + \cos b + \cos c}$$

Hieraus folgt durch Differentiation mit Rücksicht, dass

$$\cos^2 \frac{E}{2} = \frac{(1 + \cos a + \cos b + \cos c)^2}{16 \cos^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{c}{2}}$$

und

$$\sin^2 \frac{E}{2} = \frac{D^2}{16 \cos^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{c}{2}}$$

ist:

$$\begin{aligned} \frac{D}{\sin \frac{E}{2}} \frac{dE}{2} &= \frac{\cos \left(\frac{E}{2} - A \right)}{\sin A} \sin a da + \frac{\cos \left(\frac{E}{2} - B \right)}{\sin B} \sin b db \\ &\quad + \frac{\cos \left(\frac{E}{2} - C \right)}{\sin C} \sin c dc \end{aligned}$$

oder wegen

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \dots = \frac{D}{A}$$

und

$$\frac{A}{2 \sin \frac{E}{2}} = \cotg \varphi,$$

wenn ϱ den Halbmesser des dem sphärischen Dreiecke umschriebenen Kreises bedeutet, und zugleich $A+B+C=2S$ gesetzt wird:

$$\cotg \varrho . dE = \sin (S-A) da + \sin (S-B) db + \sin (S-C) dc.$$

Der Scheitel der Pyramide habe nun die Coordinaten x, y, z und die Endpunkte der Kantenlängen (r_1, r_2, r_3) ebenso die Coordinaten $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2 \dots z_3$ und die Richtungscosinusse $u_1 v_1 w_1, u_2 v_2 w_2 \dots w_3$, so dass also

$$u_1 = \frac{x_1 - x}{r_1}, \quad v_1 = \frac{y_1 - y}{r_1}, \quad w_1 = \frac{z_1 - z}{r_1}$$

$$u_2 = \frac{x_2 - x}{r_2}, \quad v_2 = \frac{y_2 - y}{r_2}, \quad w_2 = \frac{z_2 - z}{r_2}$$

$$u_3 = \frac{x_3 - x}{r_3}, \quad v_3 = \frac{y_3 - y}{r_3}, \quad w_3 = \frac{z_3 - z}{r_3}$$

ist. Dann sind die Seiten des sphärischen Dreiecks bestimmt durch:

$$\cos a = u_2 u_3 + v_2 v_3 + w_2 w_3$$

$$\cos b = u_3 u_1 + v_3 v_1 + w_3 w_1$$

$$\cos c = u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2$$

und zugleich ist:

$$\sin a \frac{da}{dx} = \frac{u_2}{r_3} + \frac{u_3}{r_2} - \cos a \left(\frac{u_2}{r_2} + \frac{u_3}{r_3} \right)$$

$$\sin b \frac{db}{dx} = \frac{u_3}{r_1} + \frac{u_1}{r_3} - \cos b \left(\frac{u_3}{r_3} + \frac{u_1}{r_1} \right)$$

$$\sin c \frac{dc}{dx} = \frac{u_1}{r_2} + \frac{u_2}{r_1} - \cos c \left(\frac{u_1}{r_1} + \frac{u_2}{r_2} \right)$$

Mit diesen Formeln würde man die eine Componente $X = \frac{dE}{dx}$ finden und daraus die beiden anderen Y und Z erhalten, indem man statt der u die Buchstaben v , respective w nehme. Der Kürze halber setzen wir nun

$$\frac{\sin(S-A)}{\sin a} = U, \quad \frac{\sin(S-B)}{\sin b} = V \quad \text{und} \quad \frac{\sin(S-C)}{\sin c} = W$$

und haben dann:

$$\begin{aligned} \cotg \varrho . X &= \frac{1}{r_1} [-u_1 (V \cos b + W \cos c) + u_2 W + u_3 V] \\ &+ \frac{1}{r_2} [u_1 W - u_2 (W \cos c + U \cos a) + u_3 U] \\ &+ \frac{1}{r_3} [u_1 V + u_2 U - u_3 (U \cos a + V \cos b)] \end{aligned}$$

Diese Gleichung multipliciren wir mit q , der Entfernung des Scheitels von der schneidenden Ebene und nennen weiter:

$$\frac{q}{r_1} = \lambda, \quad \frac{q}{r_2} = \mu, \quad \frac{q}{r_3} = \nu,$$

wo also λ, μ, ν die Cosinusse jener Winkel vorstellen, welche q mit den Kanten der Pyramide macht. Etwas anders geordnet wird dann:

$$\begin{aligned} \cotg \varphi \cdot X &= u_1[-\lambda(V\cos b + W\cos c) + \mu W + \nu V] \\ &\quad + u_2[\lambda W - \mu(W\cos c + U\cos a) + \nu U] \\ &\quad + u_3[\lambda V + \mu U - \nu(U\cos a + V\cos b)] \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun die Grössen in den eckigen Klammern der Reihe nach mit K, L, M , so hat man endlich für die drei Componenten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cotg \varphi \cdot X &= u_1 K + u_2 L + u_3 M \\ \cotg \varphi \cdot Y &= v_1 K + v_2 L + v_3 M \\ \cotg \varphi \cdot Z &= w_1 K + w_2 L + w_3 M \end{aligned} \quad (14)$$

und für die Resultirende R :

$$\cotg^2 \varphi \cdot R^2 = K^2 + L^2 + M^2 + 2KL \cos c + 2LM \cos a + 2MK \cos b$$

die also, wie zu erwarten, ihrer Grösse nach unabhängig von der Lage der Pyramide ist.

Da die eben entwickelten Ausdrücke für die Componenten in der vorliegenden Form keine Vergleichung mit den Hauptformeln N. 2. zulassen, so wollen wir in N. 14. statt der Grössen λ, μ, ν die Werte α, β, γ d. i. die Richtungscosinusse des Perpendikels q einführen. Dazu gebrauchen wir die Relationen:

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 \\ \mu &= \alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 \\ \nu &= \alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma w_3 \end{aligned}$$

und erhalten nach einiger Rechnung Ausdrücke von der Form N. 2., in denen die neun darin auftretenden Coefficienten folgende Werte haben:

$$\begin{aligned} A_1 &= \tg \varphi [-u_1^2(V\cos b + W\cos c) - u_2^2(W\cos c + U\cos a) - u_3^2(U\cos a + V\cos b) \\ &\quad + 2u_1 u_2 W + 2u_2 u_3 U + 2u_1 u_3 V] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \tg \varphi [-v_1^2(V\cos b + W\cos c) - v_2^2(W\cos c + U\cos a) - v_3^2(U\cos a + V\cos b) \\ &\quad + 2v_1 v_2 W + 2v_2 v_3 U + 2v_1 v_3 V] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= \tg \varphi [-w_1^2(V\cos b + W\cos c) - w_2^2(W\cos c + U\cos a) - w_3^2(U\cos a + V\cos b) \\ &\quad + 2w_1 w_2 W + 2w_2 w_3 U + 2w_1 w_3 V] \end{aligned}$$

somit, wie verlangt,

$$A_1 + B_2 + C_3 = 0$$

und ebenso:

$$A_2 = B_1 = \operatorname{tg} \varrho [-(u_1 v_1 + u_3 v_3) V \cos b - (u_2 v_2 + u_1 v_1) W \cos c \\ -(u_3 v_3 + u_2 v_2) U \cos a + (u_1 v_2 + v_1 u_2) W + (u_2 v_3 + u_3 v_2) U \\ + (u_3 v_1 + u_1 v_3) V]$$

$$B_3 = C_2 = \operatorname{tg} \varrho [-(v_1 w_1 + v_3 w_3) V \cos b - (v_2 w_2 + v_1 w_1) W \cos c \\ -(v_3 w_3 + v_2 w_2) U \cos a + (v_1 w_2 + w_1 v_2) W + (v_2 w_3 + v_3 w_2) U \\ + (v_3 w_1 + v_1 w_3) V]$$

$$C_1 = A_3 = \operatorname{tg} \varrho [-(w_1 u_1 + w_3 u_3) V \cos b - (w_2 u_2 + w_1 u_1) W \cos c \\ -(w_3 u_3 + w_2 u_2) U \cos a + (w_1 u_2 + u_1 w_2) W + (w_2 u_3 + u_3 w_2) U \\ + (w_3 u_1 + w_1 u_3) V]$$

Es finden somit auch zwischen diesen neun Coefficienten die oben erwähnten vier Gleichungen statt.

Czernowitz im October 1877.

XXVI.

Bewegung zweier durch einen elastischen Faden
verbundener materieller Punkte ohne Einwirkung
äusserer Kräfte.

Von

R. Hoppe.

Zwei Punkte $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$ mit den Massen m_1 , m_2 sind durch einen nicht materiellen Faden verbunden, welcher bei einem Abstand $> L$ eine Zugkraft q übt, während bei einem Abstand $\leq L$ dieselbe null ist. Dann sind die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= q \frac{x_2 - x_1}{L'}; & m_1 y_1'' &= q \frac{y_2 - y_1}{L'}; & m_1 z_1'' &= q \frac{z_2 - z_1}{L'} \\ m_2 x_2'' &= q \frac{x_1 - x_2}{L'}; & m_2 y_2'' &= q \frac{y_1 - y_2}{L'}; & m_2 z_2'' &= q \frac{z_1 - z_2}{L'} \end{aligned}$$

wo L' den momentanen Abstand bezeichnet, q für $L' \leq L$ null zu setzen ist, und die Accente sich auf Differentiation nach der Zeit t beziehen.

Nimmt man den Schwerpunkt des Systems für $t = 0$ zum festen Anfangspunkt, so sind die Coordinaten des actuellen Schwerpunkts

$$At, \quad Bt, \quad Ct$$

Nimmt man letztern zum Anfangspunkt der xyz , und bezeichnen x, y, z die relativen Coordinaten von m_1 , so sind die festen Coordinaten:

$$\begin{aligned} x_1 &= At + x, & y_1 &= Bt + y, & z_1 &= Ct + z \\ x_2 &= At - \frac{m_1}{m_2} x, & y_2 &= Bt - \frac{m_1}{m_2} y, & z_2 &= Ct - \frac{m_1}{m_2} z \end{aligned}$$

und es reicht hin x, y, z zu bestimmen, was durch die Gleichungen geschieht:

$$m_1 x'' = -\frac{mgx}{m_2 L'}; \quad m_1 y'' = -\frac{mgy}{m_2 L'}; \quad m_1 z'' = -\frac{mgz}{m_2 L'}$$

wo $m = m_1 + m_2$ gesetzt ist.

Sofern die Componenten der wirkenden Kraft proportional x, y, z sind, geht die Bewegung in einer Ebene von unveränderlicher Stellung, in welcher der momentane Schwerpunkt liegt, vor sich. Nimmt man diese zur Ebene der xy , so wird $z = 0$, und die letzte der 3 Gleichungen fällt weg.

Bezeichnet u den relativen Radiusvector, so wird

$$L' = u + \frac{m_1}{m_2} u = \frac{m}{m_2} u$$

und man hat:

$$m_1 x'' = -q \frac{x}{u}; \quad m_1 y'' = -q \frac{y}{u}$$

woraus durch Elimination von q und Integration:

$$xy' - yx' = \text{const.}$$

eine Gleichung die offenbar auch für $q = 0$ besteht. Nimmt man den Anfang der Bewegung bei $L' < L$ und bezeichnet die Anfangswerte der einzelnen Variabeln durch den Index 0, so wird für die ganze Dauer der Bewegung

$$xy' - yx' = x_0 y'_0 - y_0 x'_0 \quad (1)$$

Ebenso gilt durchweg die Gleichung der relativen lebendigen Kraft

$$\frac{m_1}{2} (x'^2 + y'^2) + \int_{u_0} q du = \frac{m_1}{2} (x'_0{}^2 + y'_0{}^2) \quad (2)$$

gleichviel ob q wiederholt null wird, da es stets dieselbe Function von u bleibt.

Bis zum erstenmal $L' = L$ wird, ist

$$x' = x'_0; \quad y' = y'_0 \quad (3)$$

daher

$$x = x_0 + x'_0 t; \quad y = y_0 + y'_0 t \quad (4)$$

Nimmt man die y in der Anfangsrichtung, die x positiv nach der Anfangsbahn hin, so ist

$$x'_0 = 0$$

und alle notwendigen Data reduciren sich auf

$x_0 = \kappa$, $t = T$ für $y = 0$, und Anfangsgeschwindigkeit $= \lambda$
denn dann hat man:

$$x_0 = \kappa; \quad y_0 = -\lambda T; \quad x'_0 = 0; \quad y'_0 = \lambda \quad (5)$$

Bezeichnet E den Elasticitätscoefficienten des Fadens, so ist

$$q = E \left(\frac{L'}{L} - 1 \right) \quad (6)$$

oder, wenn

$$L = \frac{m}{m_2} l$$

gesetzt wird, so dass l den Wert von u bei Nullspannung ausdrückt,

$$q = E \left(\frac{u}{l} - 1 \right) \text{ für } u \geq l$$

Jetzt lauten die Gl. (1) (2):

$$xy' - yx' = \kappa \lambda$$

$$\frac{m_1}{2} (x'^2 + y'^2 - \lambda^2) = -E \int \left(\frac{u}{l} - 1 \right) \partial u$$

wo das Integral zur untern Grenze l statt u_0 bekommen musste, weil von $u = u_0$ bis $u = l$ die Elasticität null ist. Dies giebt:

$$x'^2 + y'^2 - \lambda^2 = -F(u-l)^2$$

$$F = \frac{E}{lm_1}$$

In Polarcoordinaten, wo

$$x = u \cos v; \quad y = u \sin v$$

sei, werden die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} u^2 v' &= \kappa \lambda \\ u'^2 + u^2 v'^2 &= \lambda^2 - F(u-l)^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

und nach Elimination von v' erhält man:

$$u^2 u'^2 = \lambda^2 (u^2 - \kappa^2) - F u^2 (u-l)^2 = U \quad (8)$$

woraus:

$$\partial t = \pm \frac{u \partial u}{\sqrt{U}}; \quad \partial v = \pm \frac{\kappa \lambda \partial u}{u \sqrt{U}} \quad (9)$$

das obere Zeichen für wachsendes, das untere für abnehmendes u bis $u = l$ gültig. Beide Gleichungen gelten nur solange als $u \geq l$ ist.

Die Function u muss ein Maximum $u = l + \alpha$ haben, und da Gl. (8) dem Elasticitätsgesetze entspricht, das man noch für $u < l$ fortbestehen lassen kann, auch ein Minimum $u = l - \beta$; folglich hat die Gleichung $U = 0$ zwei reelle positive Wurzeln, und man kann setzen:

$$U = F(\alpha - u + l)(\beta + u - l)(u^2 + \gamma u + \delta) \quad (10)$$

Hiernach stellen sich t und v als elliptische Integrale 3. Gattung dar. Indes können wir sie durch eine Vernachlässigung, welche der Genauigkeit absolut keinen Eintrag tut, in einfachere Functionen überführen. Setzt man nämlich statt des Ausdrucks (8)

$$U = \left\{ \lambda \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{l^2}} + \frac{\lambda^2 \kappa^2}{l^3 \sqrt{F}} - \sqrt{F(u-l)} \right\} \times \\ \left\{ \lambda \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{l^2}} - \frac{\lambda^2 \kappa^2}{l^3 \sqrt{F}} + \sqrt{F(u-l)} \right\} u^2$$

so ist die Differenz, um welche letzterer kleiner ist als ersterer,

$$= \kappa^2 \lambda^2 \left(\frac{u-l}{l} \right)^2 \frac{2u+l}{l} + \frac{\kappa^4 \lambda^4 u^2}{F l^6} \quad (11)$$

Ihr erster Term hat also die 2. Potenz der elastischen Längendehnung zum Factor, ihr zweiter ist wegen des Divisors F damit von gleicher Ordnung, während U nicht mit $u-l$ verschwindet. Da nun das Elasticitätsgesetz (6) nur bis auf 1. Potenz der Dehnung gültig ist, so würde es, wofern λ nicht sehr gross ist, illusorisch sein jene Differenz in Rechnung zu bringen.

Setzt man jetzt

$$u = l + \frac{\lambda^2 \kappa^2}{l^3 F} + \frac{\lambda}{l} \sqrt{\frac{l^2 - \kappa^2}{F}} \cos \vartheta \quad (12)$$

so wird

$$\sqrt{U} = \mp \frac{\lambda}{l} \sqrt{l^2 - \kappa^2} \cdot u \sin \vartheta \quad (13)$$

Das obere Zeichen gilt für negatives ϑ , folglich, da u bei $\vartheta = 0$ sein Maximum erreicht, wenn man ϑ mit t wachsen lässt, für wachsendes u , und das Doppelzeichen entspricht dem in (9). Die Gl. (9) gehen jetzt über in

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial \vartheta}{\sqrt{F}}; \quad \frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\kappa \lambda \partial \vartheta}{u^2 \sqrt{F}} \quad (14)$$

Sei $t = t_1$, $v = v_1$ für $\vartheta = 0$; dann hat man im Intervall, wo zum erstenmal u den Wert l übersteigt:

$$t = t_1 + \frac{\vartheta}{\sqrt{F}} \quad (15)$$

$$v = v_1 + \frac{\kappa\lambda}{\sqrt{F}} \int_0^{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\left(l + \frac{\lambda^2 \kappa^2}{l^3 F} + \frac{\lambda}{l} \sqrt{\frac{l^2 - \kappa^2}{F}} \cos \vartheta\right)^2}$$

Zur Integration ist zu setzen

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{l^4 F + \lambda^2 \sqrt{F(l^2 - \kappa^2)} + \lambda^2 \kappa^2}{l^4 F - \lambda^2 \sqrt{F(l^2 - \kappa^2)} + \lambda^2 \kappa^2}} \operatorname{tg} \eta$$

dann wird

$$v = v_1 + \frac{2\kappa\lambda}{\sqrt{F}} \frac{\left(l + \frac{\kappa^2 \lambda^2}{F l^3}\right) \eta + \frac{\lambda}{l} \sqrt{\frac{l^2 - \kappa^2}{F}} \sin \eta \cos \eta}{\left(l^2 + \lambda^2 \frac{3\kappa^2 - l^2}{F l^3} + \frac{\kappa^4 \lambda^4}{F^2 l^6}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

das ist mit Weglassung der Terme höherer Ordnung:

$$v = v_1 + \frac{2\kappa\lambda\eta}{l^2 \sqrt{F}}$$

oder, da $\frac{\vartheta}{2}$ Hauptwert von η ist,

$$v = v_1 + \frac{\kappa\lambda\vartheta}{l^2 \sqrt{F}} = v_1 + \kappa\lambda \frac{t - t_1}{l^2} \quad (16)$$

Die äussersten Grenzen von ϑ , bestimmt durch $u = l$, gehen aus (12) und (13) hervor. Denn für $u = l$ wird nach (8)

$$U = \lambda^2(l^2 - \kappa^2)$$

daher

$$\sin \vartheta = \mp 1; \quad \cos \vartheta = -\frac{\kappa^2 \lambda}{l^2 \sqrt{F(l^2 - \kappa^2)}}$$

$$\vartheta = \mp \left\{ R + \frac{\kappa^2 \lambda}{l^2 \sqrt{F(l^2 - \kappa^2)}} \right\} \quad (17)$$

In (15) und (16) kann der zweite Term von ϑ nicht in Rechnung kommen. Demnach sind die äussersten Werte von t und v

$$t = t_1 \mp \frac{R}{\sqrt{F}}; \quad v = v_1 \mp \frac{\kappa\lambda}{l^2} \frac{R}{\sqrt{F}} \quad (18)$$

Hier ist nach (5) (4) als Ergebniss der vorhergehenden geradlinigen Bewegung

$$l \cos v = \kappa; \quad l \sin v = \lambda(t - T)$$

Bezeichnet man diesen Wert von v durch α , so erhält man:

$$x = l \cos \alpha$$

$$t_1 = T + \frac{l}{\lambda} \sin \alpha + \frac{R}{\sqrt{F}}; \quad v_1 = \alpha + \frac{R}{\sqrt{F}} \frac{\lambda \cos \alpha}{l} \quad (19)$$

Die gesammte Stosszeit, d. i. die Zeit, während der der Faden gespannt ist, hat also den Wert

$$2\tau = \frac{2R}{\sqrt{F}} \quad (20)$$

und die Tangentialverschiebung während des Stosses hat den Centriwinkel

$$2\omega = \frac{2R}{\sqrt{F}} \frac{\lambda \cos \alpha}{l} \quad (21)$$

Die Winkelgeschwindigkeit während des Stosses ist constant:

$$\frac{\omega}{\tau} = \frac{\lambda \cos \alpha}{l} \quad (22)$$

Im Vorstehenden sind die Bestandteile ermittelt, aus denen sich die Bewegung für alle Zeit zusammensetzt; denn aus den ununterbrochen geltenden Gl. (7), welche u' und v' als Functionen von u allein bestimmen, geht hervor, dass die Bewegung periodisch ist.

Sei um den Schwerpunkt S in der Ebene der relativen Bewegung mit dem Radius l ein Kreis beschrieben. Von dem beliebigen innern Punkte O beginne die Bewegung in der beliebigen Richtung OB . Auf OB fallen wir das Lot SA , verlegen den Anfang der Bewegung nach A , nehmen SA zur x Axe und lassen die Amplituden v da beginnen. Dann verfolgt der materielle Punkt P mit der constanten Geschwindigkeit λ die halbe Sehne AB von der Zeit $t = T$ bis $t = T + d$, während v von O bis α wachse.

Ueber B hinaus beschreibt P eine transcendente Curve BEB' , symmetrisch zum grössten Radiusvector SE , ausserhalb des Kreises. In B' erreicht er den Kreis und geht mit seiner Endgeschwindigkeit λ auf der Sehne $B'B_1$, symmetrisch zu BA , weiter, in deren Mitte A_1 die Periode schliesst, so dass die Stücke $ABEB'A_1$, $A_1B_1E_1B_1'A_2$, $A_2B_2E_2B_2'A_3$ etc. congruent sind und mit gleichen Geschwindigkeiten durchlaufen werden. Um die Werte der Variabeln in den Hauptpunkten übersichtlich zusammenzustellen, so hat man, wenn man

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\operatorname{tg} v$$

setzt, so dass v die Ablenkung der Bahn aus ihrer Anfangsrichtung bezeichnet:

in A	B	E	B'
$t - T = 0$	d	$d + \tau$	$d + 2\tau$
$u = l \cos \alpha$	l	$l + h$	l
$v = 0$	α	$\alpha + \omega$	$\alpha + 2\omega$
$s = 0$	$l \sin \alpha$	$l \sin \alpha + \sigma$	$l \sin \alpha + 2\sigma$
$s' = \lambda$	λ	λ	λ
$v = 0$	0	$\alpha + \omega$	$2\alpha + 2\omega$

in A_k	B_k	E_k	B'_{k-1}
$t - T = 2k(d + \tau)$	$(2k+1)d + 2k\tau$	$(2k+1)(d + \tau)$	$(2k-1)d + 2k\tau$
$u = l \cos \alpha$	l	$l + h$	l
$v = 2k(\alpha + \omega)$	$(2k+1)\alpha + 2k\omega$	$(2k+1)(\alpha + \omega)$	$(2k-1)\alpha + 2k\omega$
$s = 2k(l \sin \alpha + \sigma)$	$(2k+1)l \sin \alpha + 2k\sigma$	$(2k+1)(l \sin \alpha + \sigma)$	$(2k-1)l \sin \alpha + 2k\sigma$
$s' = \lambda$	λ	λ	λ
$v = 2k(\alpha + \omega)$	$2k(\alpha + \omega)$	$(2k+1)(\alpha + \omega)$	$2k(\alpha + \omega)$

In Betreff der geradlinigen Bewegung von B'_{k-1} bis B_k bedarf es nur der folgenden Bestimmungen:

$$\left. \begin{aligned} d &= \frac{l \sin \alpha}{\lambda} \\ u \cos[v - 2k(\alpha + \omega)] &= l \cos \alpha \\ u \sin[v - 2k(\alpha + \omega)] &= \lambda[t - T - 2k(d + \tau)] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Um den Einblick in die krummlinige Bewegung zu erleichtern, wollen wir zu Coordinaten $\xi\eta$ übergehen, welche der Bahn BEB' angemessen sind. Sei C , die Mitte der Sehne BB' , Anfang, die ξ in der Richtung CB' , die η in der Richtung CE . Die ursprüngliche Gleichung der Bahn ist nach Elimination von ϑ zwischen (12) und (16):

$$u = l + \frac{\lambda \sin \alpha}{\sqrt{F}} \cos \left[\frac{l \sqrt{F}}{\lambda \cos \alpha} (v - v_1) \right]$$

Nun hat man:

$$\begin{aligned} \xi &= u \sin(v - v_1) \\ \eta &= u \cos(v - v_1) - l \cos \omega \end{aligned}$$

oder, mit Vernachlässigung höherer Potenzen der kleinen Grössen $v - v_1$ und ω :

$$\xi = u(v - v_1); \quad \eta = u - l$$

und mit Zurückgehen von v auf ϑ :

$$u = l + \frac{\lambda \sin \alpha}{\sqrt{F}} \cos \vartheta$$

$$\xi = u \vartheta \frac{\lambda \cos \alpha}{l \sqrt{F}}; \quad \eta = u - l$$

und mit Weglassung des Terms 2. Ordnung:

$$\xi = \frac{\lambda \cos \alpha}{\sqrt{F}} \vartheta; \quad \eta = \frac{\lambda \sin \alpha}{\sqrt{F}} \cos \vartheta \quad (24)$$

In B und B' verschwindet η , das ist bzhw. für $\vartheta = -R$ und R ; daher ist die Länge der Basis BB'

$$2l \sin \omega = \frac{2R \lambda \cos \alpha}{\sqrt{F}}$$

In E verschwindet ξ und ϑ , und η geht über in

$$h = \frac{\lambda \sin \alpha}{\sqrt{F}} \quad (25)$$

Die Neigung der Tangente gegen die Basis ist $\nu_1 - \nu$ und zwar

$$-\operatorname{tg}(\nu - \nu_1) = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = -\operatorname{tg} \alpha \sin \vartheta \quad (26)$$

das ist in B und B'

$$-\operatorname{tg}(\nu - \nu_1) = \pm \operatorname{tg} \alpha; \quad \nu = \begin{cases} \nu_1 - \alpha & \text{in } B \\ \nu_1 + \alpha & \text{in } B' \end{cases}$$

Dies differirt vom genauen Werte $\nu = \nu_1 \mp (\alpha + \omega)$ um die Kleine 1. Ordnung ω , eine Abweichung die durch die Division $\partial \eta : \partial \xi$ aus einer Kleinen 2. Ordnung hervorgegangen ist.

Die Rectification der Curve gibt:

$$\sigma = \int \sqrt{\partial \xi^2 + \partial \eta^2} = \frac{\lambda}{\sqrt{F}} \int_0^R \partial \vartheta \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \vartheta}$$

das ist der Quadrant einer Ellipse, deren Halbaxen

$$\frac{\lambda}{\sqrt{F}}, \quad \frac{\lambda \cos \alpha}{\sqrt{F}}$$

sind. Deren Excentricität ist gleich der Sagitte CE , ihre kleine Halbachse der Durchmesser eines Kreises, dessen Länge gleich der Basis BB' .

Die Krümmung der Curve ist $\frac{\partial \nu}{\partial s}$. Da nun aus (26) hervorgeht

$$\partial v = \operatorname{tg} \alpha \cos \vartheta \partial \vartheta \cdot \cos^2(\nu - \nu_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos \vartheta \partial \vartheta}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \vartheta}$$

und sich soeben ergeben hat

$$\partial s = \frac{\lambda}{\sqrt{F}} \partial \vartheta \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \vartheta}$$

so folgt durch Division die Krümmung

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\sqrt{F}}{\lambda} \frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos \vartheta}{(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \quad (27)$$

das ist im Scheitel E , wo $\vartheta = 0$,

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\sqrt{F}}{\lambda} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \quad (28)$$

in den Endpunkten B, B' , wo $\vartheta = R, = 0$, so dass also auch die Krümmung im stetigen Anschluss an die geradlinige Fortsetzung der Bahn bleibt.

Um auch die zur Bewegung verwandte Zeit zu berücksichtigen, so ist

$$\vartheta = \sqrt{F}(t - t_1)$$

Da ϑ von $-R$ bis R variiert, so wird die Curve σ in der Zeit

$$2\tau = \frac{2R}{\sqrt{F}} \quad (29)$$

durchlaufen, unabhängig von der Geschwindigkeit und Richtung des Anstosses, ihr Quadrat proportional der Fadenlänge und der Masse m , und umgekehrt proportional der Elasticität des Fadens.

Die Geschwindigkeit ist

$$s' = \lambda \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \vartheta}$$

im Scheitel hat sie ihr Minimum $\lambda \cos \alpha$.

Die vorstehende Rechnung baute auf die 2 Voraussetzungen:

- 1) dass u im Anfang $< l$,
- 2) dass λ eine mässige Grösse sei, nicht zu gross um die Grösse (11) vernachlässigen zu können.

Es sind demnach noch 2 Fälle zu untersuchen, wo u im Anfang $> l$, und wo dasselbe zwar $< l$, aber λ sehr gross ist. Im ersten Falle müssen die Grundgleichungen (7) so geschrieben werden, dass sie einem beliebigen Anfangszustand bezeichnet durch den Index 0 entsprechen, nämlich:

$$u^2 v' = u_0^2 v'_0$$

$$u'^2 + u^2 v'^2 + F(u-l)^2 = u_0'^2 + u_0^2 v'_0{}^2 + F(u_0-l)^2$$

Nach Elimination von v' erhält man:

$$u'^2 = u_0'^2 + \left(\frac{u_0 v'_0}{u}\right)^2 (u^2 - u_0^2) - F(u - u_0)(u + u_0 - 2l) \quad (30)$$

Sei $l + \varepsilon$ das Minimum von u ; dann wird

$$\left\{ \left(\frac{u_0 v'_0}{l + \varepsilon} \right)^2 (u_0 + l + \varepsilon) - F(u_0 - l + \varepsilon) \right\} (u_0 - l - \varepsilon) = u_0'^2 \geq 0$$

oder, bis auf 1. Potenz von ε entwickelt

$$\left(\frac{u_0 v'_0}{l} \right)^2 (u_0 + l) - F(u_0 - l) - \left\{ (u_0 v'_0)^2 \frac{2u_0 + l}{l^3} + F \right\} \varepsilon \geq 0$$

Soll also $\varepsilon \geq 0$ sein, so ist Bedingung:

$$\left(\frac{u_0 v'_0}{l} \right)^2 \geq F \frac{u_0 - l}{u_0 + l}$$

Ist diese nicht erfüllt, so überschreitet die Bahn den Kreis $u = l$ nach innen, und die Bewegung ist die anfänglich betrachtete. Die Bedingung lässt sich bei noch so kleinem v'_0 durch ein hinreichend kleines $u_0 - l$ erfüllen; ist hingegen $F(u_0 - l)^2$ eine mässige Grösse, so ist v'_0 sehr gross, und zwar $v'_0{}^{-2}$ klein von der Ordnung von $u_0 - l$.

Sei $l + \alpha$ das Maximum, $l + \beta$ das Minimum von u ; dann giebt Gl. (30), indem man $l + \alpha$ für u_0 , $l + \beta$ für u setzt:

$$v_0'^2 = F \left(\frac{l + \beta}{l + \alpha} \right) \frac{\alpha + \beta}{2l + \alpha + \beta}$$

Nach Einsetzung dieses Wertes lässt sie sich in der Form darstellen:

$$u'^2 = F(l + \alpha - u)(u - l - \beta) \left\{ 1 + \frac{\alpha + \beta}{u} \left[1 + \frac{(l + \alpha)(l + \beta)}{(2l + \alpha + \beta)u} \right] \right\}$$

Entwickelt man bis zu 1. Potenz der Kleinen α , β , so erhält man:

$$\partial t = \frac{1}{\sqrt{F}} \left\{ 1 - \frac{\alpha + \beta}{2u} \left(1 + \frac{l}{2u} \right) \right\} \frac{\partial u}{\sqrt{(\alpha + u + l)(u - l - \beta)}}$$

Setzt man

$$u = l + \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \vartheta \quad (31)$$

so wird

$$\partial t = \frac{\partial \vartheta}{\sqrt{F}} \left\{ 1 - \frac{\alpha + \beta}{2u} \left(1 + \frac{l}{2u} \right) \right\}$$

oder nach Weglassung der Kleinen höherer Ordnung

$$\partial t = \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\alpha + \beta}{l} \right) \frac{\partial \vartheta}{\sqrt{F}} \quad (32)$$

und, indem man t mit ϑ vom Minimum $u = l + \beta$ an rechnet,

$$t = \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\alpha + \beta}{l} \right) \frac{\vartheta}{\sqrt{F}} \quad (33)$$

Da die Werte von u nach Zunahme von ϑ um $4R$ wiederkehren, so ist die Dauer der Periode

$$4\tau = \frac{4R}{\sqrt{F}} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\alpha + \beta}{l} \right) \quad (34)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \partial v &= \frac{u_0^2 v'_0}{u^2} \partial t = \frac{u_0^2}{u^2} \partial t \sqrt{F} \frac{l + \beta}{l + \alpha} \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2l + \alpha + \beta}} \\ &= \frac{\partial \vartheta}{u^2} (l + \alpha)(l + \beta) \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\alpha + \beta}{l} \right) \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2l + \alpha + \beta}} \\ &= \frac{\partial \vartheta}{u^2} l^2 \left(1 + \frac{\alpha + \beta}{l} - \frac{3}{4} \frac{\alpha + \beta}{l} - \frac{1}{4} \frac{\alpha + \beta}{l} \right) \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2l}} \\ &= \frac{l^2 \partial \vartheta}{u^2} \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2l}} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2l}} \left(1 - \frac{\alpha + \beta}{l} + \frac{\alpha - \beta}{l} \cos^2 \vartheta \right) \partial \vartheta \end{aligned} \quad (35)$$

also nach Integration

$$v = \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2l}} \left\{ \left(1 - \frac{\alpha + 3\beta}{2l} \right) \vartheta + \frac{\alpha - \beta}{l} \sin \vartheta \cos \vartheta \right\}$$

nach Vollendung der Periode

$$4\omega = 4R \left(1 - \frac{\alpha + 3\beta}{2l} \right) \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2l}} \quad (36)$$

Die Basis der Bahncurve $4l\omega$ ist demnach selbst sehr klein, aber nur von der Ordnung $\frac{1}{2}$, während ihre Sagitte, die Oscillationsweite $\alpha - \beta$, von der Ordnung 1 ist.

Bezeichnet ν den Winkel, den die Tangente der Bahn mit dem kleinsten Radius (d. i. für $t = 0$, $\vartheta = 0$) bildet, so ist

$$\cos \nu = \frac{\partial u \cos \vartheta - u \partial \vartheta \sin \vartheta}{\sqrt{\partial u^2 + u^2 \partial \vartheta^2}}; \quad \sin \nu = \frac{\partial u \sin \vartheta + u \partial \vartheta \cos \vartheta}{\sqrt{\partial u^2 + u^2 \partial \vartheta^2}}$$

Nun ist nach (31) (35)

$$\partial u^2 + u^2 \partial \vartheta^2 = \partial \vartheta^2 \left\{ \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \sin \vartheta \right)^2 + \frac{\alpha + \beta}{2l} \frac{l^4}{u^2} \right\} \quad (37)$$

woraus

$$(\partial u^2 + u^2 \partial \vartheta^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{u}{l^{\frac{3}{2}} \partial \vartheta} \sqrt{\frac{2}{\alpha + \beta} \left\{ 1 - \frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha + \beta} \frac{u^2}{4l^3} \sin^2 \vartheta \right\}}$$

ferner

$$\cos \nu = 1 - \frac{\alpha + \beta}{4l} \vartheta^2$$

$$\sin \nu = \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2l} \left\{ \left(1 - \frac{\alpha + 3\beta}{2l} \right) \vartheta - \frac{\alpha + \beta}{12l} \vartheta^3 + \frac{\alpha - \beta}{l} \sin \vartheta \cos \vartheta \right\}}$$

Führt man diese Werte ein, so findet man $\cos \nu$ als eine negative Kleine ($\frac{1}{2}$)ter Ordnung, daraus

$$\nu = R - \cos \nu - \frac{1}{2} \cos^3 \nu$$

Dies nach ϑ differentiirt und durch

$$\frac{\partial \nu}{\partial \vartheta} = \sqrt{\frac{\partial u^2 + u^2 \partial \vartheta^2}{\partial \vartheta^2}} \quad (38)$$

bekannt aus (37) dividirt giebt die Krümmung $\frac{\partial \nu}{\partial s}$. Es ist

$$\nu = R + \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2l}} \left(\vartheta - \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \sin \vartheta \right) + \dots$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial s} = \frac{1}{l} \left(1 - \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \cos \vartheta \right) + \dots$$

Die vielen unregelmässigen Terme ($\frac{1}{2}$)ter, bzw. 1. Ordnung, welche man gleichfalls findet, sind hier weggelassen worden.

Die Krümmung ist also durchweg positiv, am kleinsten im Minimum u ($\vartheta = 0$), daher ist die Bahncurve ganz convex. Dies wird auch durch den Teil 1. Ordnung nicht alterirt; denn der volle Ausdruck von $\partial \frac{\partial \nu}{\partial s}$ hat den Factor $\sin \vartheta$; es gilt also genau.

Im Minimum u wird, vollständig geschrieben,

$$\nu = R; \quad \frac{\partial \nu}{\partial s} = \frac{1}{l} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} + 3 \frac{\alpha + \beta}{2l} \right) \quad (39)$$

im Maximum u ($\vartheta = 2R$)

$$\left. \begin{aligned} \nu &= R \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2l}} \left(2 + \frac{\alpha + 3\beta}{l} + \frac{4}{3} R^2 \frac{\alpha + \beta}{l} \right) \right\} \\ \frac{\partial \nu}{\partial s} &= \frac{1}{l} \left\{ \frac{2\alpha}{\alpha + \beta} + \frac{(\alpha - 3\beta)(3\alpha + \beta)}{2l(\alpha + \beta)} + 2R^2 \frac{\alpha}{l} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Integriert man den auf 1. Ordnung entwickelten Ausdruck (38)

$$\partial s = l \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2l}} \left\{ 1 + \frac{(\alpha - \beta)^2 \sin^2 \vartheta}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha + \beta}{2l} + \frac{\alpha - \beta}{2l} \cos \vartheta \right\} \partial \vartheta \quad (41)$$

von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 4R$, so ergibt sich die Bahnlänge:

$$s = R \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2l}} \left(4l - \frac{\alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2}{\alpha + \beta} \right) \quad (42)$$

Sie ist, verglichen mit dem von aussen und innen berührenden, concentrischen Kreisbogen

$$\text{um } \frac{R(\alpha - \beta)(3\alpha + 5\beta)}{\sqrt{2l(\alpha + \beta)}} \text{ kleiner als } 4\omega(l + \alpha),$$

$$\text{um } \frac{R(\alpha - \beta)^2}{\sqrt{2l(\alpha + \beta)}} \text{ grösser als } 4\omega(l + \beta)$$

Gl. (41) dividirt durch (32) giebt als Wert der Geschwindigkeit:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2}} lF \left\{ 1 + \frac{\alpha + \beta}{4l} + \frac{\alpha - \beta}{2l} \cos \vartheta + \frac{(\alpha - \beta)^2 \sin^2 \vartheta}{\alpha + \beta} \frac{1}{2l} \right\}$$

in den Punkten $\vartheta = 0$, $\vartheta = 2R$

$$= \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2}} lF \left(1 + \frac{3\alpha - \beta}{4l} \right), \quad \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2}} lF \left(1 - \frac{\alpha - 3\beta}{4l} \right)$$

Ist $\alpha < 3\beta$, so nimmt sie bis dahin beständig ab, ist am grössten für kleinstes u , am kleinsten für grösstes u . Ist $\alpha > 3\beta$, so hat sie ein Maximum für

$$\cos \vartheta = \frac{1}{2} \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$$

nämlich

$$\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}} l F \left(1 + \frac{1}{8l} \frac{7\alpha^2 - 2\alpha\beta + 7\beta^2}{\alpha + \beta} \right) \quad (43)$$

und jene 2 Werte sind Minima.

Sei jetzt wieder im Anfang $u < l$, so dass die obige Einführung von κ , λ Platz hat; doch sei λ sehr gross; dann zeigt die Gl. (8), angewandt auf das Maximum u , dass die geradlinig durchlaufene Kreissehne $\sqrt{l^2 - \kappa^2}$ in 1. Ordnung, die Sagitte $l - \kappa$ in 2. Ordnung klein sein muss. Identificirt man die Ausdrücke (8) (10) von U , betrachtet α , β als gegeben und entwickelt γ , δ , κ^2 , λ^2 , so findet man:

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha - \beta; \quad \delta = \frac{(l+\alpha)(l-\beta)(\alpha-\beta)}{2l+\alpha-\beta} \\ \kappa^2 &= \frac{(l+\alpha)(l-\beta)}{1 + \frac{l(\alpha+\beta)^2}{(l+\alpha)(l-\beta)(\alpha-\beta)}} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\frac{\lambda^2}{F} = \frac{(l+\alpha)(l-\beta)(\alpha-\beta) + l(\alpha+\beta)^2}{2l+\alpha-\beta} \quad (45)$$

Aus dem letzten Ausdruck ist zu ersehen, dass $\frac{\lambda^2}{F}$ klein von der Ordnung der elastischen Dehnungen sein muss, für welche dieselben noch proportional der Zugkraft angenommen werden können. Da auch γ und δ klein 1. Ordnung sind, so ist bis auf 1. Ordnung

$$\sqrt{u^2 + \gamma u + \delta} = u + \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2u} = u \left(1 + \frac{\gamma}{2l} + \frac{\delta}{2l^2} \right) = u \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\alpha - \beta}{l} \right)$$

und die Gleichung $uu' = \sqrt{U}$ geht über in

$$u' = \sqrt{F} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\alpha - \beta}{l} \right) \sqrt{(\alpha - u + l)(\beta + u - l)}$$

Setzt man

$$u = l + \frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \vartheta$$

so ergibt sich:

$$\partial \vartheta = \sqrt{F} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\alpha - \beta}{l} \right) \partial t$$

Ferner ist nach (44) (45)

$$\kappa \lambda = \sqrt{F} (l + \alpha) (l - \beta) \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{2l + \alpha - \beta}} = \sqrt{F} \frac{\alpha - \beta}{2l} \cdot l^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\alpha - \beta}{l} \right)$$

daher nach (7)

$$\partial v = \frac{\kappa \lambda \partial t}{u^2} = \frac{\kappa \lambda \partial t}{l^2} \left(1 - \frac{\alpha - \beta}{l} + \frac{\alpha + \beta}{l} \cos \vartheta \right)$$

integriert

$$\begin{aligned}
 v - v_1 &= \frac{\pi \lambda}{l^2} \frac{\partial t}{\partial \vartheta} \left\{ \left(1 - \frac{\alpha - \beta}{l} \right) \vartheta + \frac{\alpha + \beta}{l} \sin \vartheta \right\} \\
 &= \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{2l}} \left\{ \left(1 - \frac{\alpha - \beta}{l} \right) \vartheta + \frac{\alpha + \beta}{l} \sin \vartheta \right\}
 \end{aligned}$$

Diese Resultate weichen im Hauptwert nicht von den anfänglich erhaltenen ab. Daher wird die Natur der Bewegung nicht dadurch verändert, wenn λ bis zu der gestatteten Grenze gross ist. Es sind demnach nur die 2 Fälle zu trennen, wo das Minimum $u < l$ und wo es $\geq l$ ist; der Grenzfall ist vom zweiten Falle nicht ausgeschlossen.

XXVII.

Ueber den in der Definition der Potenzlinie
enthaltenen Kreis.

Beitrag zur Lehre von den Potenzen eines Punktes mit Bezug
auf zwei Kreise.

Von

Herrn Prof. Dr. **L. Mack**
zu Ludwigsburg.

§ 1.

Seit langer Zeit ist in die Kreislehre die Betrachtung derjenigen Geraden eingeführt, welche — zu zwei gegebenen Kreisen gehörig — bald als Chordale, bald als Potenzaxe, bald als Linie der gleichen Potenzen bezeichnet wird; sie ist gewiss als einer der wichtigsten geometrischen Oerter anzusehen, wie sie ja auch in Steiner's grossartigen „geometrischen Betrachtungen“ [Crelle's Journal, Band I.] von vorn herein und im weiteren Verlaufe eine der bedeutendsten Rollen spielt. Sofern nun die Kenntniss besagter Linie an die Betrachtung derjenigen Grösse sich angeknüpft hat, welche Potenz eines Punktes mit Bezug auf einen Kreis genannt wird: zeigt sich, dass man nicht bloss von einer geraden Linie, welche als geometrischer Ort des Punktes gleicher Potenzen zu zwei gegebenen Kreisen sich darbietet, sondern in ganz analogem Sinne von einem kreisförmigen Orte reden darf. Diess nachzuweisen, also einen bisher vernachlässigten Ortskreis an das Licht und zu seinem Rechte zu bringen — ist der Zweck der folgenden Abhandlung. Möge nur der Leser sich gefallen lassen, dass zunächst in der genaueren Fassung und Darstellung des zu berücksichtigenden Potenzbegriffes selbst die sichere Grundlage für das weiter hier Vorzutragende gegeben werde.

§ 2.

Wie auch ein gegebener Punkt P gegen einen gegebenen Kreis (in der Ebene desselben) liegen möge — es gilt bekanntlich der Satz: das Rechteck aus den Entfernungen des Punktes von den Endpunkten einer durch ihn gehenden Secante des Kreises hat immer dieselbe Grösse, was auch für eine Richtung die Secante haben möge. Diese Grösse ist also immer dargestellt durch das bestimmte Rechteck aus den Entfernungen des Punktes P von den Endpunkten D_1 , D_{11} des nach ihm weisenden Durchmessers; und diese absolute Grösse ist es, was man ursprünglich unter Potenz des Punktes P mit Bezug auf den Kreis verstanden hat.

Wird nun auf der Geraden, die durch den Punkt P und den Mittelpunkt M des gegebenen Kreises geht, die Richtung PM {von P nach M } als die positive erklärt, die ihr entgegengesetzte als die negative: so ist jeder der von P aus zu nehmenden Wege PD_1 PD_{11} entweder positiv oder negativ gerichtet, wenn er nicht null ist. Wird diess berücksichtigt, und wird dann jeder Weg in der auch sonst üblichen Weise durch eine positive oder negative Zahl oder Null dargestellt: so liegt es nahe, die Potenz des Punktes P mit Bezug auf den Kreis nicht mehr in der vorhin erwähnten absoluten Weise aufzufassen, sondern sie in algebraisch geometrischem Sinne zu definiren: als Product der algebraischen Werte der Wege, welche von P aus an die Endpunkte des nach P weisenden Durchmessers gehen. So ist auch Steiner in seiner späteren Zeit von der früheren absoluten Auffassung zu der algebraisch geometrischen übergegangen. [Vgl. Steiner's Theorie der Kegelschnitte von Geiser; 2te Auflage].

Sei jetzt r der absolute Wert des Halbmessers eines gegebenen Kreises, dessen Mittelpunkt M heisse, und sei e der nach Obigem positiv aufzufassende Weg von einem gegebenem Punkte P nach M . Heissen wieder D_1 , D_{11} die Endpunkte des nach P weisenden Durchmessers, D_1 etwa der bei P näher liegende, so ist nach der alten Auffassung

$PD \cdot PD_{11} = (e - r)(e + r) = e^2 - r^2$, falls P ausserhalb des Kreises
dagegen

$$PD_1 \cdot PD_{11} = (r - e)(r + e) = r^2 - e^2, \text{ falls } P \text{ innerhalb}$$

nach der neuen Auffassung aber hat man

$$PD_1 \cdot PD_{11} = (e - r)(e + r) = e^2 - r^2, \text{ im ersten Falle}$$

und

$$PD_1 \cdot PD_{11} = \{-(r - e)\} \{r + e\} \text{ im zweiten Falle;}$$

d. h. nach der neuen Auffassung ist für beide Fälle gleichmässig

$$PD_1 \cdot PD_{11} = (e-r)(e+r) = e^2 - r^2,$$

wobei auch der Fall $e = r$ mit eingeschlossen ist.

Hiermit hängt der weitere Vorteil zusammen, den die neue Auffassung gewährt. Ist nämlich in ihrem Sinne die Potenz eines Punktes mit Bezug auf einen Kreis gegeben $= \pm p^2$, so lässt sich der gegebene Wert, jenachdem er positiv oder negativ oder null ist, sofort erkennen, ob der betreffende Punkt ausserhalb der Peripherie oder innerhalb oder auf ihr selbst sich befinde.

Wenden wir die neue Auffassung jetzt an auf das Vorkommniss, dass ein Punkt P mit zwei Kreisen zugleich gegeben sei. Dann sind die zwei zugehörigen Potenzen von P entweder beide gleichartig oder beide ungleichartig. Der erste dieser Fälle ist vorhanden, wenn entweder beide Potenzen positiv, oder beide negativ, oder beide null sind, d. h. wenn P entweder ausserhalb des einen und des andern Kreises liegt, oder innerhalb des einen und des andern, oder in einem gemeinschaftlichen Punkte beider sich befindet. Der zweite Fall liegt vor, wenn entweder die eine Potenz positiv und die andere negativ oder die eine positiv und die andere null, oder die eine negativ und die andere null ist, d. h. wenn P entweder innerhalb des einen Kreises und ausserhalb des andern liegt, oder P ausserhalb des einen und auf der Peripherie des andern, oder P innerhalb des einen und auf der Peripherie des andern.

Die bisher gemachten Bemerkungen sprechen wol deutlich genug dafür, dass man anders als bisher sich zu verhalten habe gegenüber der gewöhnlich so lautenden Aufgabe: den geometrischen Ort eines Punktes zu finden, dessen Potenzen mit Bezug auf zwei gegebene Kreise einander gleich seien.

Sie ist — soviel ich sehe — bisher nur in dem Sinne behandelt worden, dass die betreffenden Potenzwerte sowohl absolut gleich als algebraisch gleichartig seien; es ist aber jetzt gewiss angezeigt auch die Möglichkeit zu berücksichtigen, dass jene Werte zwar absolut gleich aber nicht gleichartig seien. Die Behandlung im ersten Sinne führt auf den allbekannten geradlinigen Ort; die im zweiten Sinne führt auf einen kreisförmigen, den man bisher nicht beachtet hat. Der nächst folgende § wird demselben sofort zu seinem Rechte verhelfen.

§ 3.

Aufgabe. Gegeben zwei Kreise, ihre Mittelpunkte M_1 und M_{11} , ihre Halbmesser r_1 und r_{11} ; die Strecke

$M_1 M_{11} = a$. Man ermittle und untersuche den geometrischen Ort desjenigen Punktes P , dessen Potenz mit Bezug auf den einen Kreis absolut gleich aber entgegengesetzt sei seiner Potenz mit Bezug auf den andern Kreis.

Auflösung. Es werde M_1 als Ursprung rechtwinklig verbundener Coordinatenaxen $M_1 X$, $M_1 Y$ genommen, und der positive Zweig $M_1 X$ der ersten Axe werde durch den Punkt M_{11} gelegt; alsdann sind die zwei Kreise dargestellt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} 1) \quad & x^2 + y^2 - r_1^2 = 0, \\ 2) \quad & (x-a)^2 + y^2 - r_{11}^2 = 0, \end{aligned}$$

wo a , r_1 , r_{11} bestimmte, positive Werte haben. Für jede Lage des in Rede stehenden Punktes P hat man zunächst nach § 2.

$$\begin{aligned} \text{algeb. Potenzwert zum ersten Kreis} &= \overline{PM_1}^2 - r_1^2, \\ \text{„ „ „ zweiten „} &= \overline{PM_{11}}^2 - r_{11}^2 \end{aligned}$$

wenn man aber die Coordinatenwerte von solchem P selbst mit x , y bezeichnet, so ist

$$\overline{PM_1}^2 = x^2 + y^2,$$

und ist

$$\overline{PM_{11}}^2 = (x-a)^2 + y^2,$$

man hat also offenbar anzugeben

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{algeb. Potenzwert v. } P \text{ zum ersten Kreis} = x^2 + y^2 - r_1^2 \\ \text{„ „ „ } P \text{ „ zweiten „} = (x-a)^2 + y^2 - r_{11}^2. \end{array} \right.$$

Da nun diese Potenzwerte einander gleich aber entgegengesetzt sein sollen, so muss ihre Summe null sein, d. h. als Gleichung des hier gesuchten geometrischen Orts ist anzugeben

$$4) \quad \{x^2 + y^2 - r_1^2\} + \{(x-a)^2 + y^2 - r_{11}^2\} = 0.$$

Diese Ortsgleichung ist, wie man sieht, ganz identisch mit derjenigen, welche durch Addition der beiden Kreisgleichungen 1) und 2) selbst sich ergibt. Demnach jedes Paar zusammengehöriger Werte von x und y , welches die beiden Kreisgleichungen 1) und 2) zumal befriedigt, muss auch der Gleichung 4) genügen; und jedes solche Paar welches die Gleichung 4) nebst einer der Gleichungen 1), 2) befriedigt, muss auch der andern genügen. Somit ist zu sagen:

1) Jeder Punkt, in welchem die beiden gegebenen Kreise sich schneiden oder berühren, ist auch für die hier gesuchte Ortslinie ein Punkt, in welchem sie je-

den von jenen beiden beziehungsweise schneidet oder berührt. Und jeder Punkt, welchen etwa die Ortslinie mit dem einen jener Kreise gemein hat — sei es als Schnittpunkt, sei es als Berührungspunkt — muss ihr in demselben Sinne auch gemeinschaftlich sein mit dem andern Kreis.

Bringen wir jetzt die 4) auf die sehr nahe liegende Gestalt

$$5) \{x^2 + y^2\} + \{(x-a)^2 + y^2\} = r_1^2 + r_{11}^2,$$

so sagt uns dieselbe offenbar

$$\overline{PM}_1^2 + \overline{PM}_{11}^2 = r_1^2 + r_{11}^2, \text{ d. h.}$$

II) Der Ort des Punktes P , welcher mit Bezug auf zwei gegebene Kreise absolut gleiche aber entgegengesetzte Potenzen hat, ist völlig derselbe wie der Ort desjenigen Punktes, für welchen die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den festen Mittelpunkten jener beiden Kreise constant gleich ist der Summe der Quadrate ihrer Radien.

Ordnen wir die 4) nach Potenzen von x und y , so dass entsteht

$$2x^2 + 2y^2 - 2ax = r_1^2 + r_{11}^2 - a^2,$$

so ist aus der Gleichheit der Coefficienten von x^2 und y^2 und aus dem Fehlen eines mit xy behafteten Gliedes bereits zu ersehen, dass diese Gleichung einen Kreis darstellen werde oder könne. Das klarste Licht aber über ihre Bedeutung ergibt sich, wenn wir zunächst ihre beiden Seiten mit der Zahl 2 dividiren, dann beiderseits $\frac{1}{4}a^2$ addiren. Hierdurch und mittels leichter Zusammenfassungen erhalten wir

$$6) \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{2r_1^2 + 2r_{11}^2 - a^2}{4}.$$

Angesichts dieser Form der Ortsgleichung ist sofort zu sagen: entweder gibt es gar kein Paar reeller Werte von x und y , welche ihr genügen, oder es gibt ein einziges solches Paar, oder es gibt unzählige. Diese drei Fälle treten der Reihe nach ein, jenachdem

$$\begin{array}{c} > \\ a^2 = 2r_1^2 + 2r_{11}^2. \\ < \end{array}$$

Dasjenige Paar, welches in dem zweiten dieser drei Fälle

$$(a^2 = 2r_1^2 + 2r_{11}^2)$$

auftritt, ist

$$\left(x = \frac{a}{2}, \quad y = 0\right);$$

diess sind die Coordinatenwerte des Halbirungspunktes M_0 der Strecke M_1M_{11} . Was den dritten Fall

$$(a^2 < 2r_1^2 + 2r_{11}^2)$$

angeht, so ist, wenn er zutrifft, die 6) offenbar die Gleichung eines eigentlichen Kreises, dessen Mittelpunkt die Coordinatenwerte $\frac{a}{2}$ und 0 hat, und dessen Radius

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{2r_1^2 + 2r_{11}^2 - a^2}$$

sich darbietet.

Da (wegen $a > 0$) die Bedingungsformel

$$a^2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 2r_1^2 + 2r_{11}^2$$

zu ersetzen durch

$$a \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \sqrt{2r_1^2 + 2r_{11}^2},$$

so machen wir über die eben eingeführte absolute Wurzel die Bemerkung: sie ist gleich der Hypotenuse h eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten sind $r_1\sqrt{2}$ und $r_{11}\sqrt{2}$. Nun ist der Satz auszusprechen:

III) Wenn zu zwei nach Lage und Grösse gegebenen Kreisen, deren Mittelpunkte M_1, M_{11} heissen mögen, der geometrische Ort desjenigen Punktes gesucht wird, dessen Potenzen mit Bezug auf jene einander absolut gleich aber entgegengesetzt sein sollen: so zeigt sich dieser Ort entweder imaginär, oder er reducirt sich auf einem einzigen Punkt, den Halbirungspunkt M_0 der Strecke M_1M_{11} , oder er findet sich als eigentlicher, um oben diesen Punkt M_0 zu beschreibenden Kreis. Welcher von diesen drei Fällen eintrete hängt davon ab, wie gross die Strecke M_1M_{11} sei gegen die Hypotenuse h eines rechtwinkligen Dreiecks, als dessen Katheten zu nehmen sind die Diagonalen der zwei Quadrate, welche über den Halbmessern jener Kreise als Grundlinien sich errichten lassen. Je nachdem die Strecke M_1M_{11} grösser als h , oder gleich h , oder kleiner ist: hat man den ersten, zweiten, dritten der angegebenen Fälle.

Um nun die verschiedenen, bei unsrer Aufgabe zu beachtenden Erscheinungen desto genauer und sicherer zu erforschen, wollen wir für die Grössen r_1, r_{11} jede der zwei möglichen Annahmen

$$r_1 = r_{11} \quad \text{und} \quad r_1 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} r_{11}$$

besonders berücksichtigen und demgemäss das, was jede von ihnen eigentümliches bewirkt, auch besonders hervorheben.

Lassen wir also in die allgemeine Gleichung 6) zunächst die Annahme $r_1 = r_{11} = r$ eingehen; jene wird dadurch übergeführt in

$$7) \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = r^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Für die in dem allgemeinen Satz III) aufgeführten Fälle reducirt sich nun die Bedingungsformel beziehungsweise auf

$$a \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 2r;$$

und der zum dritten dortigen Fall gehörige Wert des Halbmessers ϱ reducirt sich auf

$$\varrho = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Hiernach ist zu sagen

IV) Wenn zwei gleiche Kreise nach Lage und Grösse gegeben sind, so findet sich der Ort des gleiche aber entgegengesetzte Potenzen mit Bezug auf sie habenden Punktes entweder imaginär, oder auf Einen Punkt reducirt, oder als eigentlicher Kreis — je nachdem der Abstand der Mittelpunkte der gegebenen Kreise grösser ist als die Summe ihrer Halbmesser, oder gleich, oder kleiner. Der im dritten Fall auftretende Halbmesser ϱ des Ortskreises ist zu construiren als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem die andere Kathete nebst der Hypotenuse bekannt ist; die Hypotenuse nämlich gleich dem gemeinschaftlichen Halbmesser (r) der zwei gegebenen Kreise, die bekannte Kathete gleich dem halben Abstand ihrer Mittelpunkte.

Aus Vorstehendem ist — übereinstimmend mit der allgemeinen Angabe I) — auch zu entnehmen

V) Wenn zwei gegebene gleiche Kreise frei auseinander liegen, so ist der geometrische Ort des gleiche

aber entgegengesetzte Potenzen mit Bezug auf sie habenden Punktes imaginär. — Wenn jene von aussen sich berühren, so reducirt sich der Ort auf den bezüglichen Berührungspunkt, wobei als Potenzwerte auftreten -0 und $+0$. — Wenn jene vielmehr sich schneiden, so ist der Ort derjenige Kreis, welcher die gemeinschaftliche Sehne der zwei gegebenen selbst als Durchmesser enthält.

Machen wir jetzt für die Grössen r_1 , r_{11} die zweite der zu berücksichtigenden Annahmen (nämlich r_1 und r_{11} ungleich), und setzen wir des bestimmteren $r_1 > r_{11}$. Da nun $2r_1^2 + 2r_{11}^2$ jedenfalls $= (r_1 + r_{11})^2 + (r_1 - r_{11})^2$, und da bei der Annahme $r_1 > r_{11}$ jede der eben eingeführten (zusammengesetzten) Quadratsbasen positiv ist: so kann man für die schon in III) eingeführte Grösse h ($h = \sqrt{2r_1^2 + 2r_{11}^2}$) bemerken, dass sie auch als Hypotenuse desjenigen rechtwinkligen Dreiecks sich darbiete, welches die eine Kathete habe gleich der Summe der zwei gegebenen Radien, die andere gleich der Differenz. Und hiernach empfiehlt es sich, die allgemeine Ortsgleichung 6) ausdrücklich noch auf die Form zu bringen

$$7) \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{(r_1 + r_{11})^2 + (r_1 - r_{11})^2 - a^2}{4}.$$

Hält man sich an diese, so liegt es nahe die folgenden Bemerkungen zu machen zu den drei Hauptfällen, welche man in dem allgemeinen Satz III) zu unterscheiden hatte.

Ist der Fall $a > h$ vorhanden, so sieht man, dass in der Bedingung $a > h$ immer mitgesetzt ist die Forderung $a > r_1 + r_{11}$, d. h. die Forderung, dass der kleinere der zwei gegebenen Kreise ganz frei ausserhalb des grösseren liege.

Ist vielmehr der Fall $a = h$ vorhanden, so zeigt sich auch noch, wie vorhin, mitgesetzt $a > r_1 + r_{11}$, somit $\frac{1}{2}a > \frac{1}{2}(r_1 + r_{11})$. Sofern aber die Annahme $a = h$ jetzt mit der bestimmteren weiteren $r_1 > r_{11}$ verbunden ist, so ergibt sich für $\frac{1}{2}a$ auch die Angabe $\frac{1}{2}a < r_1$; einfach deswegen, weil alsdann $a^2 = h^2 = 2r_1^2 + 2r_{11}^2$ mit sich bringt $a^2 < 4r_1^2$ oder $a < 2r_1$. Die Verbindung also der beiden Angaben $a = h$ und $r_1 > r_{11}$ bringt mit sich, dass der kleinere der zwei gegebenen Kreise ganz frei ausserhalb des grösseren liege, und dass der Punkt M_0 (der Halbierungspunkt der Strecke M_1M_{11}) frei innerhalb des grösseren gegebenen Kreises sich befinde.

Ist endlich der Fall $a < h$ ($a < \sqrt{(r_1 + r_{11})^2 + (r_1 - r_{11})^2}$) vorhanden, so ist hiermit dem n nicht bloss jeder von 0 bis zu $(r_1 + r_{11})$

zu denkende Wert zugelassen, sondern es ist auch die Möglichkeit $a > r_1 + r_{11}$ durchaus nicht abgeschnitten; es kann recht gut $a > r_1 + r_{11}$ sein, während es gleichwol $< \sqrt{(r_1 + r_{11})^2 + (r_1 - r_{11})^2}$ ist. Sofern aber die Annahme $a < h$ mit der weiteren Bestimmung $r_1 > r_{11}$ verbunden sein soll, die wir jetzt festhalten: so ist (wegen $a^2 < 2r_1^2 + 2r_{11}^2$) noch vielmehr als vorhin $a^2 < 4r_1^2$, $a < 2r_1$, $\frac{1}{2}a < r_1$, d. h. $M_1M_0 < r_1$. Sieht man dann zugleich auf die (bei $a < h$) reell und positiv ausfallende Grösse ϱ , deren Wert ist

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{1}{2}\sqrt{2r_1^2 + 2r_{11}^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(r_1 + r_{11})^2 + (r_1 - r_{11})^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 - a^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

so hat man offenbar immer:

$$4\varrho^2 < 4r_1^2, \text{ d. h. } \varrho < r_1.$$

Die Frucht vorstehender Erwägungen ist der Satz:

VI) Wenn zwei ungleiche Kreise, mit Mittelpunkten M_1 und M_{11} , mit Radien r_1, r_{11} , und zwar $r_1 > r_{11}$ gegeben sind, und man sucht den Ort des gleiche aber entgegengesetzte Potenzen mit Bezug auf jene habenden Punktes: so hat man die Strecke M_1M_{11} zu vergleichen mit der Hypotenuse h des rechtwinkligen Dreiecks aus Katheten $r_1 + r_{11}$ und $r_1 - r_{11}$. Findet sich dann $M_1M_{11} > h$, wodurch die ganz freie Lage des kleineren Kreises ausserhalb des grösseren mitgesetzt ist: so ist der gesuchte Ort imaginär. Ist $M_1M_{11} = h$, was gleichfalls nur bei ganz freier Lage des kleineren Kreises ausserhalb des grösseren zutreffen kann: so reducirt sich der gesuchte Ort auf den Halbirungspunkt M_0 der Strecke M_1M_{11} , und es findet sich M_0 innerhalb des grösseren gegebenen Kreises. Ist endlich $M_1M_{11} < h$, wodurch die ganz freie Lage des kleineren gegebenen Kreises ausserhalb des grösseren nicht ausgeschlossen, aber jede andere Lage zugelassen ist: so findet sich der gesuchte Ort als eigentlicher Kreis, dessen Mittelpunkt M_0 innerhalb des grösseren gegebenen liegt. Was den Radius ϱ des Ortskreises betrifft, so ist er als zweite Kathete des rechtwinkligen Dreiecks zu construiren, dessen Hypotenuse $= \frac{1}{2}h$, und erste Kathete $= \frac{1}{2}M_1M_{11}$ bekannt sind; und hierbei findet sich immer $\varrho < r_1$.

Wenn man die eben gemachten Angaben (namentlich $\varrho < r_1$ und

M_0 innerhalb des grösseren gegebenen Kreises) mit denjenigen des Satzes I) verbindet, so gewinnt man die folgenden, mehr anschaulichen Bestimmungen.

VII) Wenn ein Kreis K_1 und ein kleinerer K_{11} in solcher Lage gegeben sind, dass ein eigentlicher Kreis K_0 als Ort desjenigen Punktes sich findet, dessen Potenzen mit Bezug auf K_1, K_{11} absolut gleiche aber entgegengesetzte Werte haben: so hat man mit Rücksicht auf die verschiedenen möglichen Fälle der gegenseitigen Lage von K_1 und K_{11} folgende Angaben zu machen.

a) Wenn K_{11} frei ausserhalb von K_1 liegt, so fällt K_0 frei innerhalb von K_1 .

Denn bei der gemachten Annahme ist durch Satz I) zunächst dies unmöglich gemacht, dass K_0 und K_1 sich schneiden oder berühren. Da ferner nach VI) der Mittelpunkt M_0 von K_0 frei innerhalb von K_1 , und da $\varrho < r_1$ sein muss: so bleibt nur übrig, dass K_0 von K_1 frei umschlossen werde.

b) Wenn K_1 und K_{11} in einem Punkte sich äusserlich berühren, so werden beide in eben diesem Punkte von K_0 berührt (nach I); und K_0 liegt (wie sein Mittelpunkt M_0) innerhalb von K_1 .

c) Wenn K_1 und K_{11} in zwei Punkten sich schneiden, so geht K_0 durch eben diese Punkte (nach I.), hat übrigens seinen Mittelpunkt M_0 innerhalb von K_1 .

d) Wenn K_1 und K_{11} in einem Punkte sich von innen berühren, so werden (nach I.) beide in eben diesem Punkte von K_0 berührt. Dabei wird K_0 von K_1 umschlossen (wegen Lage von M_0 und $\varrho < r_1$), und wird K_{11} von K_0 umschlossen (wegen Ungleichartigkeit der Potenzwerte).

e) Wenn K_{11} frei innerhalb von K_1 liegt, so hat der Kreis K_0 weder mit K_1 noch mit K_{11} einen Punkt gemein (nach I.). Dabei findet sich K_0 frei innerhalb von K_1 (wegen Lage von M_0 und $\varrho < r_1$), und wird K_{11} von K_0 frei umschlossen (wegen Ungleichartigkeit der Potenzwerte).

Wenn die vorstehenden Sätze zum Teil den Eindruck einiger Schwerfälligkeit machen, so wird dies für die etwa weiter zu entwickelnden um so eher und wird so lange zu befürchten sein, als für den neuen Ortskreis nicht ein passender kurzer Name vorhanden ist. Wie soll nun dieser lauten? Wer für die in § 1. berücksichtigte gerade Ortslinie den Namen „Potenzenaxe“ liebt, möchte füglich ge-

neigt sein, unsern Ortskreis als den „Potenzenkreis zu zwei gegebenen“ zu bezeichnen; dem steht aber der Umstand entgegen, dass von Steiner [in Crelle's Journal, Band I., geometrische Betrachtungen, Nr. XI.] bereits die Benennung „Potenzenkreis zweier gegebenen Kreise“ in ganz anderem Sinne gebraucht ist. Hienach wäre wol besser an den für „Potenzenaxe“ auch geläufigen kurzen Namen „Chordale“ anzuknüpfen. Ich möchte deshalb vorschlagen den Ortskreis unsres § kurz als den „Chordalkreis zu zwei gegebenen Kreisen“ zu benennen, und ich werde mir vorerst — wenigstens im weiteren Verlaufe dieser Abhandlung — gestatten, dieser Bezeichnung mich zu bedienen.

Anmerkung. Durch die so sehr einfachen Rechnungen unsres § ist vollkommen der Weg gebahnt auch zu weiteren Untersuchungen, die von Interesse sein dürften; ich hebe z. B. hervor die Betrachtung derjenigen Erscheinungen, die sich dann darbieten, wenn von den in der Aufgabe gegebenen Elementen a, r_1, r_{11} eines oder mehrere veränderlich werden. Besonders wichtig dürfte die Untersuchung sein, welche an die Annahme sich knüpft, dass zwar r_1 und r_{11} constant bleiben, aber a stetig alle positiven Werte von 0 bis a durchlaufe. Da zeigt sich nicht bloss der entsprechende Gang der Grösse φ der Beachtung wert, sondern vielmehr noch die Aenderung desjenigen Wegstückes x , welches durch die Gleichung

$$x = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2r_1^2 + 2r_{11}^2 - a^2}$$

dargestellt wird; es ist dies der Weg, welcher von dem Punkte M_1 an über M_0 hinaus bis zu dem in dieser Richtung liegenden Punkte D des Chordalkreises geht. Die hiebei namentlich angezeigte Frage nach dem Maximum oder Minimum des Weges M_1D ist unschwer zu erledigen; nur würden wir durch genaueres Eingehen auf diese Dinge zu sehr von dem Hauptzwecke dieser Arbeit abgelenkt werden.

Dagegen darf allerdings nicht unterdrückt werden eine Bemerkung, welche schon an die eigentliche Einleitung unsres § sich knüpfen konnte, und für welche man leicht die strenge Begründung finden wird.

Wenn beliebig gegen einander geneigte Coordinatenaxen OX, OY gegeben, und wenn mit Bezug auf sie irgend zwei Kreise K_1, K_{11} durch Gleichungen

$$\varphi_{x,y} = 0 \quad \text{und} \quad \psi_{x,y} = 0$$

dargestellt sind: so ist die Gleichung $\varphi + \psi = 0$ auch nun die Darstellung des zu K_1, K_{11} gehörigen Chordalkreises, wie wir es zunächst bei rechtwinklig verbundenen Coordinatenaxen gelernt haben. Diese Angabe ist ganz analog der längst bekannten, dass die Gleichung

$\varphi - \psi = 0$ für die Chordale jener gegebenen Kreise gelte, und für beide Angaben ist ihre Richtigkeit gleichgütig mit Hilfe der hier gebotenen Mittel nachzuweisen. So wären auch alle eigentlichen Hauptlehren von der Chordale oder Potenzenaxe zweier gegebenen Kreise ganz nach der Analogie unsres § 3. durch Stellung und Auflösung der entsprechenden Aufgabe zu entwickeln. Und dabei dürfte man in den Fall kommen — gegenüber früheren Behandlungen des Gegenstandes — sowohl einer grösseren Leichtigkeit und Sicherheit des Fortgangs als auch einer grösseren Vollständigkeit und Genauigkeit der Resultate sich zu erfreuen.

§ 4.

Wenn der zu zwei gegebenen Kreisen K_1, K_{11} gehörige Chordalkreis nicht imaginär ist, so ergeben sich, für alle Fälle giltig, zwei Hauptbestimmungen, welche ganz unmittelbar an die begriffsmässige Eigentümlichkeit jedes seiner Peripheriepunkte sich anknüpfen.

I) Ist P ein beliebiger Peripheriepunkt des Chordalkreises, etwa innerhalb von K_1 , also ausserhalb von K_{11} befindlich, so ist das Quadrat jeder der von P aus an K_{11} zu ziehenden Tangenten PT_{11}, PU_{11} gleich dem Rechteck aus den Abschnitten jeder durch P gehenden Sehne des Kreises K_1 . Fasst man von solchen Sehnen insbesondere die ins Auge, welche in P selbst halbiert ist und deren Endpunkte Q_1, R_1 heissen mögen: so zeigt sich P als Mittelpunkt eines durch Q_1, R_1 und die Berührungspunkte T_{11}, U_{11} jener Tangenten gehenden Kreises. Für diesen also ist die Sehne Q_1R_1 ein Durchmesser, und seine Peripherie muss die des Kreises K_{11} in den Punkten T_{11}, U_{11} rechtwinklig schneiden. Hienach ist zu sagen:

Wenn zu zwei gegebenen Kreisen ein eigentlicher Chordalkreis vorhanden ist, so zeigt sich jeder einzelne Peripheriepunkt des letzteren selbst als Mittelpunkt eines solchen Kreises, welcher den einen der zwei gegebenen rechtwinklig schneidet, in den andern aber — als Sehne desselben — seinen eigenen Durchmesser legt.

II) Zu den Kreisen K_1, K_{11} und dem zugehörigen Chordalkreise K sei eine beliebige Gerade gedacht, welche mit K_1 die Schnittpunkte A_1, B_1 gebe, mit K_{11} die Punkte A_{11}, B_{11} , mit K endlich die Punkte P, Q . Auf dieser Geraden werden positive und negative Richtung beliebig aber bestimmt unterschieden, so dass jeder der Wege, welcher von einem der sechs Schnittpunkte zu einem andern geht, seinen ganz bestimmten algebraischen Wert habe. Sofern nun jeder Punkt des Chordalkreises absolut gleiche aber entgegengesetzte Potenzen

mit Bezug auf K_1 und K_{11} hat, so müssen für die eben erwähnten algebraisch gerechneten Wege, näher für die von P und Q aus zu nehmenden die zwei Gleichungen stattfinden

$$1) \frac{PA_1 \cdot PB_1}{PA_{11} \cdot PB_{11}} = -1, \quad 2) \frac{QA_1 \cdot QB_1}{QA_{11} \cdot QB_{11}} = -1,$$

jede von ihnen streng begründet dadurch, dass die zwei links stehenden Quotientenglieder absolut gleich sind, während das eine — als Product gleichgerichteter Wege — positiv ist, das andere — als Product ungleichgerichteter — vielmehr negativ. Die aus 1) und 2) folgende

$$3) \frac{PA_1 \cdot PB_1}{PA_{11} \cdot PB_{11}} = \frac{QA_1 \cdot QB_1}{QA_{11} \cdot QB_{11}}$$

ist sofort auf die Form zu bringen

$$4) \frac{PA_1}{PA_{11}} : \frac{QA_1}{QA_{11}} = \frac{QB_1}{QB_{11}} : \frac{PB_1}{PB_{11}};$$

und da die hier vorkommenden Quotientenglieder immer noch algebraisch gerechnete Wege sind, so liefert vorstehende Doppelverhältnissgleichung schon für sich allein (vgl. die folgende Anmerkung) die Angabe:

Wenn unsere Secante PQ als Vereinigung zweier Geraden gedacht wird, so sind diese zwei in der Art projectivisch, dass

den Punkten P, Q, A_1, A_{11} der einen der Reihe nach entsprechen die Punkte Q, P, B_1, B_{11} der andern.

Die obige Gleichung 3) und ebenso die 4) beziehen sich auf eine bestimmt gedachte Figur. Wenn nun letztere unverändert bleibt, und jeder in sie eingeführte Buchstabe immer seine anfängliche Stelle beibehält: so bleiben die Gleichungen 3) und 4) auch dann richtig, wenn man in ihnen irgend eine der drei folgenden Vertauschungen vornimmt,

erstens nur A_1 und B_1 durchgängig mit einander vertauscht,
zweitens nur A_{11} und B_{11} „ „ „ „
drittens sowohl A_1 und B_1 durchgängig vertauscht, als auch
 A_{11} und B_{11} durchgängig unter sich vertauscht.

Vermöge dieser drei Arten von Vertauschungen kommen nun zu der 4) als weitere, wesentlich Neues besagende, für die ursprünglich gedachte Figur gültige Gleichungen:

$$5) \frac{PB_1}{PA_{11}} : \frac{QB_1}{QA_{11}} = \frac{QA_1}{QB_{11}} : \frac{PA_1}{PB_{11}},$$

$$6) \frac{PA_1:QA_1}{PB_{11}:QB_{11}} = \frac{QB_1:PB_1}{QA_{11}:PA_{11}},$$

$$7) \frac{PB_1:QB_1}{PB_{11}:QB_{11}} = \frac{QA_1:PA_1}{QA_{11}:PA_{11}},$$

bei welchen, wie bei der 4), der algebraisch geometrische Charakter der einzelnen Glieder zu betonen ist.

Diese 5), 6), 7) begründen für die zwei in unsrer Secante vereinigt zu denkenden Geraden die drei folgenden weiteren Formen der projectivischen Beziehung:

erste so, dass den Punkten P, Q, B_1, A_{11}
der Reihe nach entsprechen Q, P, A_1, B_{11} ;
zweite so, dass den Punkten P, Q, A_1, B_{11}
der Reihe nach entsprechen Q, P, B_1, A_{11} ;
dritte so, dass den Punkten P, Q, B_1, B_{11}
der Reihe nach entsprechen Q, P, A_1, A_{11} .

Werden nun die Ergebnisse zusammengefasst, welche die Auslegung der Gleichungen 4) bis 7) darbietet, so ist offenbar der allgemeine Satz auszusprechen:

Wenn zu zwei gegebenen Kreisen K_1, K_{11} ein eigentlicher Chordalkreis vorhanden ist, und wenn man irgend eine Secante einführt, welche mit K_1 die Schnittpunkte A_1, B_1 gibt, mit K_{11} die Punkte A_{11}, B_{11} , mit K endlich die Punkte P, Q : so bilden die genannten sechs Durchschnittspunkte eine Involution, und diese ist im Sinne geometrischer Anschaulichkeit genauer so zu beschreiben. Wenn man in der Secante zwei Gerade vereinigt denkt, und wenn man auf der einen nimmt die vier Punkte

$$P, Q, \left\{ \begin{array}{l} \text{beliebiger des} \\ \text{Paars } A_1, B_1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \text{beliebiger des} \\ \text{Paars } A_{11}, B_{11} \end{array} \right\},$$

so sind jene Geraden in dem Sinne projectivisch, dass den eben genannten Punkten der ersten der Reihe nach auf der zweiten Geraden entsprechen

$$Q, P, \left\{ \begin{array}{l} \text{übriger des} \\ \text{Paars } A_1, B_1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \text{übriger des} \\ \text{Paars } A_{11}, B_{11} \end{array} \right\}.$$

Anmerkung. Manchem Leser dieses Blattes ist es vielleicht erwünscht, dass die an Gleichung 4) unsres § angeknüpfte Behauptung über die projectivische Beziehung zwischen den Punktreihen $P, Q,$

A_1, A_{11} und Q, P, B_1, B_{11} noch ausführlich und mit den einfachsten Mitteln bewiesen werde.

Für diesen Zweck — ganz im Sinne der dort schon gemachten Andeutung — ist es wesentlich wenigstens die Hauptsätze heranzuziehen, welche für beliebig gegebene Punkte U, V, W einer Geraden dann gelten, wenn auf dieser der Gegensatz der Richtungen bestimmt berücksichtigt und zu entsprechender, algebraischer Auswertung der Wege verwendet wird. Man hat dann bekanntlich allgemein

$$\odot) UV = -VU; \quad \zeta) UV = UW + WV = WV - WU.$$

Hienach sind aus der Gleichung

$$4) \frac{PA_1}{PA_{11}} : \frac{QA_1}{QA_{11}} = \frac{QB_1}{QB_{11}} : \frac{PB_1}{PB_{11}}$$

unsres § herzuleiten

$$4a) \frac{PQ}{PA_{11}} : \frac{A_1Q}{A_1A_{11}} = \frac{QP}{QB_{11}} : \frac{B_1P}{B_1B_{11}},$$

$$4b) \frac{PQ}{PA_1} : \frac{A_{11}Q}{A_{11}A_1} = \frac{QP}{QB_1} : \frac{B_{11}P}{B_{11}B_1}$$

auf die sofort darzulegende Art.

Um z. B. von 4) auf 4a) zu kommen, haben wir zunächst nur dafür zu sorgen, dass auf jeder Seite der 4) bloss dieselben Wegesgrößen noch vorkommen wie auf der gleichnamigen Seite der 4a). Die linke Seite der 4) ist aber gemäss der Gleichungen $\odot)$ und $\zeta)$ zu ersetzen durch

$$\frac{PQ - A_1Q}{PA_{11}} : \frac{-A_1Q}{A_1A_{11} - A_1Q},$$

dann durch

$$\left(\frac{PQ}{PA_{11}} - \frac{A_1Q}{PA_{11}} \right) \left(1 - \frac{A_1A_{11}}{A_1Q} \right),$$

dann

$$\frac{PQ}{PA_{11}} - \frac{A_1Q}{PA_{11}} - \frac{PQ \cdot A_1A_{11}}{PA_{11} \cdot A_1Q} + \frac{A_1A_{11}}{PA_{11}},$$

dann

$$\frac{PQ + QA_1 + A_1A_{11}}{PA_{11}} - \frac{PQ \cdot A_1A_{11}}{PA_{11} \cdot A_1Q},$$

endlich

$$1 - \frac{PQ \cdot A_1A_{11}}{PA_{11} \cdot A_1Q}.$$

Durch ganz analoges Verfahren wird die rechte Seite der 4) übergeführt in

$$1 - \frac{QP \cdot B_1B_{11}}{QB_{11} \cdot B_1P}.$$

Es ist also aus 4) durch blosser Anwendung der \odot) und \odot) zu ziehen die Gleichung

$$\frac{PQ \cdot A_1 A_{11}}{PA_{11} \cdot A_1 Q} = \frac{QP \cdot B_1 B_{11}}{QB_{11} \cdot B_1 P},$$

welche durch einfache Umwandlung jeder Seite in einen Doppelquotienten sofort die Gestalt 4a) erhält.

Da man nun ohne weiteres übersieht, wie auch die 4b) aus der 4) mittels der \odot) und \odot) zu gewinnen sei, so darf man überzeugt sein, dass allerdings vermöge der Gleichungen \odot) und \odot), d. h. vermöge des algebraischen Charakters der in 4) vorkommenden Wegesgrößen, immer die drei Gleichungen 4), 4a) und 4b) zumal bestehen. Für diese Trias ist es ferner charakteristisch, dass ihre drei linken Seiten der Reihe nach auf Grund der Zuordnungen (P, Q) , (P, A_1) , (P, A_{11}) ebenso gebildet sind wie die rechten auf Grund der analogen Zuordnungen (Q, P) , (Q, B_1) , (Q, B_{11}) . Man sieht also dass hier in der Tat drei solche Doppelverhältnissgleichungen vorliegen, wie sie nach der ursprünglichen Darstellung Steiners (der sich hierbei durchaus an absolute Streckenwerte gehalten hat) für die projectivische Beziehung zweier geraden Punktreihen notwendig und hinreichend sind. — Dazu braucht kaum noch bemerkt zu werden, dass alle Gleichungen unsres § — von 3) an — eben auch dann wahr sind, wenn die in ihnen vorkommenden Wege sämtlich nicht als algebraische, sondern einfach als absolute Werte genommen werden.

§ 5.

Wenn nach der Bedeutung gefragt wird, welche der hier eingeführte, zu zwei gegebenen Kreisen gehörige Chordalkreis für die Geometrie haben oder gewinnen möchte: so ist es für mich selbst jedenfalls angezeigt, zunächst fremdes Urteil hierüber abzuwarten. Es bleibt ja doch immerhin dieses sicher, dass die Beachtung des Chordalkreises so gut als die der Chordale als eine wissenschaftliche Pflicht des Mathematikers erscheinen müsse. Und wie sehr die Berücksichtigung des einen und des andern geometrischen Orts zur wissenschaftlichen Vollständigkeit gehöre, darf ich wol noch zu veranschaulichen suchen durch folgendes einfache Beispiel.

Auf einer unbegrenzten Geraden seien vier Punkte, A, B, α, β , ganz beliebig gegeben; es soll auf jener Geraden selbst jeder solche Punkt X ermittelt werden, welcher der Forderung genüge, dass das Rechteck mit Seiten XA, XB gleich sei dem Rechteck mit Seiten $X\alpha, X\beta$.

Bei rein geometrischer Behandlung dieser Aufgabe liegt es nahe, zuerst an die altbekannte Lehre von der Potenzenaxe zweier Kreise sich zu erinnern. Denn wenn solche über AB und $\alpha\beta$ als Durchmesser beschrieben sind, und man führt die zu ihnen gehörige Potenzenaxe oder Chordale ein: so ist klar, dass diese (niemals fehlende) mit der Geraden $AB\alpha\beta$ einen Durchschnitt X_1 gibt, welcher der Aufgabe genügt.

Mit diesem allein sich zu beruhigen wäre nun sehr übel gethan. Dies ist einestheils aus jeder streng angelagten algebraisch-geometrischen Behandlung der Aufgabe zu entnehmen, sofern sie notwendig auf eine (übrigens leicht zerlegbare) Gleichung des dritten Grades führt, deren Wurzeln man suchen muss; andernteils wird es uns ganz unmittelbar nahe gelegt durch unsere Lehre vom Chordalkreis.

Heisst nämlich K der Chordalkreis, welcher zu den vorhin erwähnten, über AB und $\alpha\beta$ zu beschreibenden Kreisen zu suchen ist, und findet sich K als eigentlicher Kreis: so liefert dieser mit der gegebenen Geraden $AB\alpha\beta$ zwei Durchschnitte X_{11} , X_{111} , deren jeder der Aufgabe genügt. Findet sich K auf einen Punkt X_0 reducirt, so hat man sich an diesen zu halten, welcher auch notwendig auf die gegebene Gerade zu liegen kommt. Ist endlich der Chordalkreis imaginär, so behält man in diesem Falle bloss die durch X_1 gebotene Auflösung der Aufgabe, während in den zwei vorhergehenden Fällen beziehungsweise drei oder zwei von einander verschiedene reelle Auflösungen vorhanden sind. — So erkennt man gewiss deutlich genug, wie die obige Aufgabe, sowohl was Construction als was Determination betrifft, wesentlich erlange die vereinigten Benutzungen der Chordale und des Chordalkreises zu zwei gegebenen Kreisen.

An die Ausführung vorstehender geometrischen Betrachtung erlaube ich mir nur noch die Bemerkung ausdrücklich zu knüpfen, dass es keine Schwierigkeit hätte, auch die hier (§ 3.) durch Rechnung entwickelten Hauptsätze sämmtlich durch Anwendung des rein geometrischen Verfahrens, ohne die Hilfsmittel der Coordinatentheorie, zu gewinnen. Davon kann man sich durch eine leichte Ueberlegung überzeugen, welche an Satz II) des § 3. zu knüpfen ist. Man braucht sich hiebei nur zu erinnern, wie leicht die gewöhnliche Elementargeometrie auch ihrerseits den geometrischen Ort des Punktes zu finden wisse, für welchen die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von zwei fest gegebenen Punkten einen constanten Wert haben soll.

Ludwigsburg im Februar 1878.

XXVIII.

Untersuchungen über das Dreieck.

Von

Emil Hain.

IV.

Beispiele symmetrischer Transversalensysteme.

1. ABC seien die Ecken des Fundamentaldreiecks. Die eine Seite der Geraden BC , welche das Dreieck selbst enthält, sei die positive, die andere die negative. Tragen wir von B aus auf AB die Länge $+a'$ auf, so befindet sich der andere Endpunkt A_c auf der positiven Seite von BC . Ist a' negativ, so müssen wir AB über B hinaus verlängern. Wird a' als symmetrisch nach b, c ($BC = a$) vorausgesetzt; so bestehen zwischen den A_b verschiedene Beziehungen, von denen einige im folgenden aufgestellt werden.

Es sei $BA_c = a' = CA_b$. Wird a' als positiv vorausgesetzt und sind $A_c(a)$, $A_c(b)$, $A_c(c)$ die Normalen von A_c auf die Seiten des Dreiecks ABC ; so gibt die Figur:

$$A_c(a) = a' \sin \beta$$

$$A_c(b) = (c - a') \sin \alpha$$

$$A_c(c) = 0$$

wo Wkl. $BAC = \alpha$; ebenso:

$$A_b(a) = a' \sin \gamma$$

$$A_b(b) = 0$$

$$A_b(c) = (b - a') \sin \alpha$$

Die Form dieser Ausdrücke bleibt bestehen, wenn sich A_b, A_c auf der andern Seite von BC befinden, in welchem Falle a' negativ zu nehmen ist.

Werden die den Seitennormalen proportionalen Ausdrücke als trimetrische Coordinaten gebraucht, so bekommen wir:

$$\begin{aligned} A_c &\equiv a' \sin \beta \quad (c - a') \sin \alpha & 0 \\ &\equiv a' \frac{2F}{ac} \quad (c - a') \frac{2F}{bc} & 0 \\ &\equiv a'b & a(c - a') & 0 \\ A_b &\equiv a'c & 0 & a(b - a') \end{aligned}$$

Die Verbindungsgerade zweier Punkte $\xi_a, \xi_{a'}$ hat die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_a & \xi_a & \xi_{a'} \\ x_b & \xi_b & \xi_{b'} \\ x_c & \xi_c & \xi_{c'} \end{vmatrix} = 0$$

Sonach ist

$$A_b A_c \equiv \begin{vmatrix} x_a & a'b & a'c \\ x_b & a(c - a') & 0 \\ x_c & 0 & a(b - a') \end{vmatrix} = 0$$

oder wenn wir nur die Coefficienten der x_a schreiben:

$$A_b A_c \equiv a(a' - b)(a' - c) \quad a'b(a' - b) \quad a'c(a' - c)$$

Für $a' = a$ wird:

$$A_b A_c \equiv (a - b)(a - c) \quad b(a - b) \quad c(a - c)$$

Zwei Gerade:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

$$a_2 x_a + b_2 x_b + c_2 x_c = 0$$

sind parallel, wenn:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Die Harmonikale des Inkreiscentrums des Axendreiecks (die gerade Polare dieses Punktes in Bezug auf die dreiseitige Curve ABC) hat die Gleichung:

$$x_a + x_b + x_c = 0$$

Nun ist:

$$\begin{vmatrix} (a - b)(a - c) & b(a - b) & c(a - c) \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Die $A_b A_c$ sind also für $a' = a$ einander parallel und zwar der Harmonikalen des Inkreiscentrums.

(Archiv XXXXVI. Emsmann, Entfernungsortdreieck).

Für $a' = -a$ erhalten wir:

$$A_b A_c \equiv (a+b)(a+c) - b(a+b) - c(a+c)$$

In diesem Falle treffen die $A_b A_c$ die BC in:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv 0 & c(a+c) & & -b(a+b) \\ &\equiv 0 & c(a+c)(b+c) & & -b(a+b)(b+c) \end{aligned}$$

Die A_1 liegen in der Harmonikalen des Punktes:

$$bc(b+c)$$

des Spieker'schen Punktes, des Inkreiscentrums des Mittendreiecks.

Für $a' = b+c$ wird:

$$A_b A_c \equiv a \quad b+c \quad b+c$$

Die $A_b A_c$ treffen dann die BC in jenen Punkten, in welchen die äusseren Winkelhalbirenden die Gegenseiten treffen.

Für $a' = b' = c' = m$ wird:

$$A_b A_c \equiv a(m-b)(m-c) \quad bm(m-b) \quad cm(m-c)$$

Die $A_b A_c$ treffen die BC in Punkten A_1 , welche in der Geraden $a(m-a)$ liegen. Der Punkt $a(m-a)$ wird also auf folgende Weise construirt: Man trage von den Ecken des Dreiecks ABC auf den Seiten desselben gleiche Stücke

$$BA_c = CA_b = m$$

nach Innen (oder nach Aussen) ab. Die $A_b A_c$ treffen die BC in Punkten der Geraden $a(m \mp a)$, wo das obere Zeichen für die Construction nach Innen, das untere für die nach Aussen gilt.

Ist das Dreieck ABC gleichseitig, so erhalten wir:

$$A_b A_c \equiv a' - a \quad a' \quad a'$$

Drei Gerade:

$$\Sigma a_1 x_a = \Sigma a_2 x_a = \Sigma a_3 x_a = 0$$

bilden ein Dreieck von der Fläche:

$$abc E \Delta^2 : A_1 A_2 A_3$$

wo

$$\Delta = \Sigma a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2)$$

$$A_1 = \Sigma a (b_2 c_3 - b_3 c_2)$$

Für die $A_b A_c$ ist hier:

$$\Delta = a^2(a' + b' + c' - a), \quad A_1 = a^3$$

Wir haben also den Satz:

Liegen auf den Seiten AB , AC eines gleichseitigen Dreiecks die Punkte A_c , A_b so auf derjenigen Seite von BC , welche das Dreieck enthält, dass:

$$BA_c = CA_b = a';$$

so wird für $\Sigma a' = \text{const.}$ auch der Flächeninhalt des Dreiecks, das die Geraden $A_b A_c$ bilden, constant. Für $\Sigma a' = a$ schneiden sich die $A_b A_c$ in einem Punkte.

2. A_1 sei ein solcher Punkt in der Ebene eines Dreiecks ABC , dass die Stralen BA_1 , CA_1 mit der positiven Seite von BC die Winkel β' , γ' bilden. Bezeichnen wir mit α die Winkel des Dreiecks und mit $A_1(\alpha)$ die Normalen von A_1 auf die BC , so gibt die Figur:

$$\frac{A_1(b)}{A_1(\alpha)} = \frac{\sin(\gamma - \gamma')}{\sin \gamma'}$$

$$\frac{A_1(c)}{A_1(\alpha)} = \frac{\sin(\beta - \beta')}{\sin \beta'}$$

Die trimetrischen Coordinaten von A_1 sind also:

$$A_1 \equiv 1 \quad \frac{\sin(\gamma - \gamma')}{\sin \gamma'} \quad \frac{\sin(\beta - \beta')}{\sin \beta'}$$

$$\equiv \sin \beta' \sin \gamma' \quad \sin \beta' \sin(\gamma - \gamma') \quad \sin \gamma' \sin(\beta - \beta')$$

Dann ist:

$$AA_1 \equiv 0 \quad \sin \gamma' \sin(\beta - \beta') \quad -\sin \beta' \sin(\gamma - \gamma')$$

Diese Gerade trifft BC in

$$\gamma_a \equiv 0 \quad \sin \beta' \sin(\gamma - \gamma') \quad \sin \gamma' \sin(\beta - \beta')$$

$$\equiv 0 \quad \sin \beta' \sin(\gamma - \gamma') \sin(\alpha - \alpha') \quad \sin \gamma' \sin(\beta - \beta') \sin(\alpha - \alpha')$$

Wir haben sonach den Satz:

Liegt A_1 so in der Ebene eines Dreiecks ABC , dass die $A_1 B$, $A_1 C$ mit der positiven Seite von BC die Winkel

$$A_1 B C = \beta', \quad A_1 C B = \gamma'$$

bilden; dann treffen sich die AA_1 in einem Punkte

$$\gamma \equiv \sin \alpha' \sin(\beta - \beta') \sin(\gamma - \gamma')$$

Wenn die Stralen BA_1 , CA_1 mit der negativen Seite von BC die Winkel β' , γ' bilden: so sind die α' negativ zu nehmen. Jedem Punkte γ entspricht also ein Punkt

$$\gamma \equiv \sin \alpha' \sin(\beta + \beta') \sin(\gamma + \gamma')$$

Wir wollen sie durch die Bezeichnungen γ_+ , γ_- auseinander halten, so dass

$$\gamma_+ \equiv \sin \alpha' \sin(\beta - \beta') \sin(\gamma - \gamma')$$

$$\gamma_- \equiv \sin \alpha' \sin(\beta + \beta') \sin(\gamma + \gamma')$$

Für $\alpha' = 2\alpha$ wird:

$$\gamma_+ \equiv \sin 2\alpha \sin(\beta - 2\beta') \sin(\gamma - 2\gamma')$$

$$\equiv \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \equiv \cos \alpha$$

d. h. Liegen die Punkte A_1 so in der Ebene eines Dreiecks, dass die Geraden BA_1 , CA_1 mit der positiven Seite von BC Winkel bilden, die zweimal so gross sind, als die Dreieckswinkel in den betreffenden Ecken; so gehen die AA_1 durch das Umkreiscentrum des Urdreiecks.

Für $\alpha' = \frac{\alpha}{2}$ wird

$$\gamma_+ \equiv \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \equiv 1;$$

wir erhalten, wie die Figur unmittelbar ergibt, das Inkreiscentrum.

Dividiren wir den Ausdruck

$$\sin \alpha' \sin(\beta \mp \beta') \sin(\gamma \mp \gamma')$$

durch $\Pi \cos \alpha \cos \alpha'$ und setzen wir $\tan \alpha' = a_1$, so finden wir:

$$\gamma_{\pm} \equiv a_1 \cos \beta \cos \gamma [\tan \beta \tan \gamma + b_1 c_1 \mp (b_1 \tan \gamma + c_1 \tan \beta)]$$

Für $a_1 = b_1 = c_1 = \tan \lambda = \varepsilon$ wird

$$\gamma_{\pm} \equiv \varepsilon \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \mp \sin \alpha$$

(Archiv LIX, 418.)

Die Werte: $\lambda = 45^\circ$, $\varepsilon = 1$ geben das Punktepaar:

$$\cos(\beta - \gamma) \mp \sin \alpha$$

Dasselbe teilt die Entfernung des Grebe'schen Punktes vom Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises harmonisch.

V.

Die Antipunkte des Umkreises.

Ist P ein beliebiger Punkt in der Ebene eines Dreiecks ABC , U der Mittelpunkt des Umkreises desselben; so liegt auf der Geraden UP jenseits von P ein solcher Punkt \mathfrak{P} , dass

$$\mathfrak{P}U = UP$$

Diesen Punkt \mathfrak{P} nennen wir den Antipunkt von P bezüglich des Umkreises.

P sei gegeben durch seine Coordinaten in Bezug auf das Dreieck ABC , so dass:

$$P \equiv p_a \ p_b \ p_c$$

Bezeichnen wir mit $P(a)$, $\mathfrak{P}(a)$, $U(a)$ die Normalen der Punkte P , \mathfrak{P} , U auf die BC ; so ist:

$$P(a) = \frac{2Fp_a}{\Sigma ap_a}, \quad U(a) = r \cos \alpha$$

wenn $BC = a$, $\triangle ABC = F$, Winkel $CAB = \alpha$, $AU = r$.

Die Figur gibt:

$$\begin{aligned} 2U(a) &= P(a) + \mathfrak{P}(a) \\ \mathfrak{P}(a) &= 2r \cos \alpha - \frac{2Fp_a}{\Sigma ap_a} \end{aligned}$$

Die Coordinaten von P sind proportional den $\mathfrak{P}(a)$, wir erhalten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &\equiv \cos \alpha - \frac{F}{ra} \cdot \frac{ap_a}{\Sigma ap_a} \equiv \cos \alpha - (\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma) \frac{ap_a}{\Sigma ap_a} \\ &\equiv \cos \alpha (bp_b + cp_c) - a \cos \beta \cos \gamma p_a \end{aligned}$$

Sowol die Figur, als die so erhaltene Form von \mathfrak{P} zeigt, dass der Ort der Punkte \mathfrak{P} eine Gerade ist, wenn die P auf einer Geraden liegen. Es entspricht dann jeder Geraden a_1 eine Gerade α_1 , deren Gleichung wir nun bestimmen. Haben wir

$$\Sigma \alpha_1 x_a = 0$$

so ist

$$\xi_a = \cos \alpha (bx_b + cx_c) - a \cos \beta \cos \gamma x_a$$

Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_a &\equiv \begin{vmatrix} \xi_a & \cos \alpha & \cos \alpha \\ \xi_b & -\cos \gamma \cos \alpha & \cos \beta \\ \xi_c & \cos \gamma & -\cos \alpha \cos \beta \end{vmatrix} \\ &\equiv -a \cos \beta \cos \gamma \xi_a + b \cos \alpha \xi_b + c \cos \alpha \xi_c \end{aligned}$$

Dies in die Gleichung

$$\Sigma \alpha_1 x_a = 0$$

eingesetzt, gibt:

$$\alpha_1 = a(b_1 \cos \beta + c_1 \cos \gamma - a_1 \cos \beta \cos \gamma)$$

Ist $\alpha_1 = \alpha$, so wird auch $a_1 = a$; d. h. die unendlich entfernte Ge-

rade ist sich selbst conjugirt. Ebenso muss $a_1 \equiv a_1$ werden, wenn die Gerade a_1 durch U geht. Es ist dann:

$$a_1 = a(b_1 \cos \beta + c_1 \cos \gamma + a_1 \cos \alpha - a_1 \cos \alpha - a_1 \cos \beta \cos \gamma)$$

Nun ist:

$$\Sigma a_1 \cos \alpha = 0$$

$$\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma = \frac{F}{ra}$$

also:

$$a_1 = -\frac{F}{r} a_1 \equiv a_1$$

Sind also \mathfrak{ABC} die Antipunkte von ABC , so sind wegen der Congruenz dieser beiden Dreiecke P und \mathfrak{P} Congruenzpunkte. So ist z. B. der Höhenschnitt des Dreiecks \mathfrak{ABC} der Punkt:

$$\cos \alpha (b \cos \alpha \cos \gamma + c \cos \alpha \cos \beta) - a \cos \beta^2 \cos \gamma^2 \equiv \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma \equiv S$$

Sind S, H Schwerpunkt und Höhenschnitt des Urdreiecks, so liegt S bezüglich UH harmonisch zu S .

VI.

Ueber einige Symmetriekegelschnitte.

1. Trifft eine Gerade die Seite BC des Dreiecks ABC in A_1 , und PA_1 , wo P ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ist, die Seiten AC, AB in A_b, A_c ; so liegen die Punkte A_b auf einem Kegelschnitt.

P sei gegeben durch die Coordinaten: p_a, p_b, p . Die Gerade $A_1B_1C_1$ habe die Gleichung

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

Dann ist:

$$PA_1 \equiv a_1' - b_1 p_a - c_1 p_a$$

$$A_b \equiv c_1 p \quad 0 \quad a_1'$$

$$A_c \equiv b_1 p_a \quad a_1' \quad 0$$

wo

$$a_1' = b_1 p_b + c_1 p_c$$

Wir nehmen an, die Punkte A_b liegen auf dem Kegelschnitte

$$\Sigma g_{aa} x_a^2 + 2 \Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

Zwei von den Punkten A_b liegen auf BC , sie sind:

$$B_a \equiv 0 \quad c_1 p_b \quad b_1'$$

$$C_a \equiv 0 \quad c_1' \quad b_1 p_c$$

Für diese Punkte ist

$$g_{bb} c_1^2 p_b^2 + g_{cc} b_1'^2 + 2g_{bc} b_1' c_1 p_b = 0$$

$$g_{bb} c_1'^2 + g_{cc} b_1^2 p_c^2 + 2g_{bc} c_1' b_1 p_c = 0$$

Hieraus erhalten wir:

$$\frac{g_{bb}}{-2g_{bc}} = \frac{p_c p_a b_1 b_1'}{p_a(b_1' c_1' + b_1 c_1 p_b p_c)}$$

Sonach ist

$$g_{aa} = a_1 a_1' p_b p_c$$

$$-2g_{bc} = p_a(b_1' c_1' + b_1 c_1 p_b p_c)$$

Die Gleichung des Kegelschnittes, auf welchem die A_b liegen, ist demnach:

$$\Sigma a_1(b_1 p_b + c_1 p_c) p_b p_c x_a^2 - \Sigma p_a[(a_1 p_a + b_1 p_b)(a_1 p_a + c_1 p_c) + b_1 c_1 p_b p_c] x_b x_c = 0$$

Für $a_1 = a$ wird:

$$g_{aa} = a(b p_b + c p_c) p_b p_c$$

$$-2g_{bc} = p_a[(a p_a + b p_b)(a p_a + c p_c) + b c p_b p_c]$$

Die Gerade a_1 ist in diesem Falle die unendlich entfernte der Dreiecksebene. Die A_1 liegen im Unendlichen. PA_1 wird der BC parallel. Man hat den Satz:

Zieht man durch einen Punkt in der Ebene eines Dreiecks zu den Seiten desselben Parallele, so liegen die Schnittpunkte derselben mit den Seiten auf einem Kegelschnitt.

2. Es treffe eine Gerade die Seite BC des Dreiecks ABC in A_1 . P sei ein beliebiger Punkt in der Ebene desselben. In A_1 werde zu PA eine Parallele gezogen, welche die Seiten AB , AC in A_c , A_b trifft. Die Punkte A_b liegen auf einem Kegelschnitt.

Die Gerade $A_1 B_1 C_1$ habe die Gleichung:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

Für $P \equiv p_a$ ist

$$AP \equiv 0 \quad p_c - p_b$$

Der unendlich ferne Punkt von AP liegt auf der Geraden

$$a x_a + b x_b + c x_c = 0$$

und hat die Form

$$b p_b + c p_c - a p_b - a p_c$$

Verbinden wir diesen Punkt mit A_1 , so erhalten wir die Gerade

$$\begin{array}{ccc} a(b_1 p_b + c_1 p_c) & b_1(b p_b + c p_c) & c_1(b p_b + c p_c) \\ \equiv a a_1' & b_1 a' & c_1 a' \end{array}$$

wenn wir setzen

$$a' = b p_b + c p_c$$

$$a_1' = b_1 p_b + c_1 p_c$$

Somit ist

$$A_b \equiv c_1 a' \quad 0 \quad -a a_1'$$

$$A_c \equiv b_1 a' \quad -a a_1' \quad 0$$

$$B_a \equiv 0 \quad c_1 b' \quad -b b_1'$$

$$C_a \equiv 0 \quad -c c_1' \quad b_1 c'$$

Setzen wir die Coordinaten dieser beiden letzten Punkte in die Gleichung

$$\Sigma g_{aa} x_a^2 + 2 \Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

ein, so erhalten wir:

$$g_{bb}(c_1 b')^2 + g_{cc}(b b_1')^2 - 2g_{bc} b b_1' c_1' = 0$$

$$g_{bb}(c c_1')^2 + g_{cc}(b_1 c')^2 - 2g_{bc} c c_1' b_1' = 0$$

Hieraus folgt

$$\frac{g_{bb}}{2g_{bc}} = \frac{b b_1' c_1' a'}{a' (b_1 c_1' b' c' + b c b_1' c_1')}$$

Sonach liegen die A_b auf dem Kegelschnitt

$$\Sigma a a_1' b' c' x_a^2 + \Sigma a' (b_1 c_1' b' c' + b c b_1' c_1') x_b x_c = 0$$

3. Es seien

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

$$a_2 x_a + b_2 x_b + c_2 x_c = 0$$

die Gleichungen zweier Geraden. A_1, A_2 seien ihre Schnittpunkte mit der Seite BC . $AP (P \equiv p_a)$ schneide die Gerade a_2 in P_a' ; $A_1 P_a'$ die AB, AC in A_c, A_b . Dann liegen die A_b auf einem Kegelschnitt.

Mit den Abkürzungen

$$a' = b p_b + c p_c$$

$$a_1' = b_1 p_b + c_1 p_c$$

$$a_2' = b_2 p_b + c_2 p_c$$

haben wir

$$P_a' \equiv a_2' \quad -a_2 p_b \quad -a_2 p_c$$

$$A_1 \equiv 0 \quad c_1 \quad -b_1$$

$$A_1 P_a' \equiv a_2 a_1' \quad b_1 a_2' \quad c_1 a_2'$$

Diese Gerade trifft die AC, AB in

$$A_b \equiv c_1 a_2' \quad 0 \quad -a_2 a_1'$$

$$A_c \equiv b_1 a_2' \quad -a_2 a_1' \quad 0$$

Zwei der Punkte A_b liegen auf der BC , sie sind:

$$\begin{aligned} B_a &\equiv 0 & c_1 b_2' & - b_2 b_1' \\ C_a &\equiv 0 & -c_2 c_1' & b_1 c_1' \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise wie in den früheren Fällen erhalten wir einen Kegelschnitt

$$\begin{aligned} \Sigma g_{aa} x_a^2 + 2 \Sigma g_{bc} x_b x_c &= 0 \\ g_{aa} &= a_1 a_2 a_1' b_2' c_2' \\ 2g_{bc} &= a_2' (b_1 c_1 b_2' c_2' + b_2 c_2 b_1' c_1'). \end{aligned}$$

VII.

Punkte Steiner'scher Verwandtschaft.

P und Q seien beliebige Punkte in der Ebene eines Dreiecks ABC . AP treffe BC in P_a . Die bezüglich BC , AP_a harmonischen Gegenstrahlen von QP_a treffen sich in einem Punkt. Es sei

$$\begin{aligned} P &\equiv p_a & p_b & p_c \\ Q &\equiv q_a & q_b & q_c \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} P_a &\equiv 0 & p_b & p_c \\ QP_a &\equiv p_b q_c - p_c q_b & p_c q_a & - p_b q_a \end{aligned}$$

Zwei Gerade

$$\begin{aligned} a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c &= 0 \\ a_2 x_a + b_2 x_b + c_2 x_c &= 0 \end{aligned}$$

werden durch das Geradenpaar $\kappa a_1 \pm \lambda a_2$ harmonisch geteilt. Es ist

$$\begin{aligned} AP_a &\equiv 0 & p_c & - p_b \\ BC &\equiv 1 & 0 & 0 \end{aligned}$$

Die Coordinaten der QP_a sind:

$$\begin{aligned} p_b q_c - p_c q_b &= \kappa \cdot 0 + \lambda \cdot 1 \\ p_c q_a &= \kappa \cdot p_c + \lambda \cdot 0 \\ -p_b q_a &= \kappa \cdot -p_b + \lambda \cdot 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen geben

$$\kappa = q_a, \quad \lambda = p_b q_c - p_c q_b$$

Die Coordinaten des harmonischen Gegenstrahles von QP_a sind demnach:

$$-(p_b q_c - p_c q_b) \quad p_c q_a \quad -p_b q_a$$

Der harmonische Gegenstral von QP_a zu AP_a , BC und der von QP_b zu BP_b , CA haben also die Formen

$$\begin{array}{ccc} p_c q_b - p_b q_c & p_c q_a & - p_b q_a \\ - p_c q_b & p_a q_c - p_c q_a & p_a q_b \end{array}$$

Wir haben nun

$$\begin{vmatrix} p_c q_a & - p_b q_a \\ p_a q_c - p_c q_a & p_a q_b \end{vmatrix} = q_a (p_c p_a q_b + p_a p_b q_c - p_b p_c q_a)$$

$$\begin{vmatrix} - p_b q_a & p_c q_b - p_b q_c \\ p_a q_b & - p_c q_b \end{vmatrix} = q_b (p_b p_c q_a + p_a p_b q_c - p_c p_a q_b)$$

$$\begin{vmatrix} p_c q_b - p_b q_c & p_c q_a \\ - p_c q_b & p_a q_c - p_c q_a \end{vmatrix} = q_c (p_c p_a q_b + p_b p_c q_a - p_a p_b q_c)$$

Die harmonischen Gegenstrahlen der QP_a treffen sich also im Symmetriepunkt

$$Q' \equiv q_a (p_a p_b q_c + p_c p_a q_b - p_b p_c q_a)$$

Sonach ist die eingangs dieses Paragraphen gestellte Behauptung bewiesen. Der Punkt Q' ist bekannt als der Steinersche Gegenpunkt von Q . Er ist der zu Q in Bezug auf den Kegelschnittbüschel $ABCP$ conjugirte Pol, wie sich auf folgende Weise ergibt.

Die Gleichung irgend eines Kegelschnittes, der durch ABC geht, ist:

$$\Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

Die Polare von Q bezüglich dieses Kegelschnittes ist die Gerade

$$\frac{\partial \Sigma g_{bc} q_b q_c}{\partial q_a} = g_{ab} q_b + g_{ac} q_c$$

Nun ist

$$\begin{aligned} & \Sigma (g_{ab} q_b + g_{ac} q_c) \times q_a (p_a p_b q_c + p_c p_a q_b - p_b p_c q_a) = \\ & \Sigma g_{ab} p_c p_a q_a q_b^2 + \Sigma g_{ab} p_a p_b q_a q_b q_c - \Sigma g_{ab} p_b p_c q_a^2 q_b \\ & + \Sigma g_{ac} p_c p_a q_a q_b q_c + \Sigma g_{ac} p_a p_b q_c^2 q_a - \Sigma g_{ac} p_b p_c q_c q_a^2 \\ & = 2 \Pi q_a \Sigma g_{bc} p_b p_c \end{aligned}$$

Weil P nach der Voraussetzung ein Basispunkt des Büschels ist, so wird $\Sigma g_{bc} p_b p_c = 0$. Q' geht also durch alle Polaren von Q .

Ist $P \equiv S \equiv bc$ der Schwerpunkt des Axendreiecks, so ist

$$Q_a' \equiv q_a (b q_b + c q_c - a q_a)$$

Für $Q \equiv G \equiv a$ wird ausserdem

$$G' \equiv a (b^2 + c^2 - a^2) \equiv \cos \alpha$$

Der Steiner'sche Punkt des Grebe'schen Punktes bezüglich des Schwerpunktes ist das Umkreiscentrum.

Der Punkt der gleichen Paralleltransversalen ist

$$T \equiv bc(ab + ac - bc)$$

(Archiv LXI 178).

T ist also der Steiner'sche Gegenpunkt von S in Bezug auf J , das Inkreiscentrum des Urdreiecks. Wir haben also folgende Construction von T :

S, I seien Schwerpunkt und Inkreiscentrum des Dreiecks ABC . AI treffe BC in I_a . Man ziehe zu SI_a den bezüglich BC , AI_a vierten harmonischen Stral. Die so gezeichneten Stralen treffen sich in T .

VIII.

Die konischen Polaren.

1. Sind x_a, p_a den Abständen der Punkte X, P von den Seiten BC des Dreiecks ABC proportional, so gilt die Beziehung

$$\sum p_a x_b x_c = 0$$

für alle Punkte eines Kegelschnittes, der durch die Ecken A geht und den besonderen Namen „konische Polare von P in Bezug auf das Dreieck ABC “ führt.

Setzen wir

$$S = \sum p_a \xi_b \xi_c,$$

so ist

$$\frac{\partial S}{\partial \xi_a} = p_b \xi_c + p_c \xi_b$$

die Form der Tangente im Punkte ξ der Curve S . Für A ist

$$\xi_a = 1, \quad \xi_b = \xi_c = 0$$

Die Tangente in A ist die Gerade

$$\begin{array}{rcl} & 0 & p_c \quad p_b \\ \text{sie trifft die } BC \text{ in} & A_1 \equiv 0 & p_b \quad -p_c \\ & \equiv 0 & p_a p_b \quad -p_a p_c \end{array}$$

Die A_1 liegen in der Geraden $p_b p_c$, der Harmonikalen von P .

Trifft die Harmonikale von P die BC in Π_a , so sind die $A\Pi_a$ Tangenten der konischen Polare von P .

$$\text{Für } \xi_a = p_a \text{ ist } p_b \xi_c + p_c \xi_b = 2p_b p_c.$$

Die Harmonikale eines Punktes fällt mit der Polare desselben bezüglich seiner konischen Polare zusammen.

Die Polare von $Q \equiv q_a$ in Bezug auf den Kegelschnitt

$$\Sigma p_a x_b x_c = 0$$

hat die Form: $p_b q_c + p_c q_b$.

Die Polare eines Punktes in Bezug auf die konische Polare eines zweiten Punktes ist zugleich die Polare dieses Punktes in Bezug auf die konische Polare des Ersten. Die Gleichungen

$$p_b \xi_c + p_c \xi_b = 0$$

geben die Coordinaten des Mittelpunktes. Derselbe hat die Form

$$\begin{vmatrix} a & p_c & p_b \\ b & 0 & p_a \\ c & p_a & 0 \end{vmatrix} \equiv p_a(b p_b + c p_c - a p_a)$$

Der Kegelschnitt

$$\Sigma p_a x_b x_c = 0$$

ist eine Parabel, wenn die Coordinaten des Mittelpunktes der Gleichung der unendlich entfernten Geraden genügen. Es muss also sein:

$$\Sigma a p_a(b p_b + c p_c - a p_a) = \Sigma a^2 p_a^2 - 2 \Sigma b c p_b p_c = 0$$

In variablen p_a stellt diese Gleichung einen Kegelschnitt dar, welcher die Seiten des Urdreiecks in ihren Mitten berührt.

Die konischen Polaren aller Punkte derjenigen Ellipse, welche die Seiten des Urdreiecks in den Mitten berührt, sind Parabeln.

Nach Schendel (Elemente der analytischen Geometrie, Seite 79) ist der Kegelschnitt

$$\Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Ausdruck

$$\vartheta = \Sigma a^2 g_{bc}^2 - 2 \Sigma b c g_{ab} g_{ac}$$

negativ, Null oder positiv ist.

Ist $P \equiv p_a = \varphi a + b + c$ ein Symmetriepunkt erster Ordnung, so gibt die Rechnung

$$\vartheta = -16 F^2 \varphi^2 - 4 \varphi a b c \Sigma a - 4 a b c \Sigma a$$

Für positive φ ist also S immer eine Ellipse. Die Auflösung der Gleichung $\vartheta = 0$ gibt zwei reelle Wurzeln für φ . Unter den konischen Polaren der Symmetriepunkte erster Dimension gibt es immer zwei, aber nur zwei Parabeln.

Für das Inkreiscentrum wird

Nun ist $p_a = 1, \vartheta = \Sigma a^2 - 2\Sigma bc$

$$\begin{aligned} b+c &> a \\ ab+ac &> a^2 \\ 2\Sigma bc &> \Sigma a^2 \end{aligned}$$

ϑ ist negativ. Die konische Polare des Inkreiscentrums ist eine Ellipse.

Die Ellipse $\Sigma x_b x_c = 0$ schneidet den Umkreis des Urdreiecks, die konische Polare des Grebe'schen Punktes $\Sigma a x_b x_c = 0$ im Punkte $(a-b)(a-c)$, dem harmonischen Pole der Geraden $b-c$, auf welcher alle Punkte $\varphi a + b + c$ liegen. Dieser vierte Schnittpunkt ist Basispunkt des Kegelschnittbüschels

$$\Sigma(\varphi a + b + c)x_b x_c = \varphi \Sigma a x_b x_c + \Sigma(b+c)x_b x_c = 0$$

Durch Projection erhalten wir den Satz:

Die konischen Polaren aller Punkte einer Geraden schneiden sich im harmonischen Pol derselben bezüglich des Urdreiecks.

Dies erhellt auch unmittelbar aus der Gleichung $\Sigma p_a x_b x_c = 0$ selbst. Der harmonische Pol einer Geraden x_a ist der Punkt $x_b x_c$. Die konische Polare von P ist der Ort der harmonischen Pole aller Geraden, welche durch P gehen.

2. Die konische Polare des Schwerpunktes hat die Gleichung:

$$\Sigma bc x_b x_c = 0$$

Hier ist

$$\vartheta = \Sigma a^2 g_{bc}^2 - 2\Sigma bc g_{ca} g_{ab} = -3a^2 b^2 c^2$$

Die Curve ist eine Ellipse, ihr Centrum der Schwerpunkt $S \equiv bc$.

Trifft die Harmonikale von P die BC in Π_a , so berührt die konische Polare von P die $A\Pi_a$. Die $A\Pi_a$ sind hier die durch A zu BC gezogenen Parallelen.

Die konische Polare des Schwerpunktes ist eine Ellipse, deren Centrum der Schwerpunkt ist, und welche die durch die Ecken des Dreiecks zu den Gegenseiten parallel gezogenen Geraden berührt. Die Gerade

$$SA \equiv bx_b - cx_c = 0$$

trifft die Ellipse in

$$\mathfrak{S}_a \equiv -bc \quad 2ca \quad 2ab$$

Es ist

$$\mathfrak{S}_b \mathfrak{S}_c \equiv -a \quad 2b \quad 2c$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} -a & 2b & 2c \\ 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

verschwindet. $\mathfrak{S}_b \mathfrak{S}_c$ ist parallel zur BC .

Ist S der Schwerpunkt des Dreiecks ABC und wird die konische Polare des Punktes S bezüglich des Urdreiecks von AS in \mathfrak{S}_a getroffen, so sind die $\mathfrak{S}_b \mathfrak{S}_c$ parallel den BC .

Die AS und BC sind, weil BC durch AS halbiert wird und die durch A zu BC gezogene Parallele Tangente ist, conjugirte Halbmesser.

Die durch S zu BC parallel gezogene Transversale trifft die Ellipse in den Punkten $\mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_c$. Man findet

$$\mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_c \equiv -2a \quad b \quad c$$

Die Elimination aus den Gleichungen

$$-2ax_a + bx_b + cx_c = 0$$

$$bcx_b x_c + cax_c x_a + abx_a x_b = 0$$

gibt

$$\mathfrak{U}_b \equiv bc \quad ca(1 + \sqrt{3}) \quad ab(1 - \sqrt{3})$$

$$\mathfrak{U}_c \equiv bc \quad ca(1 - \sqrt{3}) \quad ab(1 + \sqrt{3})$$

Die Entfernung der beiden Punkte $\mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_c$ wird durch die allgemeine Distanzformel bestimmt, welche für zwei Punkte $P \equiv p_a, Q \equiv q_a$ gilt, so dass

$$\overline{PQ}^2 = \frac{-abc \sum a(p_b q - q_b p)(p_c q - q_c p)}{p^2 q^2}$$

wo

$$p = \sum ap_a, \quad q = \sum aq_a$$

Die Rechnung gibt:

$$p = q = 3abc$$

$$\overline{\mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_c}^2 = \frac{4a^2}{3} = 4\overline{S\mathfrak{U}_b}^2 = 4\overline{S\mathfrak{U}_c}^2$$

Ferner ist:

$$SA = \frac{2}{3}s_a = \frac{1}{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$\overline{SA}^2 + \overline{S\mathfrak{U}_b}^2 = \frac{2\Sigma a^2}{9}$$

Ausserdem haben wir:

$$SA \cdot S\mathfrak{U}_b \cdot \sin AS\mathfrak{U}_b = \frac{2}{3}s_a \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2F}{as_a} = \frac{4F}{3\sqrt{3}}$$

Sind x, y die Halbaxen der Ellipse; so ist:

$$x^2 + y^2 = \frac{2\Sigma a^2}{9}$$

$$xy = \frac{4F}{3\sqrt{3}}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt:

$$x = \frac{1}{3} \sqrt{\Sigma a^2 + 2\sqrt{\Sigma a^4 - \Sigma b^2 c^2}}$$

$$y = \frac{1}{3} \sqrt{\Sigma a^2 - 2\sqrt{\Sigma a^4 - \Sigma b^2 c^2}}$$

Die konische Polare des Schwerpunktes ist zugleich die kleinste Ellipse, welche nach Euler dem Dreieck ABC umschrieben werden kann. Sie hat den Flächeninhalt:

$$xy\pi = \frac{4F\pi}{3\sqrt{3}}$$

(Archiv XI).

IX.

Die geraden Polaren.

1. Die Gleichung der geraden Polare eines Punktes ξ in Bezug auf die Curve

$$U = f(x_a, x_b, x_c) = 0$$

lautet:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_a} x_a + \frac{\partial U}{\partial \xi_b} x_b + \frac{\partial U}{\partial \xi_c} x_c = 0$$

wenn in U für die x die ξ substituirt werden. Diese Gerade heisst auch Harmonikale, wenn U eine Curve 3. Ordnung, aus 3 Geraden bestehend, darstellt.

$P \equiv p_a$ sei ein beliebiger Punkt in der Ebene des Fundamentaldreiecks ABC . Die Gleichungen der Geraden des Dreiseites PBC sind:

$$BC \equiv x_a = 0$$

$$PB \equiv \frac{x_a}{p_a} - \frac{x_c}{p_c} = 0$$

$$PC \equiv \frac{x_a}{p_a} - \frac{x_b}{p_b} = 0$$

Sonach ist

$$PBC \equiv U_a = \xi_a \left(\frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_b}{p_b} \right) \left(\frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_c}{p_c} \right)$$

Die Harmonikale von ξ in Bezug auf das Dreiseit PBC hat die Form

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_a}{\partial \xi_a} \quad \frac{\partial U_a}{\partial \xi_b} \quad \frac{\partial U_a}{\partial \xi_c} \\ \equiv & - \frac{\partial U_a}{\partial \xi_a} \frac{\xi_a}{p_b} \left(\frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_c}{p_c} \right) \frac{\xi_a}{p_c} \left(\frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_b}{p_b} \right) \end{aligned}$$

- Diese Gerade trifft die BC im Punkte

$$\begin{aligned} R_a &\equiv 0 & \frac{1}{p_c} \left(\frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_b}{p_b} \right) & - \frac{1}{p_b} \left(\frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_c}{p_c} \right) \\ &\equiv 0 & p_b \left(\frac{\xi_b}{p_b} - \frac{\xi_c}{p_c} \right) \left(\frac{\xi_b}{p_b} - \frac{\xi_a}{p_a} \right) & p_c \left(\frac{\xi_c}{p_c} - \frac{\xi_a}{p_a} \right) \left(\frac{\xi_c}{p_c} - \frac{\xi_b}{p_b} \right) \end{aligned}$$

Die AR_a treffen sich im Punkte

$$R \equiv p_a \left(\frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_b}{p_b} \right) \left(\frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_c}{p_c} \right)$$

dem Pole der Geraden

$$p_b p_c \left(\frac{\xi_b}{p_b} - \frac{\xi_c}{p_c} \right)$$

der Verbindungsgeraden der Punkte ξ , P .

Die Harmonikalen eines Punktes Q in Bezug auf die Dreiseite PBC treffen die BC in R_a . Die AR_a schneiden sich im harmonischen Pol der Geraden BC bezüglich des Urdreiecks.

2. Trifft AP die BC in P_a , schneiden sich die Harmonikalen eines Punktes ξ in Bezug auf die Dreiseite ABP_a , ACP_a in A_1 ; so begegnen sich die AA_1 im Punkte ξ .

Die Gleichungen der Geraden AB , AP_a , BP_a sind:

$$x_c = 0, \quad \frac{x_b}{p_b} = 0, \quad x_a = 0$$

Dann ist für

$$U_{ab} = \xi_a \xi_c \left(\frac{\xi_b}{p_b} - \frac{\xi_c}{p_c} \right)$$

die Harmonikale von ξ in Bezug auf das Dreiseit ABP_a die Gerade

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{ab}}{\partial \xi_a} & \quad \frac{\partial U_{ab}}{\partial \xi_b} & \quad \frac{\partial U_{ab}}{\partial \xi_c} \equiv \\ \xi_c \left(\frac{\xi_b}{p_b} - \frac{\xi_c}{p_c} \right) & \quad \frac{\xi_c \xi_a}{p_b} & \quad \xi_a \left(\frac{\xi_b}{p_b} - \frac{2\xi_c}{p_c} \right) \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir die Form der Harmonikalen von ξ in Bezug auf das Dreiseit ACP_a :

$$\xi_b \left(\frac{\xi_b}{p_b} - \frac{\xi_c}{p_c} \right) \quad \xi_a \left(\frac{2\xi_b}{p_b} - \frac{\xi_c}{p_c} \right) \quad - \frac{\xi_a \xi_b}{p_b}$$

Die Harmonikalen von ξ in Bezug auf die Dreiseite ABP_a , ACP_a treffen sich in

$$A_1 \equiv -2\xi_a \quad \xi_b \quad \xi_c$$

Sonach ist

$$AA_1 \equiv 0 \quad \xi_c - \xi_b$$

Die AA_1 treffen sich im Punkte ξ .

3. Die Harmonikale von P in Bezug auf das Dreieck ABC , welche die Seiten BC in Π_a trifft, ist zugleich die Harmonikale von P in Bezug auf das Dreieck, welches die $A\Pi_a$ bilden.

4. Trifft eine Gerade die Seiten BC des Dreiecks ABC in A_1 und ist ihre Gleichung:

$$\Sigma a_1 x_a = 0$$

so ist die Figur $ABCA_1B_1C_1$ eine vierseitige Curve von der Gleichung:

$$x_a x_b x_c (a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c) = 0$$

Setzen wir

$$U = \Pi \xi_a \Sigma a_1 \xi_a$$

so finden wir:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_a} = \xi_b \xi_c (2a_1 \xi_a + b_1 \xi_b + c_1 \xi_c)$$

Trifft eine Gerade die Seiten BC des Dreiecks ABC in A_1 , und construirt man die gerade Polare des Punktes ξ in Bezug auf die Dreiseite AB_1C_1 ; so treffen diese nach Cayley die BC in Punkten einer Geraden von der Form

$$\xi_b \xi_c (2a_1 \xi_a + b_1 \xi_b + c_1 \xi_c)$$

Die Curve U des vierten Grades bestehe aus vier Geraden:

$$\Sigma a_1 x_a = \Sigma a_2 x_a = \Sigma a_3 x_a = \Sigma a_4 x_a = 0$$

Dann ist

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_a} \equiv \frac{a_1}{\xi_1} + \frac{a_2}{\xi_2} + \frac{a_3}{\xi_3} + \frac{a_4}{\xi_4}$$

wo

$$\Sigma a_i \xi_a = \xi_i$$

Die Harmonikale von ξ in Bezug auf das Dreieck

$$\Sigma a_2 x_a \cdot \Sigma a_3 x_a \cdot \Sigma a_4 x_a = 0$$

hat die Form

$$\frac{a_2}{\xi_2} + \frac{a_3}{\xi_3} + \frac{a_4}{\xi_4} = \alpha,$$

Es ist identisch:

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1}{\xi_1} + \alpha_1 & a_1 & a_1 \\ \frac{b_1}{\xi_1} + \beta_1 & b_1 & \beta_1 \\ \frac{c_1}{\xi_1} + \gamma_1 & c_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0$$

Die Geraden $\frac{a_1}{\xi_1} + a_1$, a_1 , a_1 treffen sich in einem Punkt. Der so bewiesene Cayley'sche Satz lautet:

Die Harmonikalen eines Punktes ξ in Bezug auf je drei der vier Geraden

$$\Sigma a_1 x_a = \Sigma a_2 x_a = \Sigma a_3 x_a = \Sigma a_4 x_a = 0$$

schneiden die übrigen vierten in Punkten einer Geraden von der Form

$$\frac{a_1}{\Sigma a_1 \xi_a} + \frac{a_2}{\Sigma a_2 \xi_a} + \frac{a_3}{\Sigma a_3 \xi_a} + \frac{a_4}{\Sigma a_4 \xi_a}$$

X.

Ein Symmetriepunkt erster Ordnung.

Die Fusspunkte der Höhen eines Dreiecks ABC seien H_a . Man verlängere AH_a über H_a bis A' , so dass

$$H_a A' = \frac{AB + AC}{n} = \frac{b + c}{n}$$

wo n ein beliebiger, numerischer Wert ist. Durch B' , C' werden zu AC , AB Parallele gezogen, die sich in A'' treffen. Sind $A''(a)$ die Normalen von A'' auf BC , so gibt die Figur:

$$A''(b) = -\frac{c + a}{n}, \quad A''(c) = -\frac{a + b}{n}$$

Für die Normalen x_a eines jeden Punktes der AA'' gilt:

$$x_b : x_c = A''(b) : A''(c) = (c + a) : (a + b) = (c + a) \frac{F}{\Sigma bc} : (a + b) \frac{F}{\Sigma bc}$$

Die symmetrische Form dieser Proportion beweist, dass die AA'' sich in einem Punkte D schneiden, dessen Normale auf BC die Länge

$$(b + c) \cdot \frac{F}{\Sigma bc}$$

hat. Indem wir den Proportionalitätsfactor weglassen und das Dreieck ABC als Coordinatendreieck betrachten, schreiben wir:

$$D \equiv b + c \quad c + a \quad a + b$$

Die Punkte, deren Coordinaten cyklisch substituirt, den Ausdrücken

$$\varphi a + b + c$$

gleich sind, heissen Symmetriepunkte erster Ordnung, weil die Grössen

a nur in der ersten Potenz erscheinen. Ist $\varphi = 1$, so erhalten wir das Inkreiscentrum. Der Punkt $\varphi = \infty$ ist der Grebe'sche Punkt. Dem Falle $\varphi = 0$ entspricht der Punkt $D \equiv b+c$, welcher also einer der Grundpunkte der Symmetriepunkte erster Ordnung ist. Die Harmonikale (gerade Polare) von D in Bezug auf das Dreieck ABC hat die Gleichung:

$$\Sigma(a+b)(a+c)x_a = 0$$

Der Abstand eines Punktes P mit den Seitennormalen p_a von einer Geraden

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

hat den Ausdruck:

$$\frac{\Sigma a_1 p_a}{\sqrt{\Sigma a_1^2 - 2 \Sigma b_1 c_1 \cos \alpha}}$$

wo α die Winkel des Fundamentaldreiecks bezeichnen.

Für $a_1 = (a+b)(a+c)$ wird

$$\Sigma a_1^2 = \Sigma a^4 + 2 \Sigma a^3(b+c) + 8abc \Sigma a + 3 \Sigma b^2 c^2$$

$$\begin{aligned} \Sigma b_1 c_1 \cos \alpha &= \Pi(b+c) \Sigma(b+c) \cos \alpha = \Pi(b+c) \Sigma a \\ &= 4abc \Sigma a + \Sigma a^3(b+c) + 2 \Sigma b^2 c^2 \end{aligned}$$

$$\Sigma a_1^2 - 2 \Sigma b_1 c_1 \cos \alpha = \Sigma a^4 - \Sigma b^2 c^2$$

Somit ist der Abstand d eines Punktes P von der Harmonikalen von D :

$$d = \frac{\Sigma(a+b)(a+c)p_a}{\sqrt{\Sigma a^4 - \Sigma b^2 c^2}}$$

Die Entfernung des Punktes D von seiner Harmonikalen ist:

$$\frac{\Pi(b+c)}{\sqrt{\Sigma a^4 - \Sigma b^2 c^2}} \cdot \frac{F}{\Sigma bc}$$

Die Gerade $b+c$ ist die Reciproke der Harmonikalen von D . Trifft diese die BC in A_a , ist I das Inkreiscentrum des Urdreiecks, schneidet AI die BC in I_a ; so trage man den Winkel $\angle_a A I_a$ auf der andern Seite von $A I_a$ auf, so dass der neue Schenkel die BC in \mathfrak{D}_a schneidet. Die \mathfrak{D}_a liegen nach einem bekannten Satze in der Reciproken von $\angle_a \mathfrak{D}_b \mathfrak{D}_c$ d. i. in der Geraden $b+c$. Die Gleichung des Umkreises ist $\Sigma a x_b x_c = 0$. Die Polare eines Punktes ξ in Bezug auf denselben hat die Form

$$\frac{\partial \Sigma a \xi_b \xi_c}{\partial \xi_a} = b \xi_c + c \xi_b$$

Für $\xi_a = 1$ erhalten wir die Gerade $b+c$.

Die reciproke Gerade der Harmonikalen des Punktes D ist die Umkreispolare des Inkreiscentrums.

Die konische Polare von D in Bezug auf das Dreieit ABC hat die Gleichung

$$\Sigma(b+c)x_b x_c = 0$$

Die Bestimmung des Kegelschnittes

$$\Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

hängt von dem Ausdrucke ab:

$$\vartheta = \Sigma a^2 g_{bc}^2 - 2 \Sigma bc g_{ab} g_{ac}$$

Hier ist

$$\Sigma a^2 g_{bc}^2 = 2 \Sigma b^2 c^2 + 2abc \Sigma a$$

$$\Sigma bc g_{ab} g_{ac} = 3abc \Sigma a + \Sigma b^2 c^2$$

ϑ ist negativ. Die konische Polare von D ist eine Ellipse. Die Polare eines Punktes ξ in Bezug auf diese Ellipse hat die Form

$$\frac{\partial \Sigma(b+c)\xi_b \xi_c}{\partial \xi_a} = (c+a)\xi_c + (a+b)\xi_b$$

Die Auflösung der Gleichungen

$$(c+a)\xi_c + (a+b)\xi_b = a$$

bestimmt den Mittelpunkt. Er hat die Form $bc(b+c)$, ist also das Inkreiscentrum des Mittendreiecks, der Spieker'sche Punkt.

Die Harmonikalen aller Punkte, welche auf der Harmonikalen des Inkreiscentrums des Urdreiecks liegen, hüllen einen Kegelschnitt ein, die Polokonik der Harmonikalen des Inkreiscentrums. Die Gleichung dieser Curve ist:

$$\Sigma x_a^2 - 2 \Sigma x_b x_c = 0$$

Ihr Mittelpunkt ist der Punkt $D \equiv b+c$.

Wien, Januar 1878.

XXIX.

Miscellen.

1.

Weiterer Beitrag zur Theorie der Cissoide *).

I.

Von einem Punkte P in der Ebene der Cissoide kann man zu dieser drei Tangenten legen und die Berührungspunkte derselben bilden ein Dreieck, das Berührungsdreieck. Wir wollen nun untersuchen, welches der Ort der Punkte ist, für welche der Flächeninhalt des Berührungsdreiecks constant ist.

Es seien x, y die Coordinaten des Punktes P , und die Parameter der Berührungspunkte ergeben sich als Wurzeln nachstehender Gleichung

$$2u^3y - x(1 + 3u^2) + a = 0 \quad (1)$$

welches die Gleichung der Tangente im Punkte u der Cissoide ist, wenn die Coordinaten ihrer Punkte als rationale Functionen des Parameters dargestellt werden, nämlich

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{1+u^2} \\ y &= \frac{a}{u(1+u^2)} \end{aligned} \quad (2)$$

Ordnen wir die Gleichung (1) nach den fallenden Potenzen von u , so erhalten wir

*) Siehe dieses Archiv: Rationale ebene Curven. Teil 56. pag. 144. sowie Beitrag zur Theorie der Cissoide, ibid. Teil 57. pag. 335.

$$u^3 - \frac{3x}{2y}u^2 - \frac{x-a}{2y} = 0 \quad (3)$$

woraus sich sofort ergibt:

$$\begin{aligned} (u)_1 &= u_1 + u_2 + u_3 = \frac{3x}{2y} \\ (u)_2 &= u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = 0 \\ (u)_3 &= u_1u_2u_3 = \frac{x-a}{2y} \end{aligned} \quad (4)$$

wo u_1, u_2, u_3 die Parameter der Berührungspunkte bezeichnen, welche als Wurzeln der Gleichung (3) auftreten.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $u_1u_2u_3$ sei Δ , somit ist bekanntlich

$$2\Delta = \begin{vmatrix} \frac{a}{1+u_1^2} & \frac{a}{u_1(1+u_1^2)} & 1 \\ \frac{a}{1+u_2^2} & \frac{a}{u_2(1+u_2^2)} & 1 \\ \frac{a}{1+u_3^2} & \frac{a}{u_3(1+u_3^2)} & 1 \end{vmatrix}$$

oder

$$\begin{aligned} 2\Delta &= \frac{a^2}{\prod_{k=1}^3 u_k(1+u_k^2)} \begin{vmatrix} u_1 & 1 & u_1(1+u_1^2) \\ u_2 & 1 & u_2(1+u_2^2) \\ u_3 & 1 & u_3(1+u_3^2) \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{a^2}{\prod_{k=1}^3 u_k(1+u_k^2)} \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^3 \\ 1 & u_2 & u_2^3 \\ 1 & u_3 & u_3^3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^3 \\ 1 & u_2 & u_2^3 \\ 1 & u_3 & u_3^3 \end{vmatrix} = (u)_1 \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}$$

somit ist

$$\lambda \prod_{k=1}^3 u_k(1+u_k^2) = (u)_1 \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}$$

wo

$$\lambda = -\frac{2\Delta}{a^2}$$

ist und auch eine Constante bezeichnet, da der Voraussetzung gemäss Δ sich nicht ändern soll.

Bezeichnen wir nun mit $(u^r)_s$ einen Ausdruck, der aus $(u)_s$ sich ergibt, wenn wir u_i mit u_i^r ersetzen, so können wir der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}$$

eine für unseren Gebrauch passendere Form verleihen. Es ist nämlich

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 3 & (u)_1 & (u^2)_1 \\ (u)_1 & (u^2)_1 & (u^3)_1 \\ (u^2)_1 & (u^3)_1 & (u^4)_1 \end{vmatrix}$$

Nun ist wegen $(u)_2 = 0$

$$(u^2)_1 = (u)_1^2$$

$$(u^3)_1 = (u)_1^3 + 3(u)_3$$

$$(u^4)_1 = (u)_1^4 + 4(u)_1(u)_3$$

Führen wir diese Werte in die obige Determinante ein, so erhalten wir nach kurzer Umformung

$$(u)_3 \begin{vmatrix} 3 & (u)_1 & (u)_1^2 \\ -2(u)_1 & 0 & 3(u)_3 \\ 0 & 3 & (u)_3 \end{vmatrix}$$

oder entwickelt

$$(u)_3 \cdot \{-27(u)_3 + 2(u)_1^2[(u)_3 - 3(u)_1]\} = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}^2 \quad (6)$$

Mit Rücksicht auf die Gl. (6) können wir die Gl. (5) schreiben:

$$\left[\prod_{k=1}^3 u_k (1 + u_k^2) \right]^2 = (u)_1^2 (u)_3 \{-27(u)_3 + 2(u)_1^2[(u)_3 - 3(u)_1]\} \quad (7)$$

Es handelt sich nun darum $\prod_{k=1}^3 u_k (1 + u_k^2)$ als Function von $(u)_1$ und $(u)_3$ darzustellen und hernach in die so transformirte Gleichung (7) die Werte aus der Gleichung (4) für $(u)_1$ und $(u)_3$ einzuführen. Nun ist

$$\prod_{k=1}^3 u_k (1 + u_k^2) = (u)_3 [1 + (u^2)_1 + (u^2)_2 + (u^2)_3]$$

ferner wegen $(u)_2 = 0$ ist

$$(u^2)_2 = -2(u)_1(u)_3, \quad (u^2)_1 = (u)_1^2, \quad (u^2)_3 = (u)_3^2$$

somit ist

$$\prod_{k=1}^3 u_k (1 + u_k^2) = (u)_3 \{1 + [(u)_1 - (u)_3]^2\}$$

Führen wir diesen Wert in die Gleichung (7) ein, so erhalten wir nach Kürzung mit dem gemeinschaftlichen Factor $(u)_3$

$$\lambda^2(u)_3 \{1 + [(u)_1 - (u)_3]^2\} = (u)_1^2 \{-27(u)_3 + 2(u)_1^2 [(u)_3 - 3(u)_1]\} \quad (8)$$

Führen wir nun aus Gl. (4) die Werte für $(u)_1$ und $(u)_3$ ein, womit wir die Bedingung einführen, dass $\overline{u_1 u_2 u_3}$ ein Berührungsdreieck ist, was wir schon bei der Einführung $(u)_2 = 0$ vorausgesetzt haben, so erhalten wir

$$\mu y^3(x-a)[4y^2 + (2x+a)^2] + x^2[6(x-a)y^2 - x^2(8x+a)] = 0 \quad (9)$$

wo der Kürze wegen

$$\mu = \frac{2\lambda^2}{9^2}$$

gesetzt wurde.

Der Ort der Punkte*) constanter Berührungsdreiecke bei der Cissoide ist demnach eine Curve fünfter Ordnung mit einem Doppelpunkte in der Spitze der Cissoide.

II.

Jedem Punkte P , den wir kurz als Pol des Berührungsdreiecks bezeichnen wollen, entspricht in der Ebene der Cissoide ein bestimmtes Berührungsdreieck, somit auch dessen Schwerpunkt S . Die Bewegung des einen hat eine bestimmte Veränderung des anderen zur Folge. Wir wollen nun untersuchen, welches ist der Ort des Punktes P , wenn der ihm zugeordnete Dreiecksschwerpunkt eine bestimmte Curve durchläuft. Bezeichnen wir mit ξ, η die Coordinaten des Schwerpunktes des Berührungsdreiecks $u_1 u_2 u_3$, so ist

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{a}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{1+u_k^2} \\ \eta &= \frac{a}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{u_k(1+u_k^2)} \end{aligned} \quad (10)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{1+u_k^2} &= \frac{3+2(u)_1^2-2(u)_1(u)_3+(u)_2^2-4(u)_2}{[1-(u)_2]^2+[(u)_1-(u)_3]^2} \\ \sum_{k=1}^3 \frac{1}{u_k(1+u_k^2)} &= \\ &= \frac{(u)_1^2(u)_2-(u)_1(u)_2-3(u)_1(u)_2(u)_3+(u)_2^3-2(u)_2^2+(u)_2+3(u)_3^2}{(u)_3\{[1-(u)_2]^2+[(u)_1-(u)_3]^2\}} \end{aligned}$$

*) Siehe Sitzb. d. königl. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. Prag, 23|2. 77.

Diese Ausdrücke gelten für jedes Dreieck, dessen Ecken auf der Cissoide liegen; wollen wir zeigen, dass dieselben auf ein Berührungsdreieck sich beziehen, so müssen wir die Werte für $(u)_1, (u)_2, (u)_3$ aus der Gl. (4) einführen. Wir erhalten so

$$\sum_{k=1}^3 \frac{1}{1+u_k^2} = 3 \frac{4y^2+4x^2+2ax}{4y^2+(2x+a)^2} \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{1}{u_k(1+u_k^2)} = -3 \frac{2ay}{4y^2+(2x+a)^2}$$

Somit ergeben sich uns mit Rücksicht auf die Gleichungen (10), (11) als Schwerpunktskoordinaten des Berührungsdreiecks

$$\xi = a \frac{4y^2+4x^2+2ax}{4y^2+(2x+a)^2} \quad (12)$$

$$\eta = -a \frac{2ay}{4y^2+(2x+a)^2}$$

Die Gleichungen (12) geben uns die verlangte Abhängigkeit der Punkte P und S . Beschreibt nämlich der Schwerpunkt des Berührungsdreiecks einer Cissoide eine Curve n ter Ordnung, so durchläuft der entsprechende Pol P eine Curve $2n$ ter Ordnung, welcher die imaginären Kreispunkte als n fache Punkte zukommen. Die Punkte P und S stehen demnach in einer cyklisch quadratischen Verwandtschaft*).

Beschreibt in speciellem Falle S eine Gerade, welche durch den Schnittpunkt der reellen Asymptote mit der X -Achse (nämlich der Rückkehrtangente der Cissoide) hindurchgeht, so ist ihre Gleichung von der Form

$$\lambda\eta - \xi + a = 0 \quad (13)$$

und der Kreis, welchen der entsprechende Pol P beschreibt, zerfällt in die unendlich ferne Gerade und in eine reelle Gerade, deren Gleichung

$$-2\lambda y + 2x + a = 0 \quad (14)$$

Die sich entsprechenden Geraden (13), (14) sind ersichtlich parallel.

Agram, November 1877.

K. Zahradnik.

*) Siehe „Ueber eine geometrische Verwandtschaft in Bezug auf Curven dritter Ordnung und dritter Classe“, Sitzb. d. k. k. Akademie der Wissensch. Wien 8|3. 77, wo ich den zweiten Teil dieses Aufsatzes angeführt habe.

2.

**Note über den Ausdruck für das innere Potential eines
homogenen Ellipsoids.**

Sind α, β, γ die Quadrate der Halbaxen eines Ellipsoids, so ist das Potential V für einen inneren Punkt x, y, z gegeben durch:

$$\frac{V}{\pi\sqrt{\alpha\beta\gamma}} = \int_0^\infty \frac{ds}{D} - x^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha+s)D} - y^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(\beta+s)D} - z^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(\gamma+s)D}$$

wobei

$$D^2 = (\alpha+s)(\beta+s)(\gamma+s)$$

ist. Setzt man:

$$P_0 = \int_0^\infty \frac{ds}{D}, \quad P_1 = \int_0^\infty \frac{s ds}{D}$$

so findet man:

$$-P_0 = \frac{\partial P_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial P_1}{\partial \beta} + \frac{\partial P_1}{\partial \gamma}$$

wodurch also die Bestimmung von P_0 auf die von P_1 zurückgeführt ist. Für V erhält man*):

$$\frac{V}{\pi\sqrt{\alpha\beta\gamma}} = P_0 + 2x^2 \frac{\partial P_0}{\partial \alpha} + 2y^2 \frac{\partial P_0}{\partial \beta} + 2z^2 \frac{\partial P_0}{\partial \gamma}$$

und wegen

$$-\frac{1}{2}P_0 = \alpha \frac{\partial P_0}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial P_0}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial P_0}{\partial \gamma}$$

schliesslich:

$$\frac{V}{2\pi\sqrt{\alpha\beta\gamma}} = (x^2 - \alpha) \frac{\partial P_0}{\partial \alpha} + (y^2 - \beta) \frac{\partial P_0}{\partial \beta} + (z^2 - \gamma) \frac{\partial P_0}{\partial \gamma}$$

A. Wassmuth.

*) Man vergleiche: Thomson u. Tait, theoret. Physik, pag. 63 u. 64.

Litterarischer Bericht

CCXLVIII.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der elementaren Mathematik. Von Victor Schlegel, Oberlehrer am Gymnasium in Waren. Erster Theil. Arithmetik und Combinatorik. Wolfenbüttel 1878. Julius Zwißler. 181 S.

Die hier befolgte Methode ist die rein arithmetische mit successiver Erweiterung des Zahlbegriffs. Höchster Gesichtspunkt ist die systematische Gestaltung des Lehrstoffs, welche mit einer Consequenz und in einer Ausdehnung durchgeführt ist, wie wol in keinem andern Lehrbuch. Das systematisirende Streben scheitert oft an dem Mistriff, dass ein Princip a priori nach einseitigen Betrachtungen oder vorgefassten Meinungen gewählt wird, welches den Lehrgang beeinträchtigt und den Gegenstand entstellt, daher in manchen Punkten, wo dies zu augenfällig sein würde, wieder verlassen werden muss. Das gegenwärtige System und Ordnungsprincip ist ganz unter Anleitung der Praxis des algebraischen Rechnens ausgebildet und kann daher mit der Natur des Stoffes nirgends in Widerspruch treten. Dies ist um so mehr anzuerkennen und liess sich nach dem Anfang des Buchs um so weniger erwarten, als letzterer nach Ideen Grassmann's bearbeitet ist, der die Grundbegriffe durch Reduction auf Allgemeineres erklären will, und das Ziel erreicht zu haben meint, wenn er auf einen Punkt gelangt, wo man nichts mehr einsieht, daher auch nichts bezweifeln kann. So weit ist nun der Verfasser nicht mit Grassmann gegangen. Jener Anfang besteht aus philosophischen, keineswegs unanfechtbaren, jedenfalls aber sehr undeutlichen Aufstellungen, welche die Erklärung der Grundbegriffe vertreten zu sollen scheinen. Er lässt sich geradezu überschlagen; denn nach wenigen

Seiten nimmt das Lehrbuch einen für sich verständlichen, den gewöhnlichen elementaren Vorstellungen angemessenen Anfang. An der Bearbeitung ist die Absicht des Verfassers zu erkennen im System keinen leeren Platz zu lassen und, wo ein leeres Fach (eine Ausnahme) durch die Natur der Sache bedingt ist, wie z. B. beim Divisor null, darüber Erklärung und Nachweis zu geben. Um so mehr erstaunt man, wie gleichwol so grosse Lücken im System bleiben konnten. Die Lücke von weitestem Umfang ist wol die folgende. Auf jede Erörterung einer Operation folgt unter dem Titel „Rechnung mit Resultaten“ die Combination der bis dahin erklärten Operationen. Hier ist aber allein berücksichtigt die neue Operation mit Resultaten der alten und zwar unter den bis dahin geschehenen Erweiterungen des Zahlbegriffs, nicht aber das Umgekehrte. Es ist durchweg vergessen, dass es sich auch handeln muss um die alten Operationen mit Resultaten der neuen, namentlich um Nachweis der Gültigkeit der frühern Aufstellungen nach der neu eingeführten Erweiterung. Insbesondere ist deshalb die algebraische Addition der Brüche gar nicht erwähnt worden. Das Fehlende in Ausführung zu bringen war zweimal Gelegenheit und Anlass: erst bei den einzelnen Operationen, hernach im Abschnitt B. betitelt „die relativen Zahlen“. Der letztere handelt ausdrücklich und im ganzen von den Erweiterungen, der Null, den negativen Zahlen, der Eins, den umgekehrten Zahlen, den irrationalen Zahlen; er ist aber ganz dürftig und geht auf keine der theoretisch wichtigen Fragen ein. Eine Vergesslichkeit ist es auch, dass der Verfasser erst die Vorschrift giebt durch keine Zahl zu dividiren, die auch null sein kann, später aber selbst dagegen fehlt, indem er Gleichungen durch Division durch die Unbekannte x auf niedern Grad reduciren lässt ohne von Ausschluss der Wurzel $x = 0$ ein Wort zu sagen. Die Vorschrift, wie sie ausgesprochen ist, kann leicht in praktischer Hinsicht zu weit gehend gedeutet werden; gerade da aber, wo sie ihre Hauptanwendung hat und wo der Wortlaut genau passt, wird sie ausser Augen gesetzt. Ferner ist viel vergessen bei der Reduction der Gleichungen. Die Lücke tritt schon in dem vorbereitenden Abschnitt über die Polynome auf und zwar in vielfacher Weise. Hier wird aufgestellt: Jeder nur mittelst der 6 ersten Rechnungsarten zusammengesetzte Ausdruck heisst algebraisch, jeder andere transcendent. Nur Logarithmen werden ausgeschlossen, an irrationale Exponenten hat der Verfasser nicht gedacht. Hierbei ist zu beachten, dass jeder Buchstab alle erklärten Bedeutungen zu haben fähig sein muss. Irrationalzahlen sind als Wurzeln und Logarithmen erklärt, es bleiben also nach Ausschluss der letztern die irrationalen Wurzeln. Bei Erklärung der Polynome wird nun die im Anfang beobachtete Allgemeinheit fallen gelassen, so dass am Wortlaut der Sätze nichts weiter zu vermessen sein würde als die Bedingung, dass die Exponenten

rational sein müssen. Doch als eine solche Selbstbeschränkung erscheint die Polynomform in der Lehre von den Gleichungen nicht mehr. Hier wird behauptet, jede algebraische Gleichung (im vorigen allgemeinsten Sinne) liesse sich durch die erklärten Transformationen auf die polynomische Grundform bringen. Es wird nur erklärt, wie man einen Nenner, eine Wurzelgrösse entfernt. Für mehrere Wurzelgrössen ist die Regel nicht ausreichend; obendaram dürfte aber auch der Grund nicht fehlen, warum sie für mehrere Nenner ausreichend ist. Es ist daraus ersichtlich, dass der Verfasser den Fall gar nicht beachtet hat. Das oben genannte Princip, dass jeder Buchstab alle erklärten Bedeutungen zu haben fähig sein muss, so dass die algebraischen Operationen keine Beschränkungen erleiden, wendet der Verfasser zur Motivirung der eingeführten Rechnungsgrössen, der Null, der negativen, umgekehrten und irrationalen Zahlen an. In der That ist damit der richtige Weg zur Erklärung derselben betreten, aber mit dem Gesagten die Sache nicht erledigt. Es war zu zeigen, wie sie als Rechnungsergebnisse Bedeutung haben, sofern kein Resultat das letzte ist, und nach Vollzug beliebig vieler Operationen an ihnen immer wieder positive ganze Zahlen erhalten werden können, und dass dann jedes positiv ganzzahlige Resultat richtig sein muss. Ebenso verhält es sich hernach bei den complexen Zahlen, die bei den quadratischen Gleichungen erörtert werden. Die Determinanten werden nur bis zu 3. Ordnung aufsteigend unter den Eliminationsmethoden entwickelt, worauf dann eine unbewiesene Behauptung über die höheren Ordnungen folgt. Schon dieser unbefriedigende Ausgang zeigt, dass dies Zuwerkegehen nichts instructives hat. Die Determinantenlehre ist einmal ein Gegenstand, der ohne Entstellung und Verhüllung der einfachen Gesetze nicht anders als vom allgemeinsten Anfang aus getrieben werden kann; sie gehörte in den letzten Abschnitt, die Combinatorik. Auf die Gleichungen, behandelt bis zum 4. Grade, wozu noch die Exponentialgleichung kommt, folgen die Reihen und Kettenbrüche, endliche und unendliche, welche hinsichtlich der in Betrachtung gezogenen Objecte sehr tief in das Gebiet der Analysis hineinführen. Gleichwol hat der Verfasser den elementaren Standpunkt nie überschreiten wollen. Für einen solchen Zweck hätte sich gar manches tun lassen, um wenigstens klare Begriffe zu erzielen, was hier nicht geschehen ist; das Gelieferte ist ungenügend. Die Decimalrechnung wird als angewandte Arithmetik aufgeführt; hieran schliesst sich noch die Zinsrechnung. Dann folgt die reine und angewandte Combinatorik, letztere enthaltend die Binomialreihe und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zum Zweck der Uebung wird auf Hofmann's Aufgabensammlung und einige andere im einzelnen verwiesen. Um ein Gesamturtheil über das Werk zu geben, so ist der Plan und Angriff originell und vor-

trefflich, die Ausführung hingegen in vielen Punkten mangelhaft; fast alles daran Auszusetzende ist aber derart, dass es nur Ergänzung, nicht Abänderung fordert. H.

Leçons d'arithmétique guide à l'usage des professeurs. Première partie: calcul numérique avec de nombreux problèmes. Par G. OI-tramare, professeur à l'université de Genève. Seconde édition. Genève-Bale-Lyon 1878. H. Georg. Paris Gauthier-Villars. 152 S.

Das Vorliegende ist ein Lehrbuch, welches die Grenzen des bürgerlichen Rechnens nicht wesentlich überschreitet; nur enthält es auch einiges wenige von Potenzen und Wurzelausziehung. Ein besonderes Capitel bildet eine Sammlung von Aufgaben, deren Lösung nicht durch directe Operationen erfolgen kann, welche vielmehr ohne Anwendung von Gleichungen, die sich als sehr einfache lineare leicht darbieten würden, durch Ueberlegung gelöst werden sollen. Zugabe ist eine Tafel der Primzahlen bis 20 000 und eine Tafel der Quadratwurzeln, Kubikwurzeln, etc. bis zur sechsten Wurzel aus den Zahlen 2 bis 131, die Quadratwurzeln auf 10, die übrigen auf 5 Bruchstellen. In erläuterndem Vortrag werden die gewöhnlichen Regeln entwickelt, dann formulirt, mitunter zur Erläuterung ein Beispiel angewandt. Anlass zur Besprechung bieten einige in der Vorrede berührte principielle Fragen. Die erste betrifft den Unterschied zwischen Arithmetik und Algebra. Diesen sieht der Verfasser darin, dass die Arithmetik mit bewussten Zahlen rechnet, die Algebra mit Elementen, um deren Bedeutung sie sich nicht kümmere. Hierin giebt sich eine durchaus falsche Auffassung der Algebra zu erkennen, die auch einen gewissen Einfluss auf die Ansicht über die Arithmetik hat. Die Algebra ist keine rein formelle Theorie und würde als solche betrachtet nie haben erfunden werden können. Sie hat in der That danach zu fragen, ob ihre Elemente Grössen, unter Umständen, ob die Grössen reell, ob sie stetig oder discret sind, u. s. w. Nur das ist ihr eigen, dass die Elemente alle diese Bedeutungen, aber wol zu merken nur erklärte, bewusste Bedeutungen zu umfassen fähig sind, worauf ihre Geltung für Geometrie, Mechanik u. s. w. beruht. Sie bedurfte zum Zweck dieser Bedingung zu genügen einer nicht geringen Ausbildung, hat sich diesem Zwecke gemäss entwickelt und gestaltet, und muss also ihren unterschiedlichen Begriff in diese ihre Fähigkeit setzen. Der Verfasser stützt auf jene irrig Definition seine Bevorzugung der heuristischen Lehrweise in der Lösung von Aufgaben; doch geht er darin wenigstens nicht so unbesonnen zuwerke, wie es oft geschieht. Viele Lehrer nämlich geben den Schülern die Reihe von Betrachtungen, welche zur Lösung von Aufgaben einer Art führen, an einem Beispiele und lassen dieselben nur an andern Zahlen wiederholen;

sie behaupten und suchen die Meinung zu erwecken, auf diesem Wege gewönnen die Schüler Einsicht in den Grund des Verfahrens, der beim Gleichungsansatz im Dunkeln bliebe. In der Tat aber verhält es sich umgekehrt. Der Schüler hat im Grunde nur je eine Aufgabe lösen gelernt, wozu ihm der Lehrer das Verfahren vollständig gesagt hat. Wie er dazu kommt, gerade diese Reihe von Betrachtungen anzustellen, bleibt ihm unbewusst, und da er in jedem neuen Falle die ausreichende Hülfe findet, lernt er nie, dass er nach der Lösung suchen muss. Was nun hier dem Schüler verborgen bleibt, der Grund des Verfahrens, das eben zeigt die Theorie der Gleichungen, deren Transformationen auf sichtliche Weise zum verständlichen Ziele führen. Allerdings ist es ganz gerechtfertigt, wenn man den Kindern die sichere Methode vorenthält, so dass sie eine gewisse Fertigkeit erwerben ohne im selben Augenblicke zu wissen, wie. Nur soll man ihnen nicht durch verkehrte Darstellung eine falsche Einbildung beibringen. Zu vernünftigerem Grundsatz bekennt sich der Verfasser, indem er sagt: Es giebt keine Methode alle Aufgaben zu lösen; der Schüler muss verschiedene Betrachtungen versuchen, bis er eine erfolgreiche findet. Weiter geht die Vorrede auf die Frage ein, woran man erkennt, ob eine Frage eine arithmetische ist oder nicht. Da es ein solches Kriterium vor der Lösung nicht giebt, so entscheidet er sich dafür, jede Frage eine arithmetische zu nennen, deren Data bestimmte Zahlen sind, und falls sie nicht arithmetisch gelöst werden könne, den zeitweiligen niederen Standpunkt der Ausbildung der Arithmetik zu constatiren. Eigentliches Motiv der Scheidung war die Methode; dasselbe wird jedoch dadurch hinfällig, dass der Verfasser ja keine arithmetische Methode aufstellen kann. Die Auskunft aber, die er trifft, ist ebenso unfruchtbar; denn selten ist der Sinn einer Aufgabe und die Aufsuchung der Lösung von den speciell gegebenen Zahlen abhängig. Zwar weist der Verfasser hier auf zahlentheoretische Fragen hin, doch diese fallen nur zum kleinsten Teil in das Gebiet der hier behandelten elementaren Arithmetik. Endlich wird noch entgegengesetzt die algebraische Wurzelauziehungsmethode (d. i. offenbar die aus der Entwicklung von $(a+b)^n$ hervorgehende) und die arithmetische, der Bearbeitung zufolge bestehend in der sogen. Fehlerrechnung, durch die man bekanntlich jede numerische Gleichung approximativ auflösen kann. Wie der Verfasser zu der Behauptung kommt, erstere Methode sei nur auf Quadrat- und Kubikwurzeln, darüber hinaus nicht mehr anwendbar, ist nicht wol begreiflich.

H.

Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. Aus den bei Abiturienten-Prüfungen an

preussischen Gymnasien und Realschulen gestellten Aufgaben ausgewählt und mit Hinzufügung der Resultate (II. Theil) zu einem Uebungsbuche vereint von H. C. E. Martus, Professor an der Königstädtischen Realschule in Berlin. Erster Theil: Aufgaben. Vierte Auflage. Leipzig 1878. C. A. Koch. 210 S.

Die 3. Auflage der Aufgaben ist im 223. litt. Ber. S. 29., die der Resultate im 231. l. B. S. 36. besprochen. Die 4. Auflage bringt als wünschenswerte Ergänzungen 15 neue Aufgaben. Die vom Bundesrath des deutschen Reichs festgesetzten Zeichen für die Namen der Masse sind im Buche angewandt und am Schluss des Inhaltsverzeichnisses zusammengestellt. Eine Uebersetzung in ungarischer Sprache von Prof. Dr. Császár ist zu Pest 1878 im Verl. v. Franklin-Tásulát erschienen.

H.

G e o m e t r i e.

Anfangsgründe der beschreibenden Geometrie nebst einem Anhang über Kartenprojection. Ein Leitfaden beim Unterrichte an höheren Lehranstalten. Von Wilhelm Mink, Oberlehrer an der städtischen Realschule 1. Ordnung zu Crefeld. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Berlin 1878. Nicolai. 47 S.

Das Buch behandelt (abgesehen vom Anhang) ausschliesslich die Darstellung durch Orthogonalprojection auf 2 Ebenen. Der erste Abschnitt giebt die allgemeinen Erklärungen über die Darstellungsweise. Hierin ist eine Undeutlichkeit zu erwähnen, der man in Lehrbüchern häufig begegnet, die nämlich dadurch entsteht, dass von der Bildebene nichts gesagt ist. Das Einzige, was darauf Bezug hat, ist das nicht erklärte Wort „Herabschlagen“. Dieses baut auf die nicht ausgesprochene Voraussetzung, dass eine der Projectionsebenen in der Bildebene liegt. Es würde nicht viel Worte gekostet haben, in diesem Punkte den Forderungen der Klarheit und Bestimmtheit des Ausdrucks zu genügen. Es folgen dann die elementaren Aufgaben über Punkte und Geraden, über die Ebene an sich und in Verbindung mit Punkten, Geraden und Ebenen; dann wird die Darstellung ebener Figuren, ebenflächiger Körper, des Cylinders und des Kegels erörtert und eine Anzahl Aufgaben darüber ausgeführt; den letzten Abschnitt bilden Aufgaben über die ebenen Schnitte eines Körpers und die Durchschnittenfiguren zweier Körper. Im Anhang werden die verschiedenen gebräuchlichen Projectionsarten der Erdoberfläche einzeln in den verschiedenen Lagen genügend erläutert.

H.

Grundlagen der Ikonognosie. Mit Berücksichtigung ihres Verhältnisses zu anderen exacten Wissenschaften, insbesondere zur Géométrie descriptive. Von Franz Tilšer, Professor am k. k. böhmischen Polytechnikum in Prag. I. Abtheilung. Mit 5 lithogr. Tafeln. (Aus d. Abh. d. k. böhm. Ges. d. Wiss. VI. Folge. 9. Band.) (Math. nat. Classe Nr. 3.). Prag 1878. Verl. d. k. böhm. Ges. d. Wiss. 4°. 88 S.

Die vorliegende Schrift behandelt im Anschluss an Monge, Géométrie descriptive das Ganze der descriptiven Geometrie in allgemeinsten Auffassung ihrer Aufgabe mit voller Anwendung der neuern synthetischen Geometrie. Wenn auf dem Titel von einem Verhältniss zur descriptiven Geometrie die Rede ist, so kann der Verfasser damit wol nur auf die neue Behandlungsform gegenüber der von Monge hindeuten. Am wenigsten kann der Name Ikonognosie (der in der Schrift nicht vorkommt) einen neuen Wissenschaftszweig bezeichnen; denn die Erkennung des Dargestellten aus dem Bilde ist ein untrennbares Element der descriptiven Geometrie. Zum Verständniss wird nicht allein Bekanntschaft, sondern völlige Vertrautheit mit der Doctrin des Gegenstandes selbst und mit der neuern Geometrie erfordert, da der hier entfaltete Apparat an Einführungen einen so enormen Umfang hat, dass ein gehöriger Einblick schon vorhanden sein muss, um ihn beherrschen zu können. Auf Anwendungen geht die Schrift nicht ein; es sind in der That die Grundlagen der Theorie allein, die sie aufstellt. Die jetzt erschienene 1. Abteilung hat den Titel: Von den wesentlichsten naturgemässen Mitteln, der Unzulänglichkeit der Entwicklungs-Elemente der descriptiven Geometrie abzuheffen. Ihre Hauptabschnitte sind folgende. Von den Principien der Determination der Gebilde des Raumes und ihren wesentlichsten Elementen. Von den Principien der Ableitung der Projectionen determinirter Gebilde des Raumes und deren wichtigsten Grundgebilden. Von den Grundsätzen der Construction der Bilder determinirter Projectionen. Hierauf folgen Schlussbemerkungen. Die Benennungen und Formulierungen sind in böhmischer Sprache, manche auch in den europäischen Hauptsprachen beigelegt.

H.

Trigonometrie.

Traité de trigonométrie analytique. Par W. Mantel, Membre de la Société Mathématique: „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven,“ à Amsterdam. Arnhem 1877. P. Brander. 125 S.

Die vorliegende Arbeit lässt sich wol am besten als methodische Studien bezeichnen. Zu einem Lehrbuch kann sie nicht bestimmt

sein; denn sie hat keine begrenzte Basis vorauszusetzender Vorkenntnisse, betrachtet vielmehr jeden überhaupt bekannten Satz als zulässigen Stützpunkt. Ebenso wenig ist sie auf wesentlich neue Entdeckung gerichtet. Dagegen zeigt die Einleitung, dass es dem Verfasser vor allem um Förderung der Methode zu tun war. Es werden darin namentlich zwei Punkte besprochen. Zuerst wird der Fehler in Beweisführungen selbst angesehener Mathematiker gerügt, welche den Grenzwert der Summe von n Termen, die selbst von n abhängen, für $n = \infty$ mit der Summe der Grenzwerte identificirt haben. Es wird erstlich die Frage auf eine Form gebracht, in welcher es in die Augen fällt, dass beide Grössen nur zufällig gleich sein können; dann wird in sehr instructiven Beispielen gezeigt, dass jede von beiden convergiren kann, während die andre ins unendliche wächst, dass aber nicht einmal die beiderseitige Convergenz zur Gleichheit hinreicht, vielmehr verschiedene endliche Grössen resultiren können. Dieser schlagende Nachweis möchte wol das Vorzüglichste der gesamten Arbeit sein. Der Verfasser empfiehlt für solche Fälle die Methode der Grenzeinschliessung, die er selbst viel anwendet. Der zweite Punkt betrifft die Bevorzugung von Methoden. Der Verfasser verwirft schlechthin jeden Kunstgriff und will allein den, so bezeichneten, natürlichen Deductionsang gehen lassen; nur, wo dieser zur Zeit noch nicht gefunden sei, müsse man sich vorläufig mit künstlichen Methoden begnügen. Der natürliche Weg wird aber durch nichts charakterisirt als durch die Forderung, dass der Schüler von jedem angewandten Mittel vorher den Grund einsehe, eine Forderung die schon von Vielen zur Anpreisung ihrer Methoden ausgesprochen worden ist, die aber auf reiner Illusion beruht. Sie ist hier so wenig wie von irgend jemand erfüllt, bedingt den didaktischen Erfolg in keiner Weise und wird ohne Beachtung des Zieles des Unterrichts willkürlich herbeigezogen. Niemand wird in Abrede stellen, dass der Schüler willig und aufmerksam dem Lehrgang folgen muss, ehe er die Sache und mit ihr den Grund des Verfahrens verstehen kann. Kommt ihm dann ein Erfolg unerwartet, so wird er um so mehr Anlass haben den Grund des Erfolges zu beachten, nicht aber, wie der Verfasser behauptet, das blosses Resultat ohne den Weg zu merken; letzteres würde vielmehr der Fall sein, wenn ihm der Weg selbstverständlich schiene, noch dazu, wenn es ein langer war. Der Verfasser will trotz der Länge seinen Grundsatz aufrecht erhalten: ein hundertmal längerer natürlicher Weg sei besser als ein künstlicher. Die hier gebrauchten Deductionswege sind nicht übermässig lang, doch geben sie auch von dem obigen Grundsatz des Verfassers wenig Zeugnis. Unter die künstlichen Mittel rechnet er auch die Differentialrechnung und die imaginären Grössen. Erstere schliesst er formell ganz aus, zugunsten derer, welche sie nicht kennen, letztere rückt er ans Ende des Buchs

um die Methoden auf reeller Basis desto vollständiger zu cultiviren, ein Gesichtspunkt der gewiss in hohem Grade berechtigt ist. In dem Ausschluss der Differentialrechnung hingegen verbirgt sich eine von Vielen geteilte Illusion. Alles, was man der Differentialrechnung etwa künstliches Mittel nennen könnte, kommt reichlich in Anwendung, nur ist diese stets speciell. Es hätte also heissen müssen: Die Allgemeinheit, die Theorie verwerfen wir. Dies ist es denn auch, was die Deductionen der spätern Teile des Buchs charakterisirt. Je weiter man sie verfolgt, desto unerquicklicher werden sie durch den Mangel an theoretischem Fortschritt, durch die immer neu anfangende Begründung, durch die Vernachlässigung gemeinsamer Gesichtspunkte. Sie gehen ganz in die bekannte unnatürlich gezwungene, schwerfällige Form der algebraischen Analysis über. Gute Hoffnung erweckt die erste Deduction. Es wird der Ausdruck von $\sin(a_1 + a_2 + \dots a_n)$ in \sin und \cos der Teilbogen entwickelt, die Form charakterisirt und nach Gleichsetzung der Teile durch combinatorische Formeln die Coefficienten der Entwicklung

$$\sin nx = \sum c \sin^k x \cos^{n-k} x$$

bestimmt. Die nächst folgenden, als Quellen von Formeln aufgeführten Methoden sind die Zerlegung von Functionen, die sich in rationalen Functionen einer Variablen darstellen, und die für die hinreichende Anzahl von bekannten Werten derselben verschwinden, in lineare Factoren — und die Zerlegung in Partialbrüche. Anwendung wird nur auf Beispiele gemacht. Bekannt sind alle 3 Methoden hinreichend; vielleicht sind sie auf das eine und andre Beispiel bisher noch nicht in Anwendung gebracht worden. Von da an scheint das Ziel der Arbeit zu sein, alle bekannten einfachen Resultate im Gebiete der endlichen und unendlichen Reihen für Kreisfunctionen zu gewinnen. Strenge Bündigkeit der Herleitungen ist rühmlichst anzuerkennen. Irrig ist die Angabe, die Ungleichung $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ (für $0 < x < R$) sei geometrisch bewiesen. Sie zu beweisen ist geometrisch auf Grund der gewöhnlichen geometrischen Definition nicht möglich, wol aber rein analytisch auf Grund rein analytischer Definition. Druckfehler: S. 19. Z. 3. v. u. de la groupe statt du groupe — S. 57. Z. 2. v. u. $\cos^m y$ statt $\cos^{\frac{y}{n}}$. H.

• Vermischte Schriften, Zeitschriften.

American Journal of Mathematics pure and applied. Editor in chief, J. J. Sylvester, LL. D., F. R. S., Corr. Mem. Inst. of France.

Associate editor in charge, William E. Story, ph. D., (Leipsic.) With the co-operation of Benjamin Peirce, LL. D., F. R. S., Professor of mathematics in Harvard University, in mechanics, Simon Newcomb, LL. D., F. R. S., Corr. Mem. Inst. of France, Superintendent of the American Ephemeris, in astronomy, and H. A. Rowland, C. E., in physics. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Volume I. Number 1. Baltimore 1878. B. Westermann & C. New York. 4^o. 104 S.

Dieses neue mathematische Journal erscheint in Heften in Quartformat, deren 4 einen Band von ungefähr 384 Seiten bilden sollen, zunächst alle 3 Monate eins, eine Zeit die indes nicht feststeht. Die Hefte schliessen nicht mit dem Ende eines Artikels. Es enthält hauptsächlich Original-Abhandlungen, manchmal auch Auszüge aus wichtigen Arbeiten, die den amerikanischen Studenten schwer zugänglich sind. Auch kritische Artikel und bibliographische Notizen sind in Aussicht genommen. Dagegen werden Aufgaben zur Lösung abgelehnt und zur Einsendung solcher die amerikanischen Journale empfohlen: „The Analyst“, edited and published by J. E. Hendricks, Des Moines, Iowa, und „The Mathematical Visitor“, edited and published by Artemas Martin, Erie, Pa. Beiträge werden vom In- und Ausland angenommen. Zu adressiren ist in allen Angelegenheiten an William E. Story, Johns Hopkins University, Baltimore, Md. Der Subscriptionspreis ist 5 Dollar f. d. Band.

Das 1. Heft enthält folgende Abhandlungen.

S. Newcomb: Note über Transformationen für Flächen im Raume von mehr als 3 Dimensionen.

G. W. Hill: Untersuchungen in der Linear-Theorie.

H. T. Eddy: Das Theorem der 3 Momente (ein Balken auf gleich hohen Stützen in verschiedenen Abständen, von einer zur andern gleichmässig belastet).

G. Weichold: Lösung des irreducibeln Falles.

Cayley: Desiderata und Vorschläge. N. 1. Theorie der Gruppen.

H. A. Rowland: Note über die Theorie der elektrischen Absorption.

A. Ferrero (Florenz): Darlegung der Methode der kleinsten Quadrate.

J. J. Sylvester: Ueber eine Anwendung der neuen atomischen Theorie auf die graphische Darstellung der Invarianten und Covarianten von binären Quantics. Mit 3 Anhängen und einer begleitenden Tafel.

Anhang 1. Ueber Differentianten ausgedrückt in den Differenzen der Wurzeln ihrer verwandten Quantics.

Anhang 2. Ueber Hermite's Reciprocitätsgesetz (unbeendet).

Dass der bereits hinreichend bekannt gewordene Artikel über den irreducibeln Fall hier die lange vergeblich gesuchte Aufnahme gefunden hat, giebt der Aufmerksamkeit der Redaction kein sonderliches Zeugniß.

H.

Modell für den ersten Unterricht in der Goniometrie.

Der Unterzeichnete gibt bekannt, dass jenes Modell, welches er im 61. Bande dieses „Archivs“ auf S. 108. beschrieben u. abgebildet hat, von ihm käuflich zu beziehen ist.

Preis 40 Mark.

F. Hoza,
Professor in Königgrätz.

(Das erste Exemplar wurde an die Kantonschule zu St. Gallen geliefert).

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXLIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Hänselmann, L., Karl Friedrich Gauss. Leipzig, Duncker & H.
2 Mk. 40 Pf.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik, hrsg. v. C. Ohrtmann, F. Müller, A. Wangerin. 8. Bd. J. 1878. 2. Hft. Berlin, G. Reimer. 4 Mk.

Matthiessen, L., Grundzüge d. antiken u. modernen Algebra d. litteralen Gleichungen. Leipzig, Teubner. 20 Mk.

Zuckermann, B., d. Mathematische im Talmud. Breslau, Hepner. 2 Mk.

Methoden und Principien.

Krause, A., Kant u. Helmholtz üb. d. Ursprung u. d. Bedeutung d. Raumausschauung u. d. geometr. Axiome. Lehr, Schauenburg. 3 Mk.

Schmitz-Dumont, O., d. mathemat. Elemente d. Erkenntniss-theorie. Berlin, C. Duncker. 12 Mk.

Unverzagt, W., d. Winkel als Grundlage mathemat. Untersuchungen. 4. Wiesbaden, Kreidel. 1 Mk. 40 Pf.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Bardey, E., method. geordn. Aufgabensammlg. üb. alle Theile d. Elementar-Arithmetik. 7. Aufl. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 70 Pf.

Fechner, H., Resultate zu d. Aufgaben f. d. 1. Unterricht in d. Buchstabenrechng. u. Algebra. Berlin, W. Schultze's V. 75 Pf.

Harms, C., d. erste Stufe d. mathemat. Unterrichts in o. Reihe method. geordn. arithmet. u. geometr. Aufgaben dargest. 2. Abth. Geometr. Aufgaben. 3. Aufl. Oldenburg, Stalling. 1 Mk. 25 Pf.

Knies, C., Lehrbuch d. Arithmetik, n. e. Anh. m. Uebungsbeispielen f. Real- u. Lateinschulen. 1. Hft. München, Kellerer. 1 Mk. 60 Pf.

Nerling, W., Sammlung v. Beispielen u. Aufgaben aus d. Buchstabenrechng. u. Algebra. 5. Aufl. Dorpat, Schnakenburg. 2 Mk. 10 Pf.

Schlömilch, O., fünfstellige logarithm. n. trigonometr. Tafeln. Wohlfl. Schulausg. 6. Aufl. Braunschweig, Vieweg & S. 1 Mk.

Vega's logarith.-trigonometr. Handbuch. 62. Aufl., bearb. v. C. Bremiker. Berlin, Weidmann. 4 Mk. 20 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Aschenborn, K. H. M., Lehrbuch d. Arithmetik m. Einschluss d. Algebra u. d. niederen Analysis. 3. Aufl. Berlin, v. Decker. 7 Mk.

Durège, H., Theorie d. ellipt. Functionen. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. 9 Mk.

Haberl, J., Lehrbuch d. allgem. Arithmetik u. Algebra. 3. Aufl. Wien, Braumüller. 6 Mk.

Heine, E., Handbuch d. Kugelfunctionen, Theorie u. Anwendgn. 1. Bd. 2. Aufl. Berlin, G. Reimer. 8 Mk.

Königsberger, L., Vorlesungen üb. d. Theorie d. hyperellipt. Integrale. Leipzig, Teubner. 4 Mk. 80 Pf.

Mansion, P., Elemente d. Determinanten. Mit vielen Uebungsaufgaben. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Petersen, J., Theorie d. algebraischen Gleichungen. Kopenhagen, Hoest & S. 10 Mk.

Schwager, H., Lehrbuch d. Arithmetik f. Real- u. Fortbildungsschulen. 4. Aufl. 1. Thl. Würzburg, Kellner. 2 Mk.; Resultate dazu 20 Pf.

Sersawy, V., d. Fundamente d. Determinanten-Theorie. Wien, Seidel & S. 1 Mk. 20 Pf.

Stern, M. A., Beiträge z. Theorie d. Bernoulli'schen u. Euler'schen Zahlen. 4. Göttingen, Dieterich. 2 Mk. 40 Pf.

Studnicka, F. J., Lehrbuch d. Algebra f. d. oberen Klassen d. Mittelsch. Prag, Gregr & D. 3 Mk.

Wendlandt, H., d. Sturm'schen Functionen zweiter Gattung. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk. 80 Pf.

Geometrie.

Appel, E., Leitfaden f. Flächen- u. Rauminhalts-Berechngn. Troppau, Buchholz & D. 1 Mk. 50 Pf.

Drasch, H., Construction v. Tangenten an die Berührungslinie e. Rotationsfläche u. der ihr v. e. Punkte aus umschriebenen Developabeln. Wien, Gerold's S. 60 Pf.

Hess, E., üb. vier Archimedische Polyeder höherer Art. Cassel, Kay. 60 Pf.

Kantor, S., I. Ueber d. Zusammenhang v. n beliebigen Geraden in d. Ebene. II. Ueber Eigensch. d. Dreiecks u. 2 damit in Verbindung stehende Steiner'sche Sätze. III. Ueber e. Verallgemeinerung bek. Dreieckssätze auf beliebigen e. Kegelschnitte eingeschr. vollständige n -Ecke. IV. Ueber d. Kreisviereck u. Kreisvierseit insbes. u. d. vollständ. Viereck im Allgemeinen. Wien, Gerold's S. 60 Pf.

Müller, H., Leitfaden d. ebenen Geometrie. 1. Thl. 1. u. 2. Hft. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 80 Pf.

— J., Elemente d. analyt. Geometrie in d. Ebene u. im Raume. 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg & S. 1 Mk. 60 Pf.

Salmon, G., analyt. Geometrie d. Kegelschnitte. Frei bearb. v. W. Fiedler. 4. Aufl. Leipzig, Teubner. 14 Mk. 40 Pf.

Schram, J., Lehrbuch d. ebenen Geometrie f. Untergymnasien. Wien, Hölder. 1 Mk. 50 Pf.

Schröder, J. H., Elemente d. Planimetrie u. Stereometrie f. d. Unterricht an Gymnasien, Real- u. Gewerbeschulen. 2. Aufl. Hannover, Hahn. 1 Mk. 50 Pf.

Seelhoff, P., Flächen- u. Körperberechnung nebst Uebungsbeispielen aus d. Arithmetik u. Algebra. 2. Aufl. Bremen, Heinsius. 2 Mk.; cart. 2 Mk. 40 Pf.

Thaer, A., üb. d. Zerlegbarkeit e. Ebene 3. Ordnung in 3 geraden Linien. 4. Giessen, Ricker. 1 Mk.

Worpitzky, J., Elemente d. Mathematik. 5. Hft. Stereometrie. Berlin, Weidmann. 1 Mk. 60 Pf.

Trigonometrie.

Spitz, C., Lehrbuch d. ebenen Trigonometrie. 5. Aufl. Leipzig, C. F. Winter. 2 Mk.; Anhang 1 Mk.

Geodäsie.

Gauss, F. W., d. Teilung d. Grundstücke insbes. unter Zugrundelegg. rechtwinkl. Coordinaten. Berlin, v. Decker. 5 Mk.

Jordan, W., Handbuch d. Vermessungskunde. 2. Bd. Höhere Geodäsie. Stuttgart, Metzler. 10 Mk.

Mechanik.

Somoff, J., theoret. Mechanik. Aus d. Russ. übers. v. A. Ziwet. 1. Thl. Kinematik. Leipzig, Teubner. 6 Mk. 80 Pf.

Praktische Mechanik.

Grashof, F., Theorie d. Elasticität u. Festigkeit m. Bezug auf ihre Anwendungen in d. Technik. 2. Aufl. Berlin, Gärtner. 9 Mk.

Mechanik, techn. bearb. u. hrsg. vom Ingenieur-Verein am Polytechnikum zu Stuttgart. 1—7. Kap. Stuttgart, Wittwer. à 2 Mk.

Optik.

Kitao, D., zur Farbenlehre. Göttingen, Vandenhoeck & R. 80 Pf.

Astronomie und Meteorologie.

Beobachtgn., meteorolog., in Deutschland. Angest. an 17 Stationen 2. Ordng. im J. 1876. 4. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Greiffenstein, J. G., d. Bewegung d. Himmelskörper um ihre Axen. Darmstadt, Schlapp. 60 Pf.

Kempf, P., Untersuchgn. üb. d. Ptolemäische Theorie d. Mondbewegung. Berlin, Mayer & M. 1 Mk.

Littrow, J. J. v., d. Wunder d. Himmels. 6. Aufl. 31.—35. Lfg. Berlin, Hempel. à 50 Pf.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Gesellschaft. Hrsg. v. E. Schönfeld u. A. Winnecke. 13. J. 1878. 1. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Nautik.

Albrecht, M. F., u. C. S. Vierow, Lehrbuch d. Navigation u. ihrer mathem. Hilfswissenschaften f. d. k. preuss. Navigationsschulen. 5. Aufl. Berlin, v. Decker. 10 Mk. 50 Pf., geb. 12 Mk.

Schaub, F., naut. Astronomie f. d. Gebrauch d. k. k. Seeofficiere. Neu bearb. v. E. Gleich. 3. Aufl. Wien, Gerold's S. 6 Mk.

Physik.

Reis, P., Lehrbuch d. Physik. 4. Aufl. Leipzig, Quandt & H. 7 Mk. 80 Pf.

Schröder, C., Anleitung z. Gebrauch physikal. Apparate. 2. Aufl. Magdeburg, Kröning. 1 Mk.

Vermischte Schriften.

Annalen, mathem. Hrsg. v. F. Klein u. A. Mayer. 14. Bd. (4 Hfte.). 1. Hft. Leipzig, Teubner. pcplt. 20 Mk.

Denkschriften d. kaiserl. Akademie d. Wissenschaften. **Ma-**
them.-naturwissenschaftl. Klasse. 38. Bd. 4. Wien, Gerold's S.
52 Mk.

— dass. 35. Bd. Ebd. 30 Mk.

Schulze, R., d. physik. Kräfte im Dienste d. Gewerbe, der
Kunst u. d. Wissenschaft. Frei nach Guillemin. 1. Lfg. Leipzig,
Frohberg. 1 Mk.

Sitzungsberichte d. kaiserl. Akademie d. Wissenschaften. **Ma-**
them.-naturwissenschaftl. Klasse. 1. Abth. 76. Bd. 3. Hft. Wien,
Gerold's S. 4 Mk. 40 Pf.

— dass. 2. Abth. 76. Bd. 3. Hft. Ebd. 5 Mk.

Sitzungsberichte d. kaiserl. Akademie d. Wissenschaften. **Ma-**
them.-naturwissenschaftl. Klasse. J. 1877. 1. Abth. 9. u. 10. Hft.
Wien, Gerold's S. 4 Mk. 50 Pf.

— dass. 2. Abth. 9. Hft. Ebd. 3 Mk.

Zöllner, F., wissenschaftl. Abhandlungen. 2. Bd. 1. Thl.
Leipzig, Staackmann. 12 Mk.

Fig. 1.

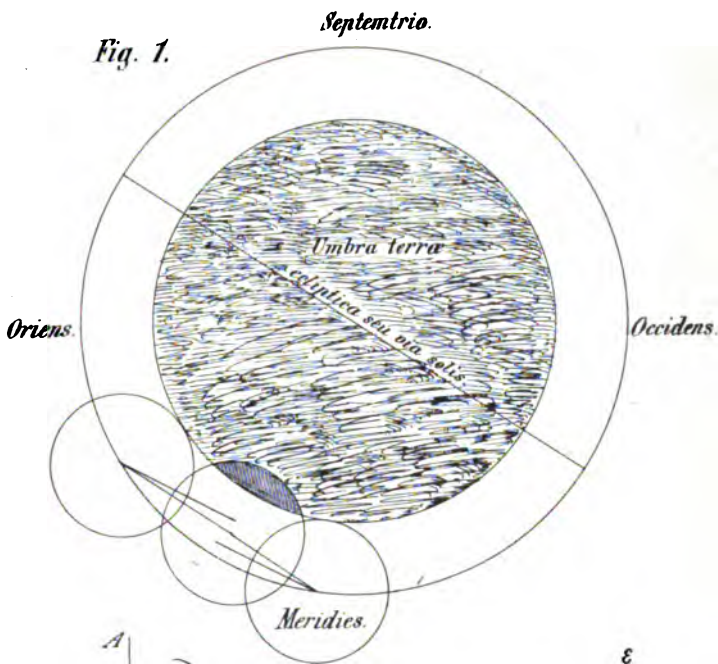


Fig. 2.

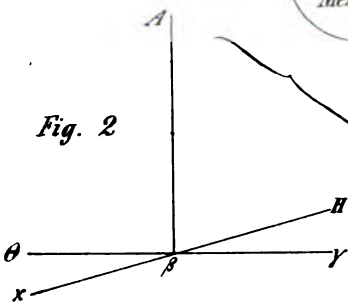


Fig. 4.

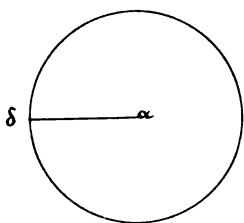


Fig. 5.

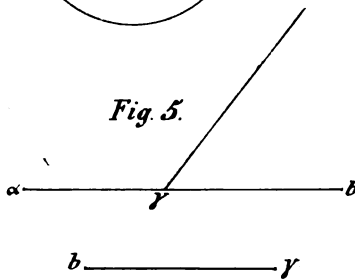


Fig. 3.

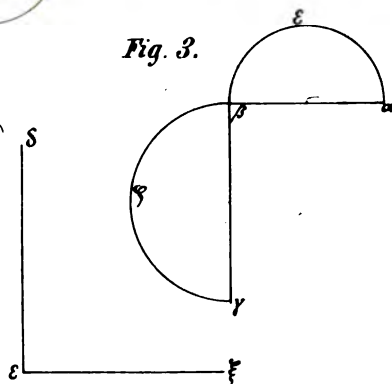
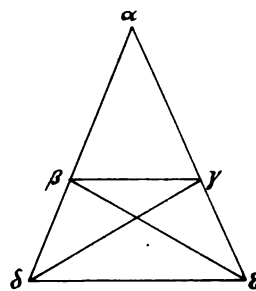
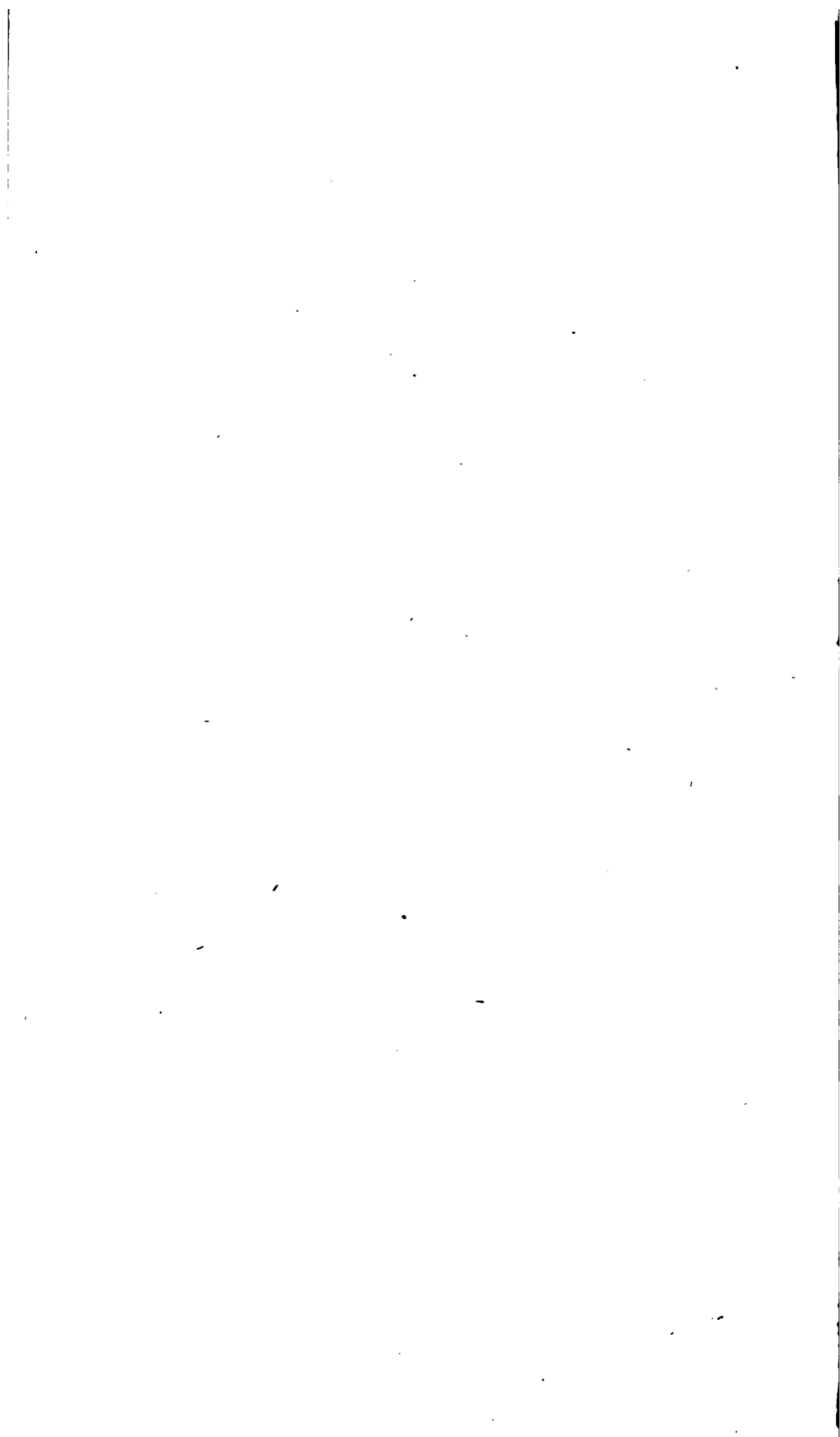


Fig. 6.



Curtze: Inedita Copernicana.



Verlag von **Louis Nebert in Halle a/S.**

Unter der Presse befindet sich und wird noch vor Beginn des Wintersemesters erscheinen:

**Leitfaden
für den Anfangsunterricht in der Geometrie**
an höheren Lehranstalten

von
H. Koestler, Oberlehrer.
Drittes Heft.

Nachdem dieser bewährte Leitfaden in den beiden ersten Heften die **Congruenz und Flächengleichheit** behandelt hat, erhält er in der neuen (III.) Abtheilung durch die Lehre von der **Ähnlichkeit** seinen Abschluss. Auch hier ist es dem Verf. um Beschränkung auf das Nothwendige, Uebersichtlichkeit in der Anordnung u. Darbietung eines geordneten u. den Lehrgang begleitenden Uebungstoffes zu thun gewesen.

Bei beabsichtigter Einführung stehen **Freiexemplare** bereitwilligst zu Diensten.

In meinem Verlage erschien soeben:

Mittheilungen
des
Copernicus-Vereins
für Wissenschaft und Kunst
zu Thorn.

I. Heft: Inedita Copernicana.

Aus den Handschriften zu Berlin, Frauenburg, Upsala und Wien
herausgegeben von

Dr. M. Curtze.

Mit einer Tafel.

5 Bogen. Geh. Preis 1 Mk. 60 Pf.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.

Verlag von George Westermann in Braunschweig.

Soeben erschien und ist durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Technischer Kalender
für
Maschinen- und Hütten-Ingenieure
bearbeitet von

H. Fehland,
früherem Eisenbahnmaschinenmeister, Eisenhütten-Ingenieur, Dampfkesselfabrik- und
Eisenwerksbesitzer etc.

für 1879.

Zweiter Jahrgang.

*Eine Sammlung der wichtigsten Formeln, Tabellen und Resultate
aus den Hauptgebieten der Technik. Mit circa 300 Figuren.*

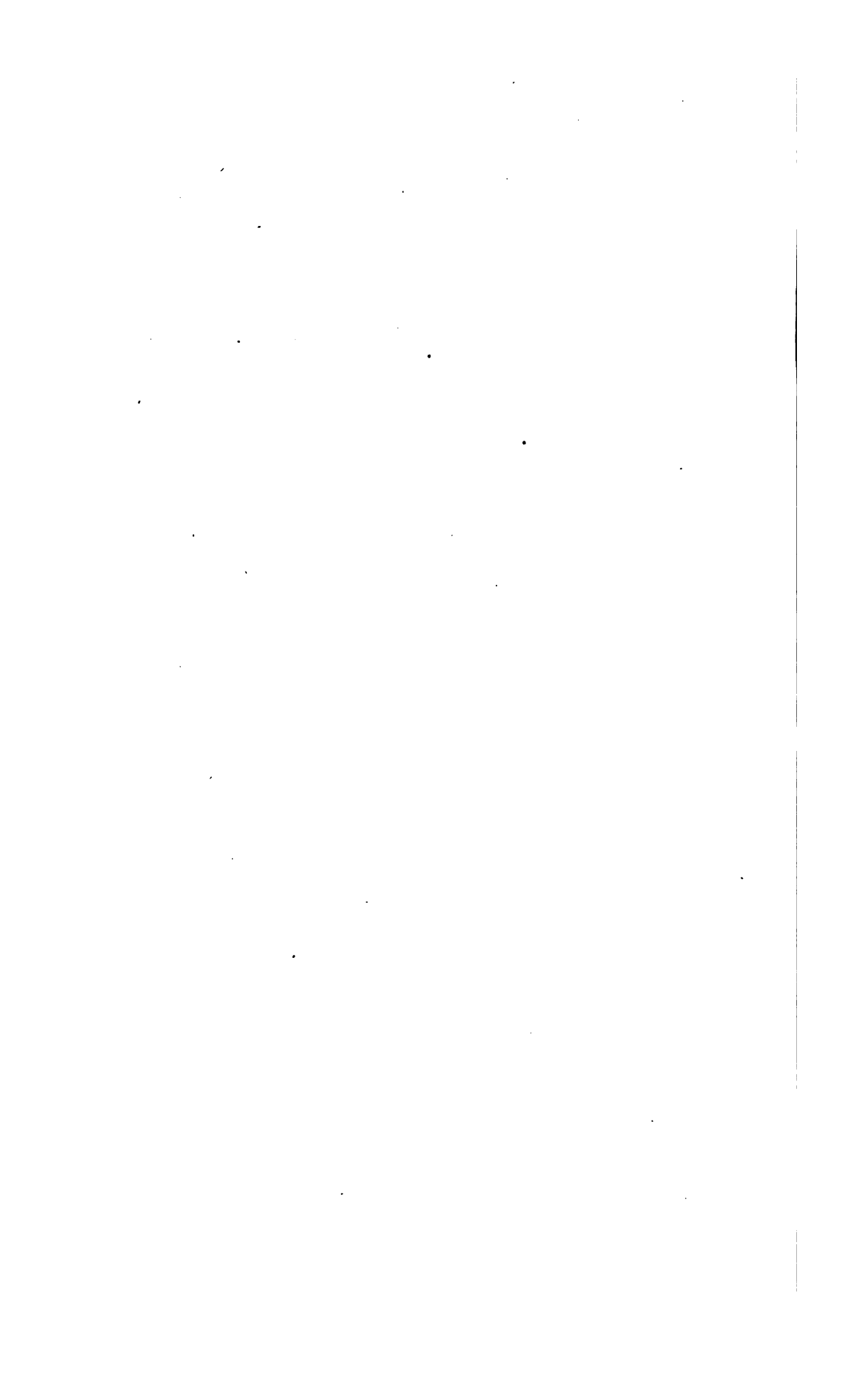
Preis: In Leder gebd. mit Faberstift Mk. 4,50.

In Leder gebd. mit Klappe und Faberstift 5 Mk.

Die überraschend grosse Verbreitung, welche dieser Kalender im vorigen Jahre bei seinem ersten Erscheinen gefunden, lässt hoffen, dass auch dieser neue, sorgfältig überarbeitete und vermehrte Jahrgang sich des Beifalls des technischen Publikums erfreuen wird.

I N H A L T.

	Seite.
XXIV. Inodita Copernicana. Fortsetzung von N. V. Von Maximilian Curtze	337
XXV. Ueber ebene Stromcurven von demselben elektromagnetischen Potential. Von Anton Wassmuth	374
XXVI. Bewegung zweier durch einen elastischen Faden verbundener materieller Punkte ohne Einwirkung äusserer Kräfte. Von R. Hoppe	390
XXVII. Ueber den in der Definition der Potenzlinie enthaltenen Kreis. Von L. Mack	405
XXVIII. Untersuchungen über das Dreieck. Von Emil Hain . . .	422
XXIX. Miscellen.	
1. Weiterer Beitrag zur Theorie der Cissoide. Von K. Zahradnik	443
2. Note über den Ausdruck für das innere Potential eines homogenen Ellipsoids. Von A. Wassmuth	448





• This book should be returned to
the Library on or before the last date
stamped below.

A fine of five cents a day is incurred
by retaining it beyond the specified
time.

Please return promptly.

DUE JUN 10 1915



3 2044 102 936 457